rijksuniversiteit groningen
faculteit wiskunde en natuurwetenschappen

Niet-lineaire watergolven

W. Rozema

Bachelorscriptie Technische Wiskunde / Natuurkunde

Januari 2009

Niet-lineaire watergolven

Samenvatting

Door de stijging van de zeespiegel staan we voor grote uitdagingen. Belangrijke dijken die ons beschermen tegen het water van de Noordzee, zullen in de toekomst op de proef gesteld worden door steeds sterkere en hogere golven. Als we onze voeten droog willen houden, moeten we goed uitzoeken of onze dijken wel bestand zijn tegen dit toekomstige natuurgeweld.

Met een computersimulatie kan worden uitgezocht wat er gebeurt als een golf op een dijk botst. Zo'n simulatie bepaalt heel nauwkeurig hoe een golf eruitziet en hoe hard het zeewater op elke plek tegen de dijk stroomt. Het uitvoeren van een goede simulatie kost echter veel tijd; soms wel een paar dagen. Om de rekentijd te beperken simuleert men de stroming van het water daarom meestal in een klein gebiedje voor de dijk. Voor zo'n lokale simulatie moet worden opgegeven hoe een golf het rekengebied binnenloopt. Hoe beter deze opgegeven golf lijkt op een echte golf, hoe betrouwbaarder de resultaten van de simulatie zijn. De golf die het rekengebied binnenloopt noemen we de randvoorwaarde van de simulatie.

In deze scriptie presenteren we op basis van een geïdealiseerd wiskundig model enkele golven die goed kunnen worden gebruikt als randvoorwaarde. We bespreken eerst de eenvoudige lineaire golven. Daarna verdiepen we ons in watergolven uit de ingewikkelde niet-lineaire theorie. We bespreken uitvoerig de niet-lineaire tweede- en vijfde-orde Stokes benaderingen. Daarna wordt uitgelegd hoe met behulp van een numerieke methode niet-lineaire hoge-orde stroomfunctie benaderingen verkregen kunnen worden.

We komen tot de conclusie dat een hoge-orde stroomfunctie benadering de eenvoudigste manier is om een golf zeer nauwkeurig te benaderen.

Bachelorscriptie Technische Wiskunde / Natuurkunde
Auteur: W. Rozema
Begeleiders: R. Luppes en A.E.P. Veldman
Datum: Januari 2009

Instituut voor Wiskunde en Informatica
Postbus 407
9700 AK Groningen

Inhoudsopgave

1 Inleiding **1**

2 Terminologie, model en probleemstelling **3**
2.1 Een ideale golf globaal beschrijven . . . 3
2.2 Het hydrodynamische model . . . 4
2.3 Modelvorming en probleemstelling . . . 7

3 Lineaire benaderingen **9**
3.1 De vergelijkingen lineariseren . . . 9
3.2 De gelineariseerde vergelijkingen oplossen . . . 12
3.3 Lineaire golven . . . 17
3.4 Lineaire golven in de praktijk . . . 18

4 Stokes benaderingen **19**
4.1 De tweede-orde Stokes benadering . . . 20
4.1.1 De vergelijkingen opstellen . . . 20
4.1.2 De vergelijkingen oplossen . . . 23
4.1.3 De volumeflux van het water en de waarde van M . . . 28
4.1.4 De orde van een Stokes benadering . . . 31
4.1.5 De nauwkeurigheid van de benadering . . . 31
4.1.6 De benadering in de praktijk . . . 34
4.2 De vijfde-orde Stokes benadering . . . 36
4.2.1 De uitgangsvergelijkingen . . . 36
4.2.2 De vergelijkingen opstellen en oplossen . . . 38
4.2.3 De vijfde-orde Stokes benadering controleren met Mathematica . . . 40
4.2.4 De nauwkeurigheid van de benadering . . . 41
4.2.5 De benadering in de praktijk . . . 42
4.3 Hogere-orde Stokes benaderingen . . . 43

5 Benaderingen voor lange golven **45**

6 Stroomfunctie benaderingen **47**
6.1 De uitgangsvergelijkingen opstellen . . . 47
6.2 Het stelsel vergelijkingen opstellen . . . 51
6.3 Het stelsel numeriek oplossen . . . 55
6.4 Resultaten voor de praktijk . . . 57
6.5 De stroomfunctie benadering in de praktijk . . . 60

6.6 De nauwkeurigheid en toepasbaarheid 61

7 Discussie **63**

A Lijsten met symbolen **69**
A.1 Lijst met symbolen uit deze scriptie 69
A.2 De symbolen uit het artikel Skjelbreia en Hendrickson 70

B De vijfde-orde Stokes benadering in Mathematica **71**

Bibliografie **75**

Hoofdstuk 1

Inleiding

Al eeuwen voert de mens een strijd tegen het water. Ver voor het begin van de jaartelling werden in Mesopotamië bijvoorbeeld al dijken aangelegd om het achterliggende land te beschermen tegen overstromingen. Dichter bij huis werden er terpen aangelegd om belangrijke gebouwen droog te houden bij hoogwater. Een eigentijds voorbeeld van de strijd tegen het water is de aanleg van de Deltawerken, naar aanleiding van de watersnood van 1953.

De strijd tegen het water is nog lang niet voorbij. Doordat de zeespiegel stijgt worden we gedwongen onze dijken te verhogen en versterken. Ondertussen worden onze schepen en boorplatforms op de proef gesteld door monstergolven. Tot overmaat van ramp voorspellen metereologen een klimaatverandering die gepaard gaat met een toename van extreme weersomstandigheden. Als we ons niet goed voorbereiden op dit nieuwe natuurgeweld, zullen de gevolgen rampzalig zijn.

Even oud als de dreiging van het water is de noodzaak het gedrag van water te voorspellen. Bij het aanleggen van een terp probeerde men bijvoorbeeld op basis van ervaringen uit het verleden in te schatten hoe hoog de terp in ieder geval moest worden om een goede bescherming te bieden tegen hoogwater. Zo'n empirische aanpak was lange tijd de beste manier om in grote lijnen het gedrag van water te voorspellen. Het is duidelijk dat de empirische aanpak niet meer volstaat in een tijd van snelle klimaatverandering. Het enige dat ervaringen uit het verleden ons immers duidelijk maken, is dat ze in de toekomst zullen worden overtroffen. Om onze schepen, boorplatforms en dijken te beschermen tegen het toekomstige natuurgeweld kunnen we dus niet vertrouwen op het verleden, maar moeten we de krachten van een extreem ruwe zee goed onderzoeken.

De oudste manier om waterstromingen en de bijbehorende gevaren systematisch te onderzoeken is door te experimenteren met een schaalmodel. Bij zo'n experiment wordt een schaalmodel van bijvoorbeeld een boorplatform in een bassin gezet. De natuurlijke mechanismen die golven veroorzaken ontbreken in een bassin. Daarom is er een geavanceerde installatie nodig die de golven van een ruwe zee kan nabootsen. Ook moet er meetapparatuur geïnstalleerd worden, die vastlegt welke krachten de golven op het schaalmodel uitoefenen. Het is duidelijk dat het uitvoeren van een dergelijk experiment en het analyseren van de meetresultaten erg arbeidsintensief is.

Een alternatief voor het experimentele onderzoek is het theoretische onderzoek. De eerste stappen in het theoretische onderzoek werden in de 18^{e} eeuw gezet door beroemde wiskundigen als Daniel Bernoulli en Leonhard Euler. Zij stelden het klassieke wiskundige model op voor de stroming van water. De vergelijkingen uit dit model konden nog niet met pen

en papier worden opgelost, maar al gauw werden er goede benaderingen van de oplossingen gevonden. Een belangrijk nadeel van het klassieke model is dat het bepaalde verstoringen en onregelmatigheden van de waterstroming negeert. De stroming van het water kan voorspeld worden tot het moment dat het water om een schip heen stroomt of tegen een dijk botst. Het model begeeft het dus precies op het moment dat we interessante resultaten verwachten.

Een aanzienlijke verbetering van het klassieke model zijn de beroemde Navier-Stokes vergelijkingen. Deze vergelijkingen werden opgesteld in de eerste helft van de 19^{e} eeuw en zijn zo realistisch, dat ze in principe zelfs kunnen voorspellen hoe golven breken. De vergelijkingen zijn hierdoor echter heel ingewikkeld en kunnen alleen in bepaalde geïdealiseerde gevallen met pen en papier worden opgelost. De Navier-Stokes vergelijkingen werden daarom lang beschouwd als theoretisch gedachte-experiment, waaruit amper praktische resultaten verkregen konden worden.

Hierin kwam verandering met de opkomst van de computer. Met een numerieke methode konden de Navier-Stokes vergelijkingen opeens worden opgelost voor hele praktische situaties. Omdat het oplossen van de vergelijkingen heel veel tijd kost, wordt het rekengebied van de numerieke methode meestal beperkt tot een klein gebiedje rond een schip of boorplatform. Met een moderne computer kan de waterstroming rond een schip binnen een paar dagen doorgerekend worden. Een computersimulatie is een aantrekkelijk alternatief voor het experimentele onderzoek. De simulaties zijn namelijk erg nauwkeurig en goedkoop; zodra de computer aan het werk gezet is, hoeft niemand er meer naar om te kijken.

Voordat de computer de waterstroming in het rekengebied kan simuleren, moet hij weten hoe het water dit gebied binnenstroomt. De gegevens die de instroom van het water vastleggen worden randvoorwaarden genoemd. Het is duidelijk dat het kiezen van goede randvoorwaarden belangrijk is. Bij een realistische randvoorwaarde verwachten we immers dat de resultaten van de simulatie de werkelijkheid goed benaderen.

In deze scriptie zullen we laten zien hoe we het klassieke model voor de stroming van water kunnen gebruiken voor het kiezen van realistische randvoorwaarden. We zullen hiertoe de oplossingen van de vergelijkingen uit het klassieke model op verschillende manieren benaderen. Eerst besteden we aandacht aan de eenvoudige lineaire benaderingen. Daarna bespreken we enkele ingewikkelde niet-lineaire benaderingen. Onze aandacht gaat hierbij vooral uit naar de Stokes benaderingen van orde twee en vijf en de hoge-orde stroomfunctiebenaderingen. Tot slot vergelijken we de besproken benaderingen met elkaar en geven we aan welke benadering het meeste lijkt op golven uit de werkelijkheid.

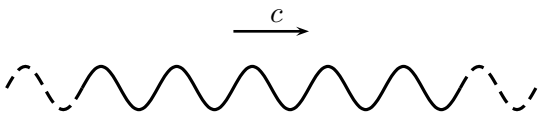
Hoofdstuk 2

Terminologie, model en probleemstelling

Ons onderzoek begint met het modelleren van de werkelijkheid. Ons doel is het opstellen van een model waarmee we kunnen voorspellen hoe het water stroomt en hoe de golf eruit ziet.

In dit hoofdstuk presenteren we eerst twee manieren om wiskundig naar een golf te kijken. De eerste manier is een terminologie waarmee een geïdealiseerde golf globaal beschreven kan worden. De tweede manier is een model uit de hydrodynamica dat beschrijft aan welke differentiaalvergelijkingen een golf moet voldoen. Na het bespreken van de twee invalshoeken combineren we ze. Dit lijdt dan tot het model dat we in dit onderzoek zullen hanteren.

2.1 Een ideale golf globaal beschrijven



Figuur 2.1: Een schematische weergave van een ideale golf

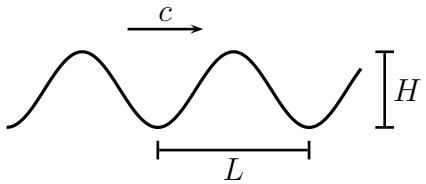
In deze paragraaf beperken we ons tot geïdealiseerde golven. Een ideale golf verandert niet van vorm en loopt door tot in het oneindige. In figuur 2.1 is een ideale golf schematisch weergegeven. Omdat de ideale golf telkens doorloopt, is de situatie na een bepaalde tijd, de trillingstijd, altijd weer terug in het uitgangspunt.

Het is gebruikelijk het gedrag en de afmetingen van een ideale golf met bepaalde grootheden te omschrijven. In figuur 2.2 is een aantal van deze grootheden weergegeven. Hieronder geven we nog een uitgebreide omschrijving.

De golflengte L. De horizontale afstand tussen twee opeenvolgende punten met dezelfde fase, bijvoorbeeld de afstand tussen twee opeenvolgende toppen.

Het golfgetal k. Een maat voor de golflengte. Het golfgetal is gedefinieerd als $k = 2\pi/L$.

De golfhoogte H. De verticale afstand tussen de top en het dal van de golf. In de literatuur wordt ook wel de amplitude A in plaats van de golfhoogte gebruikt. De amplitude is de



Figuur 2.2: Een ideale golf met zijn golfhoogte H, golflengte L en golfsnelheid c. De periode T van de golf is niet weergegeven.

maximale verstoring van het wateroppervlak in rust, dus $A = H/2$.

De periode T. De tijd die een golf nodig heeft om één golflengte af te leggen.

De frequentie ω. Een maat voor de periode. De frequentie definiëren we als $\omega = 2\pi/T$.

De golfsnelheid c. De snelheid waarmee de golf opzij loopt. De golfsnelheid is gerelateerd aan de golflengte en de periode via $c = L/T$. Omgeschreven naar het golfgetal en de frequentie wordt deze relatie $c = \omega/k$.

Het profiel van een ideale golf met snelheid c kan worden geschreven als functie van $kx - \omega t$. We definiëren deze variabele als θ.

$$\text{golfprofiel} = g(\theta) \quad \text{waarbij} \quad \theta \equiv kx - \omega t$$

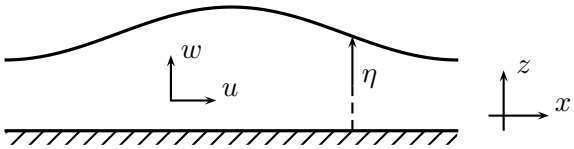
Omdat ω en k geschaald zijn met 2π, moet voor de functie g gelden dat hij zichzelf elke 2π herhaalt. We eisen dus dat de functie g voldoet aan $g(x) = g(x + 2\pi)$ voor elke x.

De analyse van de ideale golf heeft een handige terminologie opgeleverd. Toch blijft er veel te wensen over. We weten nog steeds niets over de stroming van het water. Ook weten we nog niet hoe de verschillende grootheden, bijvoorbeeld het profiel $g(\theta)$ en de golfsnelheid c, met elkaar samenhangen. Het bovenstaande is dus slechts geschikt voor het beschrijven van een ideale golf. Ons doel is echter niet het beschrijven van een golf. We willen juist de eigenschappen van een golf voorspellen.

2.2 Het hydrodynamische model

In plaats van het beschrijven van de golf kunnen we ook de natuurwetten waaraan een golf moet voldoen in wiskunde opschrijven. Dit is de aanpak die meestal in de hydrodynamica gekozen wordt. Op die manier ontstaat een voorschrift voor de golf in de vorm van een stelsel differentiaalvergelijkingen. We zullen hier in grote lijnen de afleiding van het model presenteren. Voor de details verwijzen we naar [VV07].

We beschouwen een tweedimensionale golf zoals de golf in figuur 2.3. Deze keer gaat onze aandacht niet uit naar de afmetingen van de golf, maar vooral naar de vorm van de golf en de stroming van het water. De vorm van de golf beschrijven we met een functie $\eta(x, t)$, die de hoogte van het wateroppervlak geeft als functie van de horizontale positie x en de tijd t. De stroming van het water wordt gegeven door de stroomsnelheid die wordt opgesplitst in een horizontale component u en een verticale component w. We verwachten dat deze snelheidscomponenten afhankelijk zijn van de plaats (x, z) en de tijd t. Om de



Figuur 2.3: Een tweedimensieonale golf uit het hydrodynamische model. De stroomsnelheid wordt opgesplitst in een horizontale component u en een verticale component w en de vorm van de golf wordt beschreven door een functie $\eta(x,t)$. De oorsprong van de het assenstelsel en het aangrijppunt van de functie $\eta(x,t)$ worden voorlopig niet vastgelegd.

differentiaalvergelijkingen te vinden voor het wateroppervlak en de stroomsnelheid, doen we enkele aannames over het water.

1. Het water is een niet-viskeuze, onsamendrukbare en rotatievrije vloeistof. Uit de hydrodynamica volgt nu dat er een potentiaalfunctie ϕ bestaat zodat $u = \phi_x$ en $w = \phi_z$. Deze potentiaalfunctie voldoet aan de Laplace-vergelijking $\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0$.

2. Grenslaagverschijnselen zijn verwaarloosbaar. We houden bijvoorbeeld geen rekening met de krachten die veroorzaakt worden door de oppervlaktespanning van het water.

3. De bodem is horizontaal. Er kan geen water door de bodem heen stromen.

4. Aan het wateroppervlak is de atmosferische druk p_α constant. Soms wordt aangenomen dat de druk op het oppervlak verwaarloosbaar is. De druk p_α wordt dan overal gelijkgesteld aan nul.

Onder de bovenstaande aannames worden in de hydrodynamica vier differentiaalvergelijkingen voor de potentiaalfunctie ϕ en de hoogte van het wateroppervlak η afgeleid. De eerste vergelijking is hierboven al genoemd. De potentiaal ϕ voldoet aan de Laplace-vergelijking.

$$\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0 \tag{2.1}$$

De tweede differentiaalvergelijkking volgt uit aanname 3. Omdat er geen water door de bodem heen kan moet de verticale stroomsnelheid op de bodem gelijk zijn aan 0.

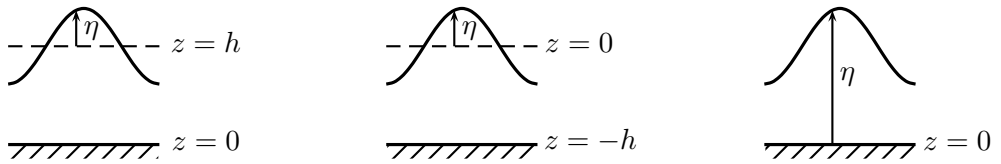
$$w = \phi_z = 0 \quad \text{op de bodem} \tag{2.2}$$

Per definitie kan er geen water door het wateroppervlak heen. Dit principe wordt opgeschreven als onze derde differentiaalvergelijking. De derde vergelijking moet gelden op het wateroppervlak en staat in de literatuur bekend als de *kinematische vrije-oppervlakteconditie*.

$$\eta_t = \phi_z - \phi_x \eta_x \quad \text{op het wateroppervlak} \tag{2.3}$$

De vierde differentiaalvergelijking wordt verkregen door de wet van Bernoulli toe te passen. De wet van Bernoulli staat hieronder. Voor een afleiding van deze wet verwijzen we naar [VV07, §1.7].

$$\phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{p}{\rho} - f = C(t)$$



Figuur 2.4: In de scriptie zullen we drie verschillende assenstelsels en definities gebruiken. In dit figuur staat links situatie 1, in het midden situatie 2 en rechts situatie 3. Merk op dat de gemiddelde waterdiepte h in situatie 3 gelijk is aan de gemiddelde waarde van de functie η.

Hierin is p de druk en ρ de dichtheid van het water. De Bernoulli-constante $C(t)$ is een functie die alleen afhankelijk is van de tijd. De functie f wordt zo gekozen dat ∇f de zwaartekracht geeft. We kiezen $f = g(z + b)$, waarbij b een willekeurige constante is. We passen nu de wet van Bernoulli toe op het wateroppervlak. De druk is daar gelijk aan de atmosferische druk p_α. Als we de wet van Bernoulli invullen krijgen we de vergelijking die in de literatuur bekend staat als de *dynamische vrije-oppervlakteconditie*.

$$\phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{p_\alpha}{\rho} + g(z + b) = C(t) \quad \text{op het wateroppervlak} \tag{2.4}$$

De vergelijkingen (2.1), (2.2), (2.3) en (2.4) vormen samen een stelsel differentiaalvergelijkingen voor een golf. De eerste vergelijking moet overal gelden en de laatste drie spelen de rol van randvoorwaarden. De vier vergelijkingen zijn nog niet helemaal compleet. Ze zeggen niet in wiskunde waar de randvoorwaarden (2.2), (2.3) en (2.4) moeten gelden. Dat kan ook niet, omdat we nog niet duidelijk hebben aangegeven waar de bodem en het wateroppervlak liggen. We hebben deze keuze zo lang uitgesteld, omdat we in de scriptie met twee verschillende assenstelsels te maken zullen krijgen. Daarnaast wordt de hoogte van het wateroppervlak bij één van deze assenstelsels op twee verschillende manieren gedefinieerd. Er zijn in totaal dus drie verschillende situaties.

1. De bodem ligt op $z = 0$. Het wateroppervlak wordt gegeven door $z = h + \eta(x, t)$, waarbij h de gemiddelde waterdiepte is.

2. Het gemiddelde waterpijl ligt op $z = 0$. Het wateroppervlak wordt gegeven door $z = \eta(x, t)$ en de bodem ligt op $z = -h$, waarbij h de gemiddelde waterdiepte is.

3. De bodem ligt op $z = 0$. Het wateroppervlak wordt gegeven door $z = \eta(x, t)$. De gemiddelde waterdiepte is in dit geval de gemiddelde waarde van η.

In figuur 2.4 zijn de situaties verduidelijkt. Voor elk van de bovenstaande situaties zien de eerder genoemde vergelijkingen er anders uit. Hieronder zijn de drie gevallen uitgewerkt. Behalve het invullen van de gekozen locaties van de bodem en het wateroppervlak kiezen we nu ook de onbepaalde constante b uit de dynamische vrije-oppervlakteconditie.

1. We stellen b in de dynamische vrije-oppervlakteconditie gelijk aan $-h$. We krijgen nu

de volgende diffferentiaalvergelijkingen.

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0 \\ \phi_z &= 0 \quad \text{als} \quad z = 0 \\ \eta_t &= \phi_z - \phi_x \eta_x \quad \text{als} \quad z = h + \eta \\ \phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{p_\alpha}{\rho} + g\eta &= C(t) \quad \text{als} \quad z = h + \eta \end{aligned} \tag{2.5}$$

2. In dit geval stellen we b gelijk aan 0.

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0 \\ \phi_z &= 0 \quad \text{als} \quad z = -h \\ \eta_t &= \phi_z - \phi_x \eta_x \quad \text{als} \quad z = \eta \\ \phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{p_\alpha}{\rho} + g\eta &= C(t) \quad \text{als} \quad z = \eta \end{aligned} \tag{2.6}$$

3. In dit geval stellen we b gelijk aan 0.

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0 \\ \phi_z &= 0 \quad \text{als} \quad z = 0 \\ \eta_t &= \phi_z - \phi_x \eta_x \quad \text{als} \quad z = \eta \\ \phi_t + \frac{1}{2}|\nabla\phi|^2 + \frac{p_\alpha}{\rho} + g\eta &= C(t) \quad \text{als} \quad z = \eta \end{aligned} \tag{2.7}$$

Deze stelsels differentiaalvergelijkingen vormen samen met de bijbehorende definities uit figuur 2.4 het hydrodynamische model van een golf. De resultaten van het model worden verkregen door de potentiaalfunctie ϕ en het wateroppervlak η te vinden die het stelsel oplossen. Bij het oplossen van het stelsel zorgen de onderste twee vergelijkingen echter voor problemen:

1. De twee vergelijkingen zijn niet-lineair, dus moeilijk op te lossen.
2. De vergelijkingen moeten gelden op het wateroppervlak, terwijl het wateroppervlak juist één van de onbekenden is. We zouden kunnen zeggen dat de vergelijkingen zichzelf in de staart bijten.

Deze moeilijkheden zorgen ervoor dat het stelsel vergelijkingen niet analytisch kan worden opgelost [Sve06, pagina 52].

2.3 Modelvorming en probleemstelling

We hebben in de vorige twee paragrafen twee manieren besproken om golven wiskundig te bekijken. De eerste manier gaf ons de mogelijkheid de afmetingen van een ideale golf te beschrijven, maar hielp ons niet de golf te voorspellen. Bij de tweede manier bekeken we de golf vanuit de hydrodynamica. Hoewel we nog geen expliciete resultaten hebben verkrijgen, lijkt het hydrodynamische model een voorspellend vermogen te hebben.

In dit onderzoek verenigen we de twee invalshoeken. We hanteren dus het hydrodynamische model onder de aanname dat de golven ideaal zijn. Door alleen naar ideale golven te

kijken hebben we het probleem iets nauwkeuriger afgebakend. We hebben echter nog steeds te maken met hetzelfde stelsel vergelijkigen dat niet analytisch kan worden opgelost. We zullen daarom de oplossingen van deze vergelijkingen proberen te benaderen. Dit benaderen is het doel van deze scriptie.

> **In deze scriptie gebruiken we het model uit de hydrodynamica. We kunnen echter het stelsel vergelijkingen** (2.5)**,** (2.6) **of** (2.7) **niet analytisch oplossen. Daarom zullen we proberen de oplossingen van deze vergelijkingen te benaderen. We beperken ons hierbij tot de oplossingen die horen bij ideale golven.**

We zullen zien dat er verschillende manieren zijn om de bovengenoemde oplossingen te benaderen. We kunnen deze manieren indelen in twee groepen.

1. De eerste groep bestaat uit manieren waarmee we de oplossingen (bijna) helemaal met pen en papier kunnen benaderen. Uit deze groep behandelen we lineaire benaderingen, Stokes benaderingen en de benaderingen voor lange golven.

2. In de tweede groep zitten benaderingen die met de computer verkregen worden. Uit deze groep bespreken we de stroomfunctiebenadering.

In het volgende hoofdstuk bespreken we de lineaire benaderingen. In de hoofdstukken daarna zullen we de Stokes benaderingen, benaderingen voor lange golven en de stroomfunctiebenadering van Rienecker en Fenton bespreken. Tenslotte volgt er een discussie waarin de besproken benaderingen met elkaar worden vergeleken.

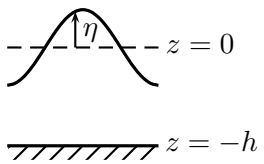
Hoofdstuk 3

Lineaire benaderingen

Lineaire benaderingen zijn de eenvoudigste benaderingen van de ideale oplossingen van het hiervoor verkregen stelsel differentiaalvergelijking. Om deze benaderingen te verkrijgen zullen we de differentiaalvergelijkingen van ons model lineariseren. De vergelijkingen die dan overblijven kunnen we analytisch oplossen. Oplossingen van deze gelineariseerde vergelijkingen noemen we lineaire golven.

Een lineaire benadering is natuurlijk alleen bruikbaar als de lineaire golven redelijke benaderingen zijn van de oplossingen van de oorspronkelijke, niet-gelineariseerde, vergelijkingen. Het is echter niet direct duidelijk onder welke fysische omstandigheden dit het geval is. We zullen zien dat lineaire golven in ieder geval toepasbaar zijn bij oneindig lage golven.

3.1 De vergelijkingen lineariseren



Figuur 3.1: De definitie van het assenstelsel en η bij het afleiden van de lineaire benadering

Voor het verkrijgen van lineaire benaderingen gebruiken we ons model bij de tweede situatie. Het gemiddelde waterpijl ligt dus op hoogte $z = 0$, het wateroppervlak wordt gegeven door $z = \eta(x,t)$ en de bodem ligt bij $z = -h$. Voor de duidelijkheid herhalen we hieronder het bijbehorende stelsel differentiaalvergelijkingen.

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0 \\ \phi_z &= 0 \quad \text{als} \quad z = -h \\ \eta_t &= \phi_z - \phi_x \eta_x \quad \text{als} \quad z = \eta \\ \phi_t + \frac{1}{2}\left(\phi_x^2 + \phi_z^2\right) + \frac{p_\alpha}{\rho} + g\eta &= C(t) \quad \text{als} \quad z = \eta \end{aligned}$$

In het vorige hoofdstuk merkten we op dat dit stelsel niet analytisch kan worden opgelost. Dit heeft twee belangrijke oorzaken. Als eerste merkten we op dat de vergelijkingen niet-lineair

zijn. Hierboven hebben we echter al gezegd dat we bij een lineaire benadering de vergelijkingen zullen lineariseren. Dat betekent dat we alle niet-lineaire termen zullen negeren. Het ziet er dus naar uit dat we het eerste probleem zonder moeilijkheden zullen omzeilen.

Als tweede probleem noemden we dat de bovenstaande vergelijkingen zichzelf in de staart bijten. Hiermee bedoelden we dat de onderste twee vergelijkingen moeten gelden op $z = \eta$, terwijl η één van de onbekenden van het probleem is. Het is niet direct duidelijk hoe we dit probleem kunnen omzeilen. We zullen daarom eerst onderzoeken wat we precies bedoelen als we zeggen dat de vergelijkingen zichzelf in de staart bijten.

Het probleem dat we onderzoeken komt alleen voor bij de onderste twee vergelijkingen. De eerste van deze vergelijkingen is de kinematische vrije-oppervlakteconditie en de tweede is de dynamische vrije-oppervlakteconditie.

$$\begin{aligned} \eta_t &= \phi_z - \phi_x \eta_x \quad \text{als} \quad z = \eta \\ \phi_t + \frac{1}{2}\left(\phi_x^2 + \phi_z^2\right) + \frac{p_\alpha}{\rho} + g\eta &= C(t) \quad \text{als} \quad z = \eta \end{aligned}$$

Om het overzicht te bewaren concentreren we ons eerst op de kinematische vrije-oppervlakteconditie.

$$\eta_t = \phi_z - \phi_x \eta_x \quad \text{als} \quad z = \eta \tag{3.1}$$

In deze vergelijking bedoelen we met "als $z = \eta$" dat we willen dat de vergelijking geldig is als we voor z de functie η invullen. In het vorige hoofdstuk zagen we al dat de functie η alleen afhankelijk is van x en t, en niet van z. De afgeleides η_t en η_x van η zijn dus ook onafhankelijk van z. De potentiaal ϕ is een functie van x, z en t. De potentiaal ϕ en zijn afgeleides ϕ_z en ϕ_x zijn dus wel afhankelijk van z.

Hieronder hebben we in vergelijking (3.1) voor z de waarde $\eta(x,t)$ ingevuld.

$$\eta_t(x,t) = \phi_z(x, \eta(x,t), t) - \phi_x(x, \eta(x,t), t)\eta_x(x,t)$$

Nu is het veel duidelijker waarom de kinematische vrije-oppervlaktconditie zo ingewikkeld is. Hij bevat namelijk composities van de onbekende functies. Zulke composities komen ook voor in de dynamische vrije-oppervlakteconditie. Ze zorgen ervoor dat de vergelijkingen van ons model moeilijk op te lossen zijn.

Het is nu duidelijker welk probleem we moeten omzeilen. In een differentiaalvergelijking komen composities van onbekende functies voor en dat willen we niet.

We zullen nu laten zien dat we de kinematische vrije-oppervlakteconditie willekeurig goed kunnen benaderen met een vergelijking waarin geen composities meer voorkomen. Voor de onbekenden uit de vergelijking die afhankelijk zijn van z stellen we een Taylorreeks op rond het punt $z = 0$. In de kinematische vrije-oppervlakteconditie zijn alleen ϕ_z en ϕ_x afhankelijk van z. Als voorbeeld ontwikkelen we hier de Taylorreeks van ϕ_x.

$$\phi_x(x,z,t) = \phi_x(x,0,t) + z\phi_{xz}(x,0,t) + \frac{1}{2}z^2\phi_{xzz}(x,0,t) + \dots$$

In de kinematische vrije-oppervlakteconditie komt ϕ_x met $z = \eta$ voor. Daarom vullen we in de bovenstaande reeks voor z de functie $\eta(x,t)$ in.

$$\phi_x(x, \eta(x,t), t) = \phi_x(x,0,t) + \eta(x,t)\phi_{xz}(x,0,t) + \frac{1}{2}\eta(x,t)^2\phi_{xzz}(x,0,t) + \dots$$

De bovenstaande Taylorreeks is een manier om de composities uit de kinematische vrije-oppervlakteconditie te benaderen zonder gebruik te maken van composities. Het resultaat kunnen we ook wat compacter opschrijven.

$$\{\phi_x \quad \text{als} \quad z = \eta\} \quad = \quad \{\phi_x + \eta\phi_{xz} + \frac{1}{2}\eta^2\phi_{xzz} + \ldots \quad \text{als} \quad z = 0\}$$

Door ook ϕ_z op deze manier te benaderen kunnen we de kinematische vrije-oppervlakte-conditie vervangen door

$$\eta_t = (\phi_z + \eta\phi_{zz} + \ldots) - (\phi_x + \eta\phi_{xz} + \ldots)\eta_x \quad \text{als} \quad z = 0\,. \tag{3.2}$$

Door heel veel termen van de Taylorreeks op te schrijven kan deze vergelijking de kinetische vrije-oppervlakte conditie (3.1) willekeurig nauwkeurig benaderen. Daar staat tegenover dat de benadering steeds onoverzichtelijker wordt als we de Taylorreeks verder ontwikkelen. We kunnen met de hierboven gepresenteerde denkstappen ook een benadering maken voor de dynamische vrije-oppervlakteconditie.

$$(\phi_t + \eta\phi_{tz} + \ldots) + \frac{1}{2}\left((\phi_x + \ldots)^2 + (\phi_z + \ldots)^2\right) + \frac{p_\alpha}{\rho} + g\eta = C(t) \quad \text{als} \quad z = 0 \tag{3.3}$$

We hebben nu één van de twee moeilijkheden van de vergelijkingen opgelost. We kunnen de vergelijkingen uit ons stelsel willekeurig nauwkeurig benaderen zonder composities te gebruiken. Zoals we al zagen geldt echter dat bij grotere nauwkeurigheid de vergelijkingen steeds onoverzichtelijker worden. Bovendien staan in de benaderingen van de onderste twee vergelijkingen (3.2) en (3.3) een heleboel niet-lineaire termen.

Nu zullen we de vergelijkingen lineariseren. Dat betekent dat we alle termen zullen verwaarlozen die niet lineair zijn in de onbekenden η en ϕ en hun afgeleides. Pas later zullen we bespreken in welke gevallen dit gerechtvaardigd is.

Op dit moment heeft ons stelsel vergelijkingen de vorm

$$\begin{aligned}
\phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0 \\
\phi_z &= 0 \quad \text{als} \quad z = -h \\
\eta_t = (\phi_z + \eta\phi_{zz} + \ldots) - (\phi_x + \eta\phi_{xz} + \ldots)\eta_x &\quad \text{als} \quad z = 0 \\
(\phi_t + \ldots) + \frac{1}{2}\left((\phi_x + \ldots)^2 + (\phi_z + \ldots)^2\right) + \frac{p_\alpha}{\rho} + g\eta = C(t) &\quad \text{als} \quad z = 0.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

De bovenste twee vergelijkingen van (3.4) zijn al lineair, omdat er geen producten van de onbekenden en hun afgeleides in voorkomen. In de derde vergelijking komen wel niet-lineaire termen voor. De eerste is $\eta\phi_{zz}$. In de staart van de eerste Taylorreeks (aangegeven met ...) komen alleen maar niet-lineaire termen voor, omdat de i-de term van de reeks in ieder geval η^i bevat. Als we het product van de tweede Taylorreeks en η_x uitschrijven krijgen wel alleen niet-lineaire termen. Deze moeten we ook verwaarlozen. Rechts van het gelijkteken blijft dus alleen de term ϕ_z over. Het resultaat is de gelineariseerde kinematische vrije-oppervlakteconditie.

$$\eta_t = \phi_z \quad \text{als} \quad z = 0$$

Op dezelfde manier kunnen we de vierde vergelijking van (3.4) lineariseren. Hieronder staat het resultaat.

$$\phi_t + \frac{p_\alpha}{\rho} + g\eta = C(t) \quad \text{als} \quad z = 0 \tag{3.5}$$

Voor later gebruik zetten we het gelineariseerde stelsel vergelijkingen bij elkaar.

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0 \\ \phi_z &= 0 \quad \text{als} \quad z = -h \\ \eta_t &= \phi_z \quad \text{als} \quad z = 0 \\ \phi_t + \frac{p_\alpha}{\rho} + g\eta &= C(t) \quad \text{als} \quad z = 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Zometeen zullen we zien dat dit stelsel analytisch kan worden opgelost. De enige benadering bij het verkrijgen van een lineaire golf bestaat uit het lineariseren van het oorspronkelijke stelsel vergelijkingen (3.4). We zullen daarom aangeven onder welke omstandigheden dit lineariseren gerechtvaardigd is.

Het lijkt logisch dat we de gelineariseerde vergelijkingen de oorspronkelijke vergelijkingen goed benaderen als de lineaire termen in de oorspronkelijke vergelijking veel groter zijn dan de niet-lineaire. Dit is het geval als η en ϕ en hun afgeleides heel klein zijn. Kleine waardes van ϕ en η en hun afgeleides corresponderen met een hele lage golf op water dat amper stroomt. Soms worden de lineaire golven daarom *oneindig lage golven* genoemd.

In werkelijkheid komen natuurlijk ook golven voor die hoger zijn dan de allerlaagste. Om te beoordelen hoe goed de lineaire vergelijkingen de oorspronkelijke vergelijkingen benaderen bij deze golven, moeten we weten hoe de lineaire en de niet-lineaire termen uit het oorspronkelijke stelsel (3.4) zich verhouden. Hiervoor moeten we de functies ϕ en η weten die bij de een golf horen. Deze functies zijn echter juist de onbekenden van ons probleem.

We kunnen op dit moment dus nog niet precies aangeven voor welke golven de oorspronkelijke vergelijkingen redelijk benaderd worden door de gelineariseerde vergelijkingen. We vermoeden in ieder geval dat de lineaire golf vooral de allerlaagste golven goed zal benaderen.

3.2 De gelineariseerde vergelijkingen oplossen

We zullen nu het zojuist genoemde stelsel gelineariseerde vergelijkingen (3.6) oplossen. Er zijn verschillende manieren om dit te doen. De hier gepresenteerde aanpak is gebaseerd op [Sve06] en [Sor97].

We zijn geïnteresseerd in oplossingen van het gelineariseerde stelsel vergelijkingen die horen bij ideale golven. Een ideale golf heeft een goed gedefinieerde golflengte L, periode T, golfsnelheid c en een golfhoogte H. We zagen eerder dat bij een ideale golf de verstoring van het wateroppervlak η geschreven kan worden als functie van $\theta = kx - \omega t$.

$$\eta(x,t) = \eta(\theta)$$

We doen nu drie aannames over de potentiaalfunctie ϕ van een ideale golf.

1. De potentiaalfunctie $\phi(x,z,t)$ kan geschreven worden als functie van θ en z.

$$\phi(x,z,t) = \phi(\theta,z) \tag{3.7}$$

   Dat betekent dat de potentiaalfunctie net als het golfprofiel opzij loopt zonder te veranderen.

2. De potentiaalfunctie is te schrijven als product van een functie f van θ en een functie Z van z.

$$\phi(\theta,z) = f(\theta)Z(z)$$

3. Net als het golfprofiel herhaalt de potentiaalunctie ϕ van een ideale golf zichzelf in de horizontale richting met periode L. Voor elke x, z en t geldt dus $\phi(x,z,t) = \phi(x+L,z,t)$. Als we de afhankelijkheid van x en t met θ opschrijven moet nu voor alle θ en z het onderstaande gelden.
$$\phi(\theta, z) = \phi(\theta + 2\pi, z)$$
Onder de tweede aanname kunnen we deze eis ook opschrijven als
$$f(\theta) = f(\theta + 2\pi) \quad \text{voor elke } \theta\,.$$

Verderop zullen we ontdekken dat oplossingen van de gelineariseerde vergelijkingen niet altijd aan de drie bovenstaande aannames voldoen. Deze aannames moeten dus beschouwd worden als een tijdelijk hulpmiddel. Zodra we met behulp van de aannames een aantal oplossingen hebben gevonden, kunnen we deze oplossingen alsnog generaliseren tot oplossingen die niet aan alle aannames voldoen.

We concentreren ons eerst op de bovenste twee vergelijkingen uit het gelineariseerde stelsel (3.6).

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0 \\ \phi_z &= 0 \quad \text{als} \quad z = -h \end{aligned} \tag{3.8}$$

In deze vergelijkingen komt alleen de potentiaalfunctie ϕ voor. Met behulp van de eerste aanname kunnen we de vergelijkingen herschrijven tot

$$\begin{aligned} k^2\phi_{\theta\theta} + \phi_{zz} &= 0 \\ \phi_z &= 0 \quad \text{als} \quad z = -h\,. \end{aligned}$$

Nu gebruiken we de tweede aanname. We vullen voor $\phi(\theta, z)$ het product $f(\theta)Z(z)$ in.

$$\begin{aligned} k^2 f'' Z + f Z'' &= 0 \\ f Z' &= 0 \quad \text{als} \quad z = -h \end{aligned} \tag{3.9}$$

We hebben nu twee differentiaalvergelijkingen gekregen met de functies $Z(z)$ en $f(\theta)$ als onbekenden. We bekijken eerst de bovenste. We delen de vergelijking door fZ en scheiden de variabelen.

$$\frac{Z''}{Z} = -k^2 \frac{f''}{f} \tag{3.10}$$

Links van het gelijkteken staat nu een functie die alleen afhankelijk is van z, terwijl de term rechts van het gelijkteken alleen afhankelijk is van θ. We willen dat de gelijkheid geldt voor elke θ en elke z. Dit betekent dat zowel de term links als de term rechts van het gelijkteken gelijk moet zijn aan een constante, die we suggestief λ^2 noemen.

$$\frac{Z''}{Z} = \lambda^2 \quad \text{en} \quad -k^2\frac{f''}{f} = \lambda^2$$

Als we deze vergelijking herschrijven wordt het oplossen makkelijker.

$$Z'' = \lambda^2 Z \quad \text{en} \quad f'' = -\frac{\lambda^2}{k^2} f \tag{3.11}$$

Afhankelijk van het teken van de constante λ^2 krijgen we verschillende soorten oplossingen voor f en Z. Volgens de derde aanname willen we dat f periodiek is. Dit komt alleen voor bij positieve λ^2. De vergelijkingen (3.11) zijn voor positieve λ^2 eenvoudig op te lossen.

$$f(\theta) = A_1 \cos\left(\frac{\lambda}{k}\theta\right) + A_2 \sin\left(\frac{\lambda}{k}\theta\right) \tag{3.12}$$

$$Z(z) = B_1 e^{\lambda z} + B_2 e^{-\lambda z} \tag{3.13}$$

We zullen nu eerst f verder oplossen. Omdat de oscillerende termen in de vergelijking dezelfde frequentie hebben, kunnen we f schrijven als één oscillerende term met een fase.

$$f(\theta) = A_3 \sin\left(\frac{\lambda}{k}\theta + \delta\right)$$

We zijn niet geïnteresseerd in de oorsprong van de horizontale coördinaat. We kiezen daarom de fase δ gelijk aan 0.

$$f(\theta) = A_3 \sin\left(\frac{\lambda}{k}\theta\right) \tag{3.14}$$

Nu kunnen we λ bepalen. Volgens de derde aanname moet f periodiek zijn in θ met periode 2π. Dit is waar als we λ gelijkstellen aan nk, waarbij n een positief geheel getal is. Als we n groter kiezen dan 1 heeft f periodes kleiner dan 2π en krijgt ϕ dus periodes kleiner dan L. Dat willen we voorkomen. We stellen daarom n gelijk aan 1 en krijgen $\lambda = k$.

$$f(\theta) = A_3 \sin(\theta)$$

We moeten onze keuze $\lambda = k$ nu ook invullen in Z.

$$Z(z) = B_1 e^{kz} + B_2 e^{-kz}$$

In de literatuur is het gebruikelijk Z in een andere vorm op te schrijven. Hiervoor stellen we B_1 gelijk aan $(B_3 + B_4)/2$, B_2 aan $(B_3 - B_4)/2$ en gebruiken we hyperbolische functies.

$$Z(z) = B_3 \cosh(kz) + B_4 \sinh(kz) \tag{3.15}$$

De zojuist gevonden functies f en Z voldoen volgens de constructie aan de eerste vergelijking van (3.9). We kijken nu naar de tweede vergelijking.

$$fZ' = 0 \quad \text{als} \quad z = -h \tag{3.16}$$

We kunnen de bovenstaande vergelijking op twee manieren oplossen. Ten eerste wordt de vergelijking opgelost als $f(\theta)$ voor elke θ gelijk is aan nul. Hierbij hoort echter het triviale geval dat ϕ gelijk is aan nul. Als we dat niet willen, moet $Z'(-h)$ gelijk aan nul zijn. Voor de hiervoor bepaalde functie Z uit (3.15) betekent dit

$$Z'(-h) = B_3 \sinh(-kh) + B_4 \cosh(-kh) = 0\,.$$

Deze vergelijking lossen we op voor B_3. We gebruiken hierbij dat $\cosh(-kh) = \cosh(kh)$ en $\sinh(-kh) = -\sinh(kh)$.

$$B_3 = B_4 \frac{\cosh(kh)}{\sinh(kh)} \tag{3.17}$$

We stoppen deze waarde voor B_3 terug in onze uitdrukking voor Z en krijgen

$$Z(z) = B_4 \left(\frac{\cosh(kh)}{\sinh(kh)} \cosh(kz) + \sinh(kz) \right) .$$

In de literatuur wordt dit meestal herschreven tot compactere vorm.

$$Z(z) = B_4 \frac{\cosh(k(z+h))}{\sinh(kh)}$$

Deze Z en de f die we opgeschreven hebben in (3.14) zijn de oplossingen van de differentiaalvergelijkingen voor Z en f uit (3.11). Volgens onze constructie betekent dit dat $\phi = fZ$ de bovenste twee vergelijkingen van het gelineariseerde stelsel (3.8) oplost.

$$\phi(\theta, z) = f(\theta)Z(z) = A_3 B_4 \frac{\cosh(k(z+h))}{\sinh(kh)} \sin(\theta) \tag{3.18}$$

Hierin zijn A_3 en B_4 constant ten opzichte van θ en z. In deze potentiaalfunctie ϕ is de waarde van de constante $A_3 B_4$ nog onbepaald. We weten ook nog niets over de verstoring van het gemiddelde wateroppervlak η. We hopen deze gegevens te bepalen uit de onderste twee van de gelineariseerde vergelijkingen.

$$\begin{aligned} \eta_t = \phi_z \quad &\text{als} \quad z = 0 \\ \phi_t + \frac{p_\alpha}{\rho} + g\eta = C(t) \quad &\text{als} \quad z = 0 \end{aligned}$$

We zullen eerst de onderste van deze twee vergelijkingen gebruiken. Dit is de gelineariseerde dynamische vrije-oppervlakteconditie.

$$\phi_t + \frac{p_\alpha}{\rho} + g\eta = C(t) \quad \text{als} \quad z = 0 \tag{3.19}$$

We zouden het liefst direct deze vergelijking oplossen voor η. Het probleem is echter dat in de vergelijking de onbekende functie $C(t)$ voorkomt. We zullen daarom eerst $C(t)$ moeten bepalen.

In het model wordt het wateroppervlak gegeven door $z = \eta$. We hebben afgesproken dat het gemiddelde waterpijl op $z = 0$ ligt. Dit betekent dat op elk moment de gemiddelde verstoring van het wateroppervlak ten opzichte van $z = 0$ gelijk moet zijn aan nul.

$$\int_0^L \eta \, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{voor elke } t$$

Met behulp van dit gegeven kunnen we $C(t)$ bepalen. Hiertoe integreren we de hele gelineariseerde dynamische vrije-oppervlakteconditie naar x met de grenzen $x = 0$ en $x = L$.

$$\int_0^L \left(\phi_t + \frac{p_\alpha}{\rho} + g\eta \right) \mathrm{d}x = \int_0^L C(t) \, \mathrm{d}x \quad \text{als} \quad z = 0$$

We weten dat de integraal van een som gelijk is aan de som van de integralen.

$$\int_0^L \phi_t \, \mathrm{d}x + \int_0^L \frac{p_\alpha}{\rho} \, \mathrm{d}x + \int_0^L g\eta \, \mathrm{d}x = \int_0^L C(t) \, \mathrm{d}x \quad \text{als} \quad z = 0$$

Volgens de bovenstaande opmerkingen over het gemiddelde waterpijl is de derde integraal in deze vergelijking gelijk aan nul. De tweede en de vierde integraal kunnen gemakkelijk berekend worden, omdat p_α/ρ en $C(t)$ onafhankelijk van x zijn. Tenslotte bepalen we de eerste integraal door voor ϕ_t op $z = 0$ gebruik te maken van de eerder gevonden potentiaalfunctie (3.18).

$$-\int_0^L A_3 B_4 \omega \frac{\cosh(kh)}{\sinh(kh)} \cos(kx - \omega t)\, \mathrm{d}x \; + \; \frac{p_\alpha}{\rho} L = C(t) L \tag{3.20}$$

De factor $\cos(kx - \omega t)$ van de eerste integrand heeft een periode L in de horizontale richting. Daarom wordt de eerste integraal gelijk aan nul. We houden nu een voorschrift voor $C(t)$ over.

$$C(t) = \frac{p_\alpha}{\rho}$$

Blijkbaar is de functie $C(t)$ op elk moment gelijk aan p_α/ρ. Als we dit resultaat invullen in de gelineariseerde dynamische vrije-oppervlakteconditie (3.19) valt het quotient p_α/ρ helemaal uit de vergelijking.

$$\phi_t + g\eta = 0 \quad \text{als} \quad z = 0$$

Uit deze vergelijking kunnen we η oplossen. Net als bij het bepalen van $C(t)$ vullen we voor ϕ_t de eerder verkregen potentiaalfunctie (3.18) in.

$$\eta \; = \; \left\{ -\frac{1}{g}\phi_t \quad \text{als} \quad z = 0 \right\} \; = \; A_3 B_4 \frac{\omega}{g} \frac{\cosh(kh)}{\sinh(kh)} \cos(\theta)$$

Het eerste gelijkteken wordt hier gerechtvaardigd door op te merken dat η onafhankelijk is van z. Hierdoor heeft het geen invloed dat we deze functie eigenlijk op $z = 0$ zouden moeten bekijken.

We hebben nu een uitdrukking voor de functie η. We kunnen nu de constante $A_3 B_4$ bepalen door te eisen dat de hoogte van de golf gelijk is aan H.

$$H = \max \eta - \min \eta = 2 A_3 B_4 \frac{\omega}{g} \frac{\cosh(kh)}{\sinh(kh)}$$

Deze vergelijking lossen we op voor $A_3 B_4$.

$$A_3 B_4 = \frac{Hg}{2\omega} \tanh(kh)$$

Als we deze waarde invullen in de bovenstaande uitdrukking voor η krijgen we inderdaad een golf van hoogte H.

$$\eta(\theta) = \frac{H}{2} \cos(\theta)$$

De constante $A_3 B_4$ kwam oorspronkelijk uit de potentiaalfunctie in (3.18). Als we de zojuist verkregen waarde daar invullen krijgen we

$$\phi(\theta, z) = \frac{Hg}{2\omega} \frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)} \sin(\theta) \; .$$

We hebben met nu behulp van drie van de vier gelineariseerde vergelijkingen uitdrukkingen verkregen voor de potentiaal ϕ en de verstoring van het wateroppervlak η. De vergelijking die we nog niet gebruikt hebben is de gelineariseerde kinematische vrije-oppervlakteconditie.

$$\eta_t = \phi_z \quad \text{als} \quad z = 0$$

Als we de hierboven verkregen functies ϕ en η invullen in deze vergelijkingen krijgen de onderstaande vergelijking.

$$\frac{H\omega}{2}\sin(\theta) = \frac{Hgk}{2\omega}\tanh(kh)\sin(\theta)$$

Als we deze vergelijking oplossen voor ω^2 krijgen we

$$\omega^2 = gk\tanh(kh)\,.$$

Deze vergelijking staat bekend als de dispersierelatie. De relatie zegt hoe de frequentie ω en het golfgetal k van een golf samenhangen. Voor een geïdealiseerde golf geldt $c = \omega/k$. We hebben nu dus ook een relatie tussen de golfsnelheid en het golfgetal.

$$c^2 = \frac{g}{k}\tanh(kh) \tag{3.21}$$

3.3 Lineaire golven

We vatten nu samen wat we tot nu toe gedaan hebben. Door aannames te doen over de potentiaal ϕ hebben we uit drie van de vier gelineariseerde vergelijkingen uitdrukkingen voor de potentiaal ϕ en de verstoring van het wateroppervlak η bepaald.

$$\phi = \frac{Hg}{2\omega}\frac{\cosh\left(k(z+h)\right)}{\cosh\left(kh\right)}\sin\left(kx-\omega t\right)$$

$$\eta = \frac{H}{2}\cos(kx-\omega t)$$

Door deze uitdrukkingen in te vullen in de nog niet gebruikte vergelijking kregen we de dispersierelatie.

$$\omega^2 = gk\tanh(kh)$$

De gevonden functies ϕ en η zijn alleen oplossingen van het stelsel gelineariseerde vergelijkingen als de frequentie ω en het golfgetal k van de golf samenhangen volgens de dispersierelatie. De bovenstaande uitdrukkingen voor ϕ en η samen met de dispersierelatie noemen we de lineaire golf. We bespreken nu kort enkele generalisaties en eigenschappen van de lineaire golf.

We hebben al opgemerkt dat we onder de drie aannnames over ϕ niet alle oplossingen van het stelsel gelineariseerde vergelijkingen vinden. Als we bijvoorbeeld bij de potentiaal een term van de vorm Kx optellen, hebben we nog steeds een potentiaal die de vergelijkingen oplost.

$$\phi = \frac{Hg}{2\omega}\frac{\cosh\left(k(z+h)\right)}{\cosh\left(kh\right)}\sin\left(kx-\omega t\right) + Kx \tag{3.22}$$

De horizontale component van de stroomsnelheid wordt gegeven door $u = \phi_x$. Daarom zouden we kunnen zeggen dat de nieuwe potentiaal hoort bij een golf in water dat opzij stroomt met een gemiddelde horizontale stroomsnelheid K. We zullen de eigenschappen van zulke potentialen uitvoerig behandelen in de bespreking van de Stokes benadering.

In de literatuur gaat men op dit punt soms over tot het introduceren van superposities van lineaire golven. Het idee achter deze superposities is dat voor elke lineaire vergelijking een lineaire combinatie van oplossingen weer een oplossing is. Deze superposities horen echter

niet meer bij ideale golven. We zullen ze in deze scriptie daarom niet bespreken. Voor een uitgebreide verhandeling over superposities van lineaire golven verwijzen we naar [Sve06, §3.4].

Het is niet duidelijk hoe nauwkeurig de lineaire golven echte golven benaderen. We weten namelijk niet of de gelineariseerde vergelijkingen de oorspronkelijke vergelijkingen goed benaderen. Ook als we zouden weten dat dit zo is, dan nog zouden we stilzwijgend moeten aannemen dat oplossingen van een redelijke benadering van vergelijkingen de oplossingen van de oorspronkelijke vergelijkingen benaderen. We zullen het vraagstuk over de nauwkeurigheid van lineaire golven voorlopig laten voor wat het is. In de discussie maken we hier nog enkele opmerkingen over.

3.4 Lineaire golven in de praktijk

De potentiaal ϕ en de verstoring van het wateroppervlak η van een eenvoudige lineaire golf zijn gegeven in termen van de volgende vier grootheden.

1. De golfhoogte H
2. De gemiddelde waterdiepte h
3. De golflengte L of het golfgetal $k = 2\pi/L$
4. De periode T of de frequentie $\omega = 2\pi/T$

Gegeven de bovenstaande grootheden kunnen we dus de ϕ en η van een lineaire golf opschrijven. We hebben echter gezien dat het golfgetal k en de frequentie ω moeten samenhangen volgens de dispersierelatie.

$$\omega^2 = gk \tanh(kh)$$

We vermoeden daarom dat we al een lineaire golf kunnen opschrijven als de golfhoogte H, de waterdiepte h en de golflengte L of de periode T gegeven zijn. In de praktijk krijgen we meestal te maken met één van deze twee gevallen.

1. De golfhoogte H, de waterdiepte h en de golflengte L worden gegeven. Dit is het eenvoudigste geval. We berekenen het golfgetal uit $k = 2\pi/L$. Dan volgt de frequentie ω direct uit de dispersierelatie. Nu hebben we de waardes van alle grootheden uit de uitdrukkingen voor ϕ en η.

2. De golfhoogte H, de waterdiepte h en de periode T worden gegeven. We berekenen de frequentie uit $\omega = 2\pi/L$. We kunnen in dit geval het golfgetal k niet direct uit de dispersierelatie halen. Het is gebruikelijk de dispersierelatie te herschrijven tot (zie [Sve06, pagina 67]).

   $$kh = \frac{\omega^2 h}{g} \coth(kh)$$

   De waarde van $\omega^2 h/g$ kunnen we bepalen uit de gegevens. We kunnen daarna met een numerieke methode de bovenstaande vergelijking oplossen voor kh. Hieruit kunnen we de waarde van k bepalen. Nu hebben we de waardes van alle onbekenden uit de lineaire benadering.

Hoofdstuk 4

Stokes benaderingen

Lineaire golven zijn goede benaderingen voor oneindig lage golven. We hebben in het vorige hoofdstuk gezien dat het stelsel vergelijkingen uit het model bij hogere golven slechter benaderd worden door de gelineariseerde vergelijkingen. De oplossingen van het stelsel gelineariseerde vergelijkingen, de lineaire golven, benaderen hogere golven naar verwachting dus ook slechter.

In dit hoofdstuk presenteren we Stokes benaderingen. We zullen zien dat deze benaderingen bij hogere golven nauwkeuriger zijn dan de lineaire benaderingen. Stokes benaderingen zijn in 1847 bedacht door George Stokes. De benaderingen worden bijna helemaal met pen en papier verkregen en staan erom bekend dat zij bepaalde karakteristieke eigenschappen van golven heel goed voorspellen.

Om een Stokes benadering te verkrijgen gebruiken we het model dat we eerder afgeleid hebben. We nemen aan dat de onbekenden uit het bijbehorende stelsel vergelijkingen geschreven kunnen worden als machtreeks in $\epsilon \equiv H/L$ of een soortgelijke parameter. Voor de potentiaal ϕ schrijven we bijvoorbeeld

$$\phi = \phi_0 + \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2 + \dots$$

waarin ϕ_0, ϕ_1 en ϕ_2 voorlopig onbekende functies zijn. Zulke reeksen schrijven we ook op voor de onbekenden η en C. We vullen deze reeksen in, in het stelsel vergelijkingen. Hierdoor krijgen we een stelsel differentiaalvergelijkingen met als onbekenden de functies ϕ_i, η_i, C_i in plaats van ϕ, η en C. Het blijkt dat we uit deze nieuwe vergelijkingen eerst ϕ_1, η_1 en C_1 kunnen bepalen. Daarna kunnen we een oplossing vinden voor ϕ_2, η_2 en C_2 en daaruit volgen weer ϕ_3, η_3 en C_3. Met elke volgende stap worden de vergelijkingen echter ingewikkelder. Gesteld dat we toch bereid zijn het rekenwerk te doen, kunnen we doorgaan tot we ook ϕ_n, η_n en C_n gevonden hebben. We hebben dan een benadering van n termen gevonden voor de potentiaalfunctie

$$\phi = \phi_0 + \epsilon\phi_1 + \dots + \epsilon^n\phi_n$$

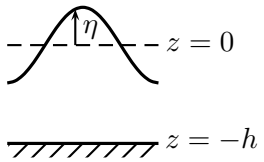
en soortgelijke benaderingen voor η en C. De bovenstaande machtreeks benadert ϕ goed als de nog niet bepaalde staart $\epsilon^{n+1}\phi_{n+1} + \epsilon^{n+2}\phi_{n+2} + \dots$ erg klein is. Hetzelfde geldt natuurlijk voor de verkregen benaderingen voor η en C.

We merken op dat we bij het verkrijgen van een Stokes benadering niet alle oplossingen voor ϕ_i, η_i en C_i zullen proberen te vinden. We zullen dus op sommige punten in de afleiding een keuze maken die een vergelijking makkelijker oplosbaar maakt, terwijl de keuze niet uit

een fysische redenering volgt. Bij Stokes benaderingen met veel termen nemen we zelfs van te voren een vorm aan voor ϕ.

Om een indruk te krijgen van het idee achter Stokes benaderingen leiden we eerst met pen en papier een tweede-orde Stokes benadering af. Later bespreken we hoe hogere-orde benaderingen verkregen kunnen worden.

4.1 De tweede-orde Stokes benadering



Figuur 4.1: Bij het afleiden van de Stokes benadering hanteren we deze definities van het assenstelsel en η

Voor het verkrijgen van een tweede-orde Stokes benadering nemen we aan dat de expansie-parameter

$$\epsilon = H/L$$

zo klein is dat we termen met factor ϵ^3 of hogere machten van ϵ kunnen verwaarlozen. We zullen eerst de vergelijkingen voor de tweede-orde Stokes benadering opstellen. Daarna zullen we deze oplossen en vervolgens bespreken we hoe nauwkeurig de tweede-orde Stokes benadering is.

4.1.1 De vergelijkingen opstellen

Voor het afleiden van een tweede-orde Stokes benadering gebruiken we het model waarbij het gemiddelde waterniveau op $z = 0$ ligt. Hierbij hoort het onderstaande stelsel vergelijkingen.

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0 \\ \phi_z &= 0 \quad \text{als} \quad z = -h \\ \eta_t &= \phi_z - \phi_x \eta_x \quad \text{als} \quad z = \eta \\ \phi_t + \frac{1}{2}\left(\phi_x^2 + \phi_z^2\right) + \frac{p_\alpha}{\rho} + g\eta &= C(t) \quad \text{als} \quad z = \eta \end{aligned} \tag{4.1}$$

Nu nemen we aan dat de onbekenden uit deze vergelijkingen kunnen worden geschreven als machtreeks van ϵ.

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 + \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2 + \dots \\ \eta &= \eta_0 + \epsilon\eta_1 + \epsilon^2\eta_2 + \dots \\ C &= C_0 + \epsilon C_1 + \epsilon^2 C_2 + \dots \end{aligned}$$

Hierin staan de puntjes voor termen met een factor ϵ^3 of een hogere macht van ϵ.

Bij golven van hoogte 0 is de parameter ϵ gelijk aan 0. In dat geval is de benadering voor de potentiaal ϕ en de verstoring van het wateroppervlak η dus precies de eerste term van de machtreeks.

$$\phi = \phi_0 \quad \text{en} \quad \eta = \eta_0 \quad \text{als} \quad H = 0 \tag{4.2}$$

Het is duidelijk dat η_0 gelijk moet zijn aan 0, anders zou een golf van hoogte 0 een hoogte $\eta_0 \neq 0$ hebben. Hoewel we later zullen zien dat dit niet altijd het geval is, nemen we voorlopig ook aan dat ϕ_0 gelijk is aan 0. We krijgen dan de volgende machtreeksen.

$$\begin{aligned} \phi &= \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2 + \dots \\ \eta &= \epsilon\eta_1 + \epsilon^2\eta_2 + \dots \\ C &= C_0 + \epsilon C_1 + \epsilon^2 C_2 + \dots \end{aligned}$$

Bij de lineaire golven vonden we naast de bovenstaande onbekenden nog een dispersierelatie die aangaf hoe de frequentie ω en het golfgetal k samenhangen. Als we aannemen dat deze grootheden altijd op een bepaalde manier met elkaar samenhangen, wordt ω (als functie van k) ook een onbekende van het probleem. Voor de frequentie ω stellen we dus ook een machtreeks op.

$$\omega = \omega_0 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + \dots$$

In het stelsel vergelijkingen (4.1) komt de frequentie ω niet expliciet voor. Om deze toch expliciet in de vergelijkingen op te nemen, stellen we net als bij de lineaire golven dat η een functie is van $\theta = kx - \omega t$ en ϕ een functie van θ en z. We kunnen nu het stelsel vergelijkingen (4.1) herschrijven tot

$$\begin{aligned} k^2\phi_{\theta\theta} + \phi_{zz} &= 0 \\ \phi_z &= 0 \quad \text{als} \quad z = -h \\ -\omega\eta_\theta &= \phi_z - k^2\phi_\theta\eta_\theta \quad \text{als} \quad z = \eta \\ -\omega\phi_\theta + \frac{1}{2}\left(k^2\phi_\theta^2 + \phi_z^2\right) + \frac{p_\alpha}{\rho} + g\eta &= C(t) \quad \text{als} \quad z = \eta\,. \end{aligned}$$

In deze vergelijkingen vullen we nu de zojuist genoemde machtreeksen in. De puntjes hieronder staan voor termen met machten van ϵ groter dan 2.

$$\begin{aligned} \epsilon k^2\phi_{1\theta\theta} + \epsilon^2 k^2\phi_{2\theta\theta} + \epsilon\phi_{1zz} + \epsilon^2\phi_{2zz} + \dots &= 0 \\ \epsilon\phi_{1z} + \epsilon^2\phi_{2z} + \dots &= 0 \quad \text{als} \quad z = -h \\ -\epsilon\omega_0\eta_{1\theta} - \epsilon^2\omega_0\eta_{2\theta} - \epsilon^2\omega_1\eta_{1\theta} + \dots &= \epsilon\phi_{1z} + \epsilon^2\phi_{2z} - \epsilon^2 k^2\phi_{1\theta}\eta_{1\theta} + \dots \quad \text{als} \quad z = \eta \\ -\epsilon\omega_0\phi_{1\theta} - \epsilon^2\omega_0\phi_{2\theta} - \epsilon^2\omega_1\phi_{1\theta} + \epsilon^2\frac{1}{2}k^2\phi_{1\theta}^2 + & \\ \epsilon^2\frac{1}{2}\phi_{1z}^2 + \frac{p_\alpha}{\rho} + \epsilon g\eta_1 + \epsilon^2 g\eta_2 + \dots &= C_0 + \epsilon C_1 + \epsilon^2 C_2 + \dots \quad \text{als} \quad z = \eta \end{aligned} \tag{4.3}$$

Deze vergelijkingen bijten zichzelf weer in de staart. De laatste twee vergelijkingen moeten gelden als $z = \eta$, terwijl η juist uit het stelsel moet worden bepaald. In het hoofdstuk over lineaire golven losten we dit probleem op door op een slimme manier van Taylorreeksen gebruik te maken. Hieronder hebben we het resultaat van deze analyse toegepast op een term uit de bovenstaande vergelijkingen.

$$\begin{aligned} \{\phi_{1\theta} \quad \text{als} \quad z = \eta\} &= \{\phi_{1\theta} + \eta\phi_{1\theta z} + \frac{1}{2}\eta^2\phi_{1\theta zz} + \dots \quad \text{als} \quad z = 0\} \\ &= \{\phi_{1\theta} + \epsilon\eta_1\phi_{1\theta z} + \epsilon^2\left(\eta_2\phi_{1\theta z} + \frac{1}{2}\eta_1^2\phi_{1\theta zz}\right) + \dots \quad \text{als} \quad z = 0\} \end{aligned}$$

Voor de termen uit het stelsel vergelijkingen (4.3) die afhankelijk zijn van z vullen we zo'n Taylorreeks in. Vervolgens sorteren we de machten van ϵ.

$$\begin{aligned}
\epsilon\left(k^2\phi_{1\theta\theta}+\phi_{1zz}\right)+\epsilon^2\left(k^2\phi_{2\theta\theta}+\phi_{2zz}\right)+\ldots&=0\\
\epsilon\phi_{1z}+\epsilon^2\phi_{2z}+\ldots&=0 \quad \text{als} \quad z=-h\\
\epsilon\left(-\omega_0\eta_{1\theta}\right)+\epsilon^2\left(-\omega_0\eta_{2\theta}-\omega_1\eta_{1\theta}\right)+\ldots&=\epsilon\left(\phi_{1z}\right)+\\
\epsilon^2\left(\eta_1\phi_{1zz}+\phi_{2z}-k^2\phi_{1\theta}\eta_{1\theta}\right)+\ldots&\quad \text{als} \quad z=0\\
\frac{p_\alpha}{\rho}+\epsilon\left(-\omega_0\phi_{1\theta}+g\eta_1\right)+\epsilon^2(-\omega_0\eta_1\phi_{1\theta z}-&\\
\omega_0\phi_{2\theta}-\omega_1\phi_{1\theta}+\frac{1}{2}k^2\phi_{1\theta}^2+\frac{1}{2}\phi_{1z}^2+g\eta_2)+\ldots&=C_0+\epsilon C_1+\epsilon^2C_2+\ldots \quad \text{als} \quad z=0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

We willen het bovenstaande stelsel vergelijkingen oplossen. Om te illustreren hoe we dit zullen aanpakken bekijken we eerst de eenvoudige vergelijking.

$$f_0+\epsilon f_1+\epsilon^2 f_2+\ldots=g_0+\epsilon g_1+\epsilon^2 g_2+\ldots$$

Hierin zijn f_i en g_i willekeurige functies die onafhankelijk zijn van ϵ. We willen dat de vergelijking geldt voor elke waarde van ϵ. Hieruit volgt dat de functies bij dezelfde macht van ϵ gelijk aan elkaar moeten zijn, dus

$$f_0=g_0\ , \quad f_1=g_1\ , \quad f_2=g_2\ , \quad \ldots \quad .$$

Volgens de constructie van ons probleem zijn de ϕ_i, η_i, C_i en ω_i onafhankelijk van ϵ. We kunnen het het stelsel (4.4) dus net zo oplossen als de bovenstaande vergelijkingen. We eisen dus dat de coëfficienten van ϵ^0, ϵ^1 en ϵ^2 aan elkaar gelijk zijn. De coëfficienten van ϵ^0 geven maar één nieuwe vergelijking.

$$\epsilon\ :\qquad \frac{p_\alpha}{\rho}=C_0 \tag{4.5}$$

De andere twee machten van ϵ leveren allebei vier vergelijkingen op.

$$\begin{aligned}
\epsilon\ :\qquad k^2\phi_{1\theta\theta}+\phi_{1zz}&=0\\
\phi_{1z}&=0 \quad \text{als} \quad z=-h\\
-\omega_0\eta_{1\theta}&=\phi_{1z} \quad \text{als} \quad z=0\\
-\omega_0\phi_{1\theta}+g\eta_1&=C_1 \quad \text{als} \quad z=0
\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon^2\ :\qquad k^2\phi_{2\theta\theta}+\phi_{2zz}&=0\\
\phi_{2z}&=0 \quad \text{als} \quad z=-h\\
-\omega_0\eta_{2\theta}-\omega_1\eta_{1\theta}&=\eta_1\phi_{1zz}+\phi_{2z}-k^2\phi_{1\theta}\eta_{1\theta} \quad \text{als} \quad z=0\\
-\omega_0\eta_1\phi_{1\theta z}-\omega_0\phi_{2\theta}-\omega_1\phi_{1\theta}+\frac{1}{2}k^2\phi_{1\theta}^2+\frac{1}{2}\phi_{1z}^2+g\eta_2&=C_2 \quad \text{als} \quad z=0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Om de tweede-orde vergelijkingen (4.4) op te lossen, moeten we dus eigenlijk de vergelijkingen (4.5), (4.6) en (4.7) oplossen. We noemen (4.6) de eerste-orde vergelijkingen en (4.7) de tweede-orde vergelijkingen.

Voordat we de bovenstaande vergelijkingen oplossen maken we eerst nog enkele opmerkingen over het voorgaande.

1. Merk op dat we uit de eerste van deze vergelijkingen alleen C_0 kunnen oplossen. Uit de eerste-orde vergelijkingen verwachten we ϕ_1, η_1, C_1 en ω_1 te kunnen oplossen. Gegeven deze functies kunnen we uit de tweede-orde vergelijkingen waarschijnlijk ϕ_2, η_2, C_2 en ω_2 bepalen. Het is onmogelijk om de vergelijkingen in een andere volgorde op te lossen. We moeten de vergelijkingen daarom van lage orde naar hoge orde oplossen.

2. Het opstellen van de vergelijkingen voor een tweede-orde Stokes benadering bestaat uit erg veel vervelend rekenwerk. Het is te verwachten dat het opstellen van de vergelijkingen voor een derde- of vijfde-orde Stokes benadering nog veel vervelender is.

3. Het is nu eenvoudig in te zien wat de vergelijkingen van een eerste-orde Stokes benadering zijn. Bij een eerste-orde benadering verwaarlozen we namelijk ook termen met ϵ^2 erin. In dat geval mogen we de tweede-orde vergelijkingen bij (4.7) negeren.

4.1.2 De vergelijkingen oplossen

We zullen nu de zojuist opgestelde vergelijkingen (4.5), (4.6) en (4.7) oplossen. Zoals gezegd zullen we niet alle oplossingen van de vergelijkingen zoeken. We zullen wel aangeven welke aannames gedaan worden.

Hierboven zagen we dat de vergelijkingen alleen van lage naar hoge orde kunnen worden opgelost. We lossen daarom eerst vergelijking (4.5) op, daarna de eerste-orde vergelijkingen (4.6) en pas daarna de tweede-orde vergelijkingen (4.7). De oplossingen die we vinden bepalen de tweede-orde Stokes benadering. We bespreken daarom eerst wat we van deze benadering verwachten.

1. De benadering van zowel ϕ als η moet een golflengte L in de x-richting hebben. Dit betekent dus dat de benaderingen

$$\begin{aligned} \phi &= \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2 \\ \eta &= \epsilon\eta_1 + \epsilon^2\eta_2 \end{aligned}$$

   beide een golflengte L moeten hebben. In principe is hieraan voldaan als we zorgen dat één van de termen een golflengte L heeft en de andere term een golflengte L/n waarbij n een geheel getal is. Bij een Stokes benadering is het gebruikelijk om de golflengte van ϕ_1 en η_1 gelijk te stellen aan L.

2. De verticale afstand tussen de top en het dal van de tweede-orde Stokes benadering moet gelijk zijn aan de golfhoogte H.

$$H = \max\eta - \min\eta = \max\left(\epsilon\eta_1 + \epsilon^2\eta_2\right) - \min\left(\epsilon\eta_1 + \epsilon^2\eta_2\right)$$

   Om aan deze eis te kunnen voldoen moet zowel η_1 als η_2 bekend zijn. Tijdens het oplossen zullen we daarom de amplitude van η_1 gelijkstellen aan een een nog onbepaalde constante a. Zodra we ook η_2 bepaald hebben kiezen we a zodanig dat aan de bovenstaande eis wordt voldaan.

3. Per definitie ligt het gemiddelde waterniveau op $z = 0$. Dit betekent dat op elk moment precies evenveel water boven- als onder de lijn $z = 0$ moet zijn. We willen dat dit ook geldt voor onze tweede-orde Stokes benadering.

$$\int_0^L \eta\,\mathrm{d}x = \epsilon\int_0^L \eta_1\,\mathrm{d}x + \epsilon^2\int_0^L \eta_2\,\mathrm{d}x = 0$$

De bovenstaande vergelijking moet gelden voor elke waarde van ϵ. Dit geeft ons een eis voor elke term uit de benadering.

$$\int_0^L \eta_1 \, \mathrm{d}x = 0 \ , \quad \text{en} \quad \int_0^L \eta_2 \, \mathrm{d}x = 0 \tag{4.8}$$

4. Bij de introductie van het hydrodynamische model spraken we af dat de functie C uit de dynamische oppervlakte-conditie alleen afhankelijk is van de tijd t. We nemen aan dat de termen uit de Stokes-benadering voor C alleen afhankelijk zijn van de tijd.

$$C_0 = C_0(t) \ , \quad C_1 = C_1(t) \quad \text{en} \quad C_2 = C_2(t)$$

Nu zullen we de hierboven verkregen vergelijkingen oplossen van lage naar hoge orde. Voor de termen met factor $\epsilon^0 = 1$ hebben we één **nulde-orde vergelijking** (4.5) gevonden die moet gelden op $z = 0$. Hierboven bespraken we dat de constante C_0 alleen afhankelijk is van de tijd t en niet van de plaats. De vergelijking (4.5) geeft daarom de waarde van C_0 voor elke waarde van z.

$$C_0 = \frac{p_\alpha}{\rho}$$

Merk op dat de atmosferische druk p_α niet voorkomt in de hogere-orde vergelijkingen. De waarde van p_α heeft dus alleen invloed op de benadering van C en niet op de benaderingen voor ϕ en η.

Nu kijken we naar de **eerste-orde vergelijkingen**.

$$\begin{aligned} k^2\phi_{1\theta\theta} + \phi_{1zz} &= 0 \\ \phi_{1z} &= 0 \quad \text{als} \quad z = -h \\ -\omega_0\eta_{1\theta} &= \phi_{1z} \quad \text{als} \quad z = 0 \\ -\omega_0\phi_{1\theta} + g\eta_1 &= C_1 \quad \text{als} \quad z = 0 \end{aligned}$$

Dit stelsel vergelijkingen kan op precies dezelfde manier worden opgelost als het stelsel gelineariseerde vergelijkingen uit het vorige hoofdstuk. We zullen het oplossen daarom niet helemaal uitwerken. We vermelden wel het resultaat.

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{ag}{2\omega_0}\frac{\cosh(k(z+h))}{\cosh(kh)}\sin(\theta) & C_1 &= 0 \\ \eta_1 &= \frac{a}{2}\cos(\theta) & \omega_0^2 &= gk\tanh(kh) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Hierin is a een nog onbepaalde constante die ervoor zorgt dat de tweede-orde benadering voor η uiteindelijk een hoogte H heeft. Merk op dat dit precies de oplossingen zijn van de gelineariseerde vergelijkingen, waarbij H vervangen is door a. Deze eerste-orde oplossingen voldoen aan de hierboven opgesomde verwachtingen; ϕ_1 en η_1 zijn periodiek in de x-richting met periode L en op elk moment ligt het gemiddelde waterniveau precies op $z = 0$.

Omdat we de eerste-orde oplossingen gevonden hebben kunnen we nu de **tweede-orde vergelijkingen** oplossen.

$$\begin{aligned} k^2\phi_{2\theta\theta} + \phi_{2zz} &= 0 \\ \phi_{2z} &= 0 \quad \text{als} \quad z = -h \\ -\omega_0\eta_{2\theta} - \omega_1\eta_{1\theta} &= \eta_1\phi_{1zz} + \phi_{2z} - k^2\phi_{1\theta}\eta_{1\theta} \quad \text{als} \quad z = 0 \\ -\omega_0\eta_1\phi_{1\theta z} - \omega_0\phi_{2\theta} - \omega_1\phi_{1\theta} + \frac{1}{2}k^2\phi_{1\theta}^2 + \frac{1}{2}\phi_{1z}^2 + g\eta_2 &= C_2 \quad \text{als} \quad z = 0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Bij de gelineariseerde- en de eerste-orde vergelijkingen begonnen we met het vinden van een oplossing voor de bovenste twee van de vergelijkingen. Bij de tweede-orde vergelijkingen is het beter om eerst te onderzoeken wat voor invloed de eerste-orde oplossingen ϕ_1 en η_1 op de tweede-orde oplossingen hebben. Hiertoe differentiëren we de vierde vergelijking van (4.10) naar θ. Vervolgens gebruiken we de derde vergelijking om $\eta_{2\theta}$ te elimineren. Het resultaat is een vergelijking waarin de onbekende η_2 niet voorkomt.

$$\begin{aligned} g\phi_{2z} + \omega_0^2\phi_{2\theta\theta} + \omega_0 C_{2\theta} &= -\omega_0^2\eta_{1\theta}\phi_{1\theta z} - \omega_0^2\eta_1\phi_{1\theta\theta z} - \omega_0\omega_1\phi_{1\theta\theta} + \frac{\omega_0}{2}\left(k^2\phi_{1\theta}^2 + \phi_{1z}^2\right)_\theta \\ &\quad -g\omega_1\eta_{1\theta} - g\eta_1\phi_{1zz} + gk^2\phi_{1\theta}\eta_{1\theta} \quad \text{als} \quad z = 0 \end{aligned}$$

Met behulp van de eerste-orde vergelijkingen kunnen we het deel rechts van het gelijkteken compacter opschrijven. Hieronder staat het resultaat.

$$g\phi_{2z} + \omega_0^2\phi_{2\theta\theta} + \omega_0 C_{2\theta} = \omega_0\left(k^2\phi_{1\theta}^2 + \phi_{1z}^2\right)_\theta - \eta_1\left(\omega_0^2\phi_{1\theta\theta z} + g\phi_{1zz}\right) - 2\omega_0\omega_1\phi_{1\theta\theta} \quad \text{als} \quad z = 0 \quad (4.11)$$

We kunnen in deze vergelijking onze eerste-orde oplossingen invullen. In de literatuur is het gebruikelijk ϕ_1 hierbij op te schrijven als

$$\phi_1 = \frac{ac_0}{2}\frac{\cosh(k(z+h))}{\sinh(kh)}\sin(\theta) \quad \text{waarbij} \quad c_0 = \frac{w_0}{k}\,.$$

We vullen de eerste-orde oplossingen in, in vergelijking (4.11) en herschrijven (met grote moeite) het resultaat tot

$$g\phi_{2z} + \omega_0^2\phi_{2\theta\theta} + \omega_0 C_{2\theta} = -\frac{3}{4}c_0 g(ak)^2\frac{\sin(2\theta)}{\sinh(2kh)} + \omega_1 ag\sin(\theta) \quad \text{als} \quad z = 0\,.$$

Hoewel we hier geen fysische reden voor hebben, maken we het ons gemakkelijk door aan te nemen dat ω_1 gelijk is aan 0.

$$\omega_1 = 0$$

Hierdoor wordt de bovenstaande vergelijking

$$g\phi_{2z} + \omega_0^2\phi_{2\theta\theta} + \omega_0 C_{2\theta} = -\frac{3}{4}c_0 g(ak)^2\frac{\sin(2\theta)}{\sinh(2kh)} \quad \text{als} \quad z = 0\,. \tag{4.12}$$

We zien nu dat als $\omega_1 = 0$, dan hebben de afgeleides van de functie ϕ_2 op de lijn $z = 0$ waarschijnlijk een factor $\sin(2\theta)$. Dit wekt de indruk dat er een oplossing ϕ_2 bestaat die zelf een factor $\sin(2\theta)$ of $\cos(2\theta)$ heeft. We zullen zien dat zo'n oplossing inderdaad bestaat.

We hebben hierboven uit de onderste twee tweede-orde vergelijkingen de belangrijke vergelijking (4.12) afgeleid. Met het bovenstaande in het achterhoofd bekijken we nu de bovenste twee tweede-orde vergelijkingen.

$$\begin{aligned} k^2\phi_{2\theta\theta} + \phi_{2zz} &= 0 \\ \phi_{2z} &= 0 \quad \text{als} \quad z = -h \end{aligned}$$

We kunnen deze vergelijkingen oplossen door een bepaalde vorm voor ϕ_2 aan te nemen. Geïnspireerd door het oplossen van de gelineariseerde vergelijkingen op pagina 13 en de opmerkingen voor de oplossing (3.22) nemen we aan dat we ϕ_2 kunnen schrijven als

$$\phi_2 = f(\theta)Z(z) + Kx$$

waarin K een constante is. Net zoals bij het gelineariseerde geval zorgt de term Kx ervoor dat het water met een uniforme snelheid opzij stroomt.

Merk op dat de twee eerste tweede-orde vergelijkingen precies dezelfde zijn als de twee eerste gelineariseerde vergelijkingen (3.6). Door precies dezelfde denkstappen te zetten als in het gelineariseerde geval vinden we de volgende uitdrukking voor f.[1]

$$f(\theta) = A_1 \cos\left(\frac{\lambda}{k}\theta\right) + A_2 \sin\left(\frac{\lambda}{k}\theta\right)$$

Voor de functie Z vinden we net als in het gelineariseerde geval de volgende uitdrukking.

$$Z(z) = B_4 \frac{\cosh(\lambda(z+h))}{\cosh(\lambda h)}$$

De functie $\phi_2 = fZ$ is dus een oplossing van de bovenste twee tweede-orde vergelijkingen.

$$\phi_2 = A_1 B_4 \frac{\cosh(\lambda(z+h))}{\cosh(\lambda h)} \cos\left(\frac{\lambda}{k}\theta\right) + A_2 B_4 \frac{\cosh(\lambda(z+h))}{\cosh(\lambda h)} \sin\left(\frac{\lambda}{k}\theta\right)$$

Om de waardes van A_1B_4, A_2B_4 en λ te bepalen vullen we deze vorm voor ϕ_2 in, in de hiervoor verkregen vergelijking (4.12). Na herschrijving vinden we de volgende vergelijking.

$$\begin{aligned} A_1B_4 \left[g\lambda \tanh(\lambda h) - \omega_0^2 \frac{\lambda^2}{k^2}\right] \cos\left(\frac{\lambda}{k}\theta\right) + \\ A_2B_4 \left[g\lambda \tanh(\lambda h) - \omega_0^2 \frac{\lambda^2}{k^2}\right] \sin\left(\frac{\lambda}{k}\theta\right) + \omega_0 C_{2\theta} \quad = \quad -\frac{3}{4} c_0 g (ak)^2 \frac{\sin(2\theta)}{\sinh(2kh)} \end{aligned} \tag{4.13}$$

Om deze vergelijking op te lossen stellen we eerst dat

$$A_1B_4 = 0 \quad \text{en} \quad \lambda = 2k.$$

De vergelijking (4.13) wordt dan eenvoudiger.

$$A_2B_4 \left(2gk \tanh(2kh) - 4\omega_0^2\right) \sin(2\theta) + \omega_0 C_{2\theta} = -\frac{3}{4} c_0 g (ak)^2 \frac{\sin(2\theta)}{\sinh(2kh)} \tag{4.14}$$

Omdat C_2 alleen afhankelijk is van de tijd, kan de term $\omega_0 C_{2\theta}$ geen factor $\sin(2\theta)$ hebben. Uit de vergelijking volgt dat $C_{2\theta}$ dan gelijk moet zijn aan 0. Omdat

$$C_{2\theta} = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right) C_{2x} + \left(\frac{\partial t}{\partial \theta}\right) C_{2t} = \left(\frac{1}{k}\right) \cdot 0 - \left(\frac{1}{\omega}\right) C_{2t} = -\frac{1}{\omega} C_{2t}$$

volgt uit $C_{2\theta} = 0$ dus dat C_{2t} gelijk moet zijn aan 0. De waarde van C_2 is dus niet alleen constant zijn ten opzichte van de plaats, maar ook ten opzichte van de tijd.

Met behulp van $C_{2\theta} = 0$ kunnen we de vergelijking (4.14) weer een beetje vereenvoudigen.

$$A_2B_4 \left(2gk \tanh(2kh) - 4gk \tanh(kh)\right) = -\frac{3}{4} c_0 g (ak)^2 \frac{1}{\sinh(2kh)}$$

[1] In het gelineariseerde geval werd deze uitdrukking nog verder herschreven. Dit is hier niet de moeite waard omdat we de oorsprong in de horizontale richting niet meer vrij kunnen kiezen. Hierdoor is de fase δ niet per se gelijk aan 0, zoals op pagina 14.

Deze vergelijking kunnen we oplossen voor A_2B_4. Na veel rekenwerk kunnen we het resultaat redelijk compact opschrijven.

$$A_2B_4 = \frac{3}{32}c_0ka^2\frac{\cosh(2kh)}{\sinh^4(kh)}$$

Met deze waarde voor A_2B_4 wordt onze oplossing voor ϕ_2

$$\phi_2 = \frac{3}{32}c_0ka^2\frac{\cosh(2k(z+h))}{\sinh^4(kh)}\sin(2\theta) + Kx$$

Deze oplossing voor ϕ_2 samen met de aanname dat ω_1 gelijk is aan 0 is het eerste belangrijke resultaat van het oplossen van de tweede-orde vergelijkingen. Tijdens onze berekeningen vonden we dat C_2 constant moet zijn ten opzichte van de plaats en de tijd.

We hoeven nu alleen nog de onbekenden C_2 en η_2 te bepalen. Hiertoe herschrijven we de laatste tweede-orde vergelijking uit (4.10) tot

$$\eta_2 = \frac{1}{g}C_2 + \frac{\omega_0}{g}\eta_1\phi_{1\theta z} + \frac{\omega_0}{g}\phi_{2\theta} + \frac{\omega_1}{g}\phi_{1\theta} - \frac{1}{2g}\left(k^2\phi_{1\theta}^2 + \phi_{1z}^2\right) \quad \text{als} \quad z = 0$$

Alle termen rechts van het gelijkteken, behalve C_2, hebben we hierboven al gevonden. Als we deze invullen en het resultaat herschrijven vinden we een uitdrukking voor η_2.

$$\eta_2 = \frac{1}{g}C_2 + \frac{ka^2}{8}\left(\frac{3+2\sinh^2(kh)}{2\sinh^2(kh)}\frac{\cos(2\theta)}{\tanh(kh)} - \frac{1}{\sinh(2kh)}\right) \tag{4.15}$$

In het begin van deze paragraaf hebben we bij (4.8) opgemerkt dat de integraal $\int_0^L \eta_2\,\mathrm{d}x$ gelijk moet zijn aan 0, zodat het gemiddelde waterniveau op $z = 0$ ligt. Voor de zojuist bepaalde uitdrukking voor η_2 is de waarde van deze integraal

$$\int_0^L \eta_2\,\mathrm{d}x = L\frac{1}{g}C_2 - L\frac{ka^2}{8}\frac{1}{\sinh(2kh)}\ .$$

We kiezen C_2 nu zo, dat de bovenstaande integraal gelijk wordt aan 0.

$$C_2 = \frac{gka^2}{8\sinh(2kh)}.$$

Onze oplossing voor η_2 uit (4.15) bestaat voor deze C_2 alleen nog uit een oscillerende term.

$$\eta_2 = \frac{ka^2}{8}\frac{3+2\sinh^2(kh)}{2\sinh^2(kh)}\frac{\cos(2\theta)}{\tanh(kh)} \tag{4.16}$$

We hebben nu oplossingen voor alle onbekenden uit de tweede-orde vergelijkingen.

We zouden op dit moment de door ons gevonden oplossingen kunnen invullen in de machtreeksen uit de vorige paragraaf. We merkten echter in het begin van deze paragraaf al op dat in onze oplossingen nog de onbekende constante a voorkomt. We zullen daarom eerst de waarde van deze constante bepalen.

De constante a moet zo gekozen worden, dat de hoogte van onze tweede-orde Stokes benadering van η precies gelijk is aan H. De benadering voor η wordt verkregen door de gevonden η_1 (4.9) en η_2 (4.16) in te vullen in de machtreeks voor η.

$$\eta = \epsilon\eta_1 + \epsilon^2\eta_2 = \frac{Ha}{2L}\cos(\theta) + \frac{H^2ka^2}{8L^2}\frac{3+2\sinh^2(kh)}{2\sinh^2(kh)}\frac{\cos(2\theta)}{\tanh(kh)}$$

De hoogte van de golf H moet gelijk zijn aan de verticale afstand tussen de top en het dal van de bovenstaande benadering voor η.

$$H = \max \eta - \min \eta = \eta|_{\theta=0} - \eta|_{\theta=\pi} = 2\frac{Ha}{2L}$$

Hieruit volgt dat a gelijk is aan de lengte van de golf L.

$$a = L$$

We vullen deze waarde van a nu in, in al onze oplossingen. Vervolgens stellen we de gevonden machtreeksen op. De machtreeks voor ϕ wordt bijvoorbeeld

$$\begin{aligned}
\phi &= \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2 \\
&= \frac{Hc_0}{2}\frac{\cosh(k(z+h))}{\sinh(kh)}\sin(\theta) + \frac{3}{32}H^2kc_0\frac{\cosh(2k(z+h))}{\sinh^4(kh)}\sin(2\theta) + \frac{H^2K}{L^2}x \\
&= \frac{Hc_0}{2}\frac{\cosh(k(z+h))}{\sinh(kh)}\sin(\theta) + \frac{3}{32}H^2kc_0\frac{\cosh(2k(z+h))}{\sinh^4(kh)}\sin(2\theta) + Mx \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

waarin we M schrijven voor de constante H^2K/L^2. De machtreeksen voor η, C en ω staan hieronder.

$$\eta = \epsilon\eta_1 + \epsilon^2\eta_2 = \frac{H}{2}\cos(\theta) + \frac{H^2k}{8}\frac{3+2\sinh^2(kh)}{2\sinh^2(kh)}\frac{\cos(2\theta)}{\tanh(kh)}$$

$$C = C_0 + \epsilon C_1 + \epsilon^2 C_2 = \frac{p_\alpha}{\rho} + \frac{H^2kg}{8\sinh(2kh)}$$

$$\omega = \omega_0 + \epsilon\omega_1 = \sqrt{gk\tanh(kh)}$$

Deze bovenstaande machtreeksen vormen samen de tweede-orde Stokes benadering.

4.1.3 De volumeflux van het water en de waarde van M

De tweede-orde Stokes benadering voor de potentiaal (4.17) bevat een term Mx, waarbij M nog willekeurig gekozen mag worden. In deze paragraaf laten we zien dat M eigenlijk door de fysica bepaald wordt. Hiertoe zullen we aantonen dat de term Mx iets te maken heeft met de gemiddelde horizontale volumeflux van het water.

We analyseren eerst de horizontale volumeflux van het water onder een geïdealiseerde golf. Hierbij gebruiken we dezelfde terminologie als bij het afleiden van de tweede-orde Stokes benadering. De bodem van het water ligt dus op $z = -h$ en het gemiddelde waterniveau op $z = 0$. De verstoring van het wateroppervlak wordt gegeven door $z = \eta$ en voor $-h \leq z \leq \eta$ geeft u de horizontale component van de stroomsnelheid. We definiëren

$$\eta_{\text{dal}} \equiv \min \eta$$

als de hoogte waaronder altijd water is. Merk op dat u voor $z \leq \eta_{\text{dal}}$ altijd goed gedefinieerd is. Voor $z > \eta_{\text{dal}}$ is u alleen gedefinieerd onder het wateroppervlak, dus voor $z \leq \eta$.

In het vervolg geven we het tijdsgemiddelde van een functie f over een hele periode aan met $\overline{f}$.

$$\overline{f} = \frac{1}{T}\int_0^T f \,\mathrm{d}t$$

De gemiddelde horizontale volumeflux $\overline{Q}$ van het water wordt nu gegeven als het tijdsgemiddelde van de horizontale volumeflux.

$$\overline{Q} = \overline{\int_{-h}^{\eta} u \, \mathrm{d}z} = \frac{1}{T} \int_0^T \int_{-h}^{\eta} u \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}t \tag{4.18}$$

We splitsen de integrand u op in een uniform deel U en een oscillerend deel u_ω. Deze splitsing blijkt later precies toepasbaar op onze tweede-orde Stokes benadering voor u.

We definiëren het uniforme deel van u als de gemiddelde horizontale component van de stroomsnelheid op plekken waar altijd water is.

$$U \equiv \frac{1}{T} \int_0^T u \, \mathrm{d}t \quad \text{voor} \quad z \leq \eta_{\mathrm{dal}} \tag{4.19}$$

We nemen aan dat U onafhankelijk is van z. Omdat we u willen opsplitsen, moeten we het oscillerende deel van de horizontale stroomsnelheid u_ω nu definiëren als het verschil van de stroomsnelheid u en de uniforme stroomsnelheid U.

$$u_\omega \equiv u - U \tag{4.20}$$

Merk op dat per definitie $u = U + u_\omega$ geldt. Uit de definitie van U en u_ω volgt ook dat de gemiddelde waarde van u_ω gelijk aan nul is voor $z \leq \eta_{\mathrm{dal}}$.

$$\overline{u_\omega} = \frac{1}{T} \int_0^T u_\omega \, \mathrm{d}t = 0 \quad \text{voor} \quad z \leq \eta_{\mathrm{dal}} \tag{4.21}$$

We herschrijven nu de gemiddelde horizontale volumeflux van het water (4.18) met behulp van de zojuist gedefinieerde opsplitsing.

$$\overline{Q} = \overline{\int_{-h}^{\eta_{\mathrm{dal}}} u_\omega \, \mathrm{d}z} + \overline{\int_{\eta_{\mathrm{dal}}}^{\eta} u_\omega \, \mathrm{d}z} + \overline{\int_{-h}^{\eta} U \, \mathrm{d}z}$$

Omdat η_{dal} en h constant zijn ten opzichte van de tijd, mogen we bij de eerste integraal de integratievolgorde omwisselen. Omdat we hebben aangenomen dat U onafhankelijk is van z, kan de derde integraal heel eenvoudig berekend worden. Het resultaat is de volgende belangrijke vergelijking.

$$\overline{Q} = \overline{\int_{\eta_{\mathrm{dal}}}^{\eta} u_\omega \, \mathrm{d}z} + U(h + \overline{\eta}) \tag{4.22}$$

Om de bovenstaande integraal nog compacter op te kunnen schrijven wordt in de literatuur vaak de grootheid Q_ω gebruikt.[2]

$$Q_\omega \equiv \overline{\int_{\eta_{\mathrm{dal}}}^{\eta} u_\omega \, \mathrm{d}z}$$

Nu kunnen we de gemiddelde horizontale volumeflux van het water schrijven als

$$\overline{Q} = Q_\omega + U(h + \overline{\eta}) \, .$$

Zoals we hiervoor al vermeld hebben, is de bovenstaande opsplitsing van de horizontale stroomsnelheid u precies toepasbaar op de tweede-orde Stokes benadering voor u. De resultaten van de bovenstaande analyse kunnen we dus ook op deze tweede-orde Stokes benadering

[2] Een logischere benaming zou $\overline{Q_\omega}$ zijn, maar in de literatuur gebruikt men Q_ω.

toepassen. In het bijzonder zullen we gebruikmaken van de vergelijking (4.22) voor $\overline{Q}$. Omdat u een tweede-orde benadering is, verwachten we dat we $\overline{Q}$ in het beste geval tot op de tweede orde nauwkeurig kunnen bepalen.

De tweede-orde benadering voor de horizontale component van de stroomsnelheid wordt gegeven door $u = \phi_x$.

$$u = \frac{Hc_0k}{2}\frac{\cosh(k(z+h))}{\sinh(kh)}\cos(\theta) + \frac{3}{16}H^2k^2c_0\frac{\cosh(2k(z+h))}{\sinh^4(kh)}\cos(2\theta) + M$$

We splitsen deze benadering op in een tweede-orde benadering voor U en een tweede-orde benadering voor u_ω. Het is het makkelijkst om eerst uit (4.19) de benadering voor U te bepalen. Omdat de eerste twee termen uit de benadering voor u oscilleren met periode T, blijft na integratie alleen de term M over.

$$U = \frac{1}{T}\int_0^T u\,\mathrm{d}t = M$$

Met behulp van (4.20) volgt hieruit de tweede-orde benadering van u_ω.

$$u_\omega = u - M = \frac{Hc_0k}{2}\frac{\cosh(k(z+h))}{\sinh(kh)}\cos(\theta) + \frac{3}{16}H^2k^2c_0\frac{\cosh(2k(z+h))}{\sinh^4(kh)}\cos(2\theta) \tag{4.23}$$

Met tweede-orde benaderingen voor U en u_ω proberen we nu een tweede-orde benadering voor $\overline{Q}$ op te stellen. De tweede-orde Stokes benadering voor η bevat alleen oscillerende termen. Daarom geldt dat $\overline{\eta}$ gelijk is aan 0. Door alle zojuist bepaalde tweede-orde benaderingen in te vullen in vergelijking (4.22) vinden we een tweede-orde benadering voor gemiddelde horizontale volumeflux $\overline{Q}$.

$$\overline{Q} = \overline{\int_{\eta_{\mathrm{dal}}}^{\eta} u_\omega\,\mathrm{d}z} + Mh \tag{4.24}$$

Hierin is $\overline{Q}$ nauwkeurig tot op de tweede orde en u_ω is de tweede-orde benadering uit (4.23). We zullen nu deze integraal berekenen. Om goed bij te kunnen houden welke termen we niet in de tweede-orde benadering voor $\overline{Q}$ hoeven op te nemen, vullen we voor η de machtreeks $\epsilon\eta_1 + \epsilon^2\eta_2$ in. De ondergrens η_{dal} is natuurlijk $-H/2$. Dit schrijven we als $\eta_{\mathrm{dal}} = \epsilon(-L/2)$.

$$\overline{Q} = \overline{\int_{\epsilon(-L/2)}^{\epsilon\eta_1+\epsilon^2\eta_2} u_\omega\,\mathrm{d}z} + Mh$$

De term u_ω schrijven we op als $\epsilon\phi_{1x} + \epsilon^2\phi'_{2x}$ waarin we ϕ'_{2x} definiëren als ϕ_{2x} zonder de uniforme term K.

$$\overline{Q} = \overline{\int_{\epsilon(-L/2)}^{\epsilon\eta_1+\epsilon^2\eta_2} \epsilon\phi_{1x} + \epsilon^2\phi'_{2x}\,\mathrm{d}z} + Mh \tag{4.25}$$

Om deze integratie te kunnen uitvoeren, schrijven we de integrand als Taylorreeks.

$$\epsilon\phi_{1x} + \epsilon^2\phi'_{2x} = \left(\epsilon\phi_{1x} + \epsilon^2\phi'_{2x}\right)_{z=0} + z\left(\epsilon\phi_{1xz} + \epsilon^2\phi'_{2xz}\right)_{z=0} + \dots$$

Als we dit integreren naar z en de gegeven grenzen invullen kunnen we goed in de gaten houden welke termen in een tweede-orde benadering mogen worden weggelaten.

$$\left[z\left(\epsilon\phi_{1x} + \epsilon^2\phi'_{2x}\right)_{z=0} + \frac{1}{2}z^2\left(\epsilon\phi_{1xz} + \epsilon^2\phi'_{2xz}\right)_{z=0} + \dots\right]_{z=\epsilon(-L/2)}^{\epsilon\eta_1+\epsilon^2\eta_2} \tag{4.26}$$

Door dit uit te werken kunnen we de integraal uit (4.25) tot op de tweede orde nauwkeurig benaderen.

$$\int_{\epsilon(-L/2)}^{\epsilon\eta_1+\epsilon^2\eta_2} \epsilon\phi_{1x} + \epsilon^2\phi'_{2x}\,\mathrm{d}z = \epsilon^2\left(\phi_{1x}\eta_1 + \frac{L}{2}\phi_{1x}\right)$$

Als we dit resultaat invullen in (4.25) krijgen we de tweede-orde benadering voor $\overline{Q}$.

$$\overline{Q} = \overline{\epsilon^2\left(\phi_{1x}\eta_1 + \frac{L}{2}\phi_{1x}\right)_{z=0}} + Mh$$

Hierin vullen we ϕ_{1x} en η_1 uit (4.9) in.

$$\overline{Q} = \overline{\frac{H^2gk}{4\omega_0}\cos^2(\theta) + \frac{H^2gk}{4\omega_0}\cos(\theta)} + Mh$$

Door hierin het tijdsgemiddelde uit te werken vinden we een vergelijking die tot op de tweede orde nauwkeurig zegt hoe de waarde van M en de volumeflux $\overline{Q}$ samenhangen.

$$\overline{Q} = \frac{H^2g}{8c_0} + Mh \qquad \text{(tweede orde nauwkeurigheid)} \tag{4.27}$$

Deze vergelijking is het belangrijkste resultaat van deze paragraaf. We kunnen hiermee de waarde van M bepalen als de volumeflux van de stroming $\overline{Q}$ wordt gegeven. Merk op dat de volumeflux niet 0 is als we M gelijkstellen aan 0.

In de paragraaf over tweede-orde Stokes benaderingen in de praktijk zullen we bespreken wat de gangbare keuzes voor $\overline{Q}$ zijn.

4.1.4 De orde van een Stokes benadering

We hebben de volgende tweede-orde Stokes benadering voor de frequentie ω gevonden.

$$\omega = \omega_0 + \epsilon\omega_1 = \sqrt{gk\tanh(kh)} + \epsilon 0 \tag{4.28}$$

Merk op dat deze machtreeks geen term met factor ϵ^2 bevat. Het lijkt hierdoor op het eerste gezicht raar om deze benadering toch een tweede-orde benadering te noemen. Om deze onduidelijkheid weg te nemen bespreken we kort wat we bedoelen als we zeggen dat een Stokes benadering orde twee heeft.

Bij het opstellen van de tweede-orde Stokes benadering mogen we bij het opstellen van de vergelijkingen de termen met hogere machten van ϵ dan ϵ^2 negeren. In deze vergelijkingen kwam ω_2 niet meer voor. Hierdoor komt hij ook niet voor in onze uiteindelijke benadering voor de frequentie ω. Dat de benaderingen uit de vorige paragrafen orde twee hebben betekent dus niet dat de benaderingen zelf machtreeksen zijn van orde twee. Het betekent wel dat ze de oorspronkelijke vergelijkingen tot en met de tweede macht van ϵ nauwkeurig oplossen.

4.1.5 De nauwkeurigheid van de benadering

Zoals we hierboven hebben besproken is de essentie van een tweede-orde Stokes benadering dat we vergelijkingen oplossen die de oorspronkelijke vergelijkingen tot en met termen met een factor ϵ^2 nauwkeurig benaderen. We hebben dus in onze berekeningen de termen met ϵ^3 genegeerd. Het is niet duidelijk hoe groot deze termen precies waren. Als we dit al zouden

weten, dan nog is het onduidelijk hoe goed de oplossingen van deze benaderde vergelijkingen de oplossingen van de oorspronkelijke vergelijking benaderen. Het lijkt dus onmogelijk om vanuit de constructie van een Stokes benadering na te gaan hoe nauwkeurig deze precies is. Toch is het mogelijk om twee criteria af te leiden voor de bruikbaarheid van de tweede-orde Stokes benadering.

Om het eerste criterium af te leiden nemen we aan dat een oneindig lange Stokes benadering de vergelijkingen van het model oplost. Hieronder staat bijvoorbeeld de oneindig lange Stokes benadering voor de potentiaalfunctie ϕ.

$$\phi = \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2 + \epsilon^3\phi_3 + \epsilon^4\phi_4 + \dots \tag{4.29}$$

Onze tweede-orde Stokes benadering voor ϕ is dan nauwkeurig als hij ongeveer gelijk is aan deze oneindig lange Stokes benadering.

$$\epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2 \approx \phi = \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2 + \epsilon^3\phi_3 + \epsilon^4\phi_4 + \dots$$

Dit is het geval als de staart van de oneindige reeks veel kleiner is dan de eerste twee termen.

$$\epsilon^3\phi_3 + \epsilon^4\phi_4 + \epsilon^5\phi_5 + \dots \ll \epsilon\phi_1 + \epsilon^2\phi_2 \tag{4.30}$$

We zitten nu echter weer met het probleem dat we niet weten hoe groot de termen uit de staart precies zijn. In de literatuur is het bij een tweede-orde Stokes benadering gebruikelijk om in ieder geval te controleren of de tweede term uit de machtreeks kleiner is dan de eerste.

$$\epsilon^2\phi_2 \ll \epsilon\phi_1 \quad \text{of} \quad \frac{\epsilon\phi_2}{\phi_1} \ll 1 \tag{4.31}$$

Als dit waar is, wordt dit beschouwd als indicatie dat de termen van de reeks steeds kleiner worden.

$$\epsilon^{k+1}\phi_{k+1} \ll \epsilon^k\phi_k \quad \text{of} \quad \frac{\epsilon\phi_{k+1}}{\phi_k} \ll 1$$

Als we de door ons gevonden ϕ_1 en ϕ_2 invullen in (4.31) krijgen we de volgende ongelijkheid.

$$\frac{\epsilon\phi_2}{\phi_1} = \frac{3}{16}Hk\frac{\cosh(2k(z+h))}{\cosh(k(z+h))\sinh^3(kh)}\frac{\sin(2\theta)}{\sin(\theta)} \ll 1$$

De bovenstaande ongelijkheid moet gelden voor alle z en θ. In de literatuur neemt men er echter genoegen mee dat de bovenstaande ongelijkheid geldt op de lijn $z = 0$. Als we gebruiken dat $2\cos(\theta)\sin(\theta) = \sin(2\theta)$ krijgen we het eerste criterium.

$$\frac{\epsilon\phi_2}{\phi_1} = \frac{3}{8}Hk\frac{\cosh(2kh)}{\cosh(kh)\sinh^3(kh)} \ll 1 \tag{4.32}$$

Als aan de bovenstaande ongelijkheid voldaan wordt beschouwd men dit als indicatie van het steeds kleiner worden van de termen van de tweede-orde Stokes benadering voor ϕ. Zoals we hierboven zagen betekent dat dat de tweede-orde Stokes benadering een redelijk nauwkeurige benadering is van de oneindige reeks (4.29). Dit betekent weer dat de tweede-orde Stokes benadering redelijk nauwkeurig een oplossing van de oorspronkelijke hydrodynamische vergelijkingen benadert.

In de literatuur is het gebruikelijk om het bovenstaande criterium (4.32) uit te werken voor diep en ondiep water. Voor diep water is h groot. Het blijkt dat in dat geval altijd aan

Figuur 4.2: Soms heeft de tweede-orde Stokes benadering een niet-fysische top in het dal van de golf.

de ongelijkheid (4.32) voldaan wordt. Voor ondiep water is h klein. Dan geldt $\cosh(kh) \approx 1$ en $\sinh(kh) \approx kh$. Met deze benaderingen kunnen we de ongelijkheid (4.32) herschrijven tot

$$\frac{HL^2}{h^3} \ll \frac{32\pi^2}{3} \approx 105\,.$$

We hebben hierboven het eerste criterium (4.32) opgesteld door te eisen dat de termen van een Stokes benadering steeds kleiner moeten worden. Bij sommige tweede-orde Stokes benaderingen die aan dit criterium voldoen blijkt de functie η een top midden in het dal van de golf te hebben, zoals in figuur 4.2. Dit verschijnsel komt in werkelijkheid niet voor. Een benadering waarbij dit verschijnsel wel voorkomt is dus minder bruikbaar.

We hebben dus een aanvullende eis. De tweede-orde Stokes benadering voor η mag geen ongewenste top hebben. Hieronder werken we deze eis uit tot een tweede criterium.

Met behulp van eenvoudige analyse kan aangetoond worden dat een functie van de vorm

$$d_1 \cos(\theta) + d_2 \cos(2\theta)$$

geen top heeft in $\theta = \pi$ als geldt dat $d_1 > 4d_2$. Onze tweede-orde benadering voor η heeft de bovenstaande vorm. We zien dus dat deze benadering geen ongewenste top heeft als aan de onderstaande ongelijkheid wordt voldaan.

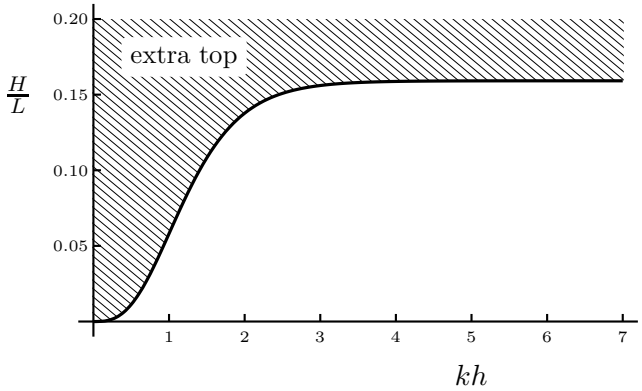
$$\frac{H}{2} > \frac{H^2 k}{8} \frac{3 + 2\sinh^2(kh)}{2\sinh^2(kh)} \frac{1}{\tanh(kh)}$$

Deze ongelijkheid kunnen we herschrijven tot een voorwaarde voor het quotient H/L.

$$\frac{H}{L} < \frac{1}{\pi\left(3\coth^3(kh) - \coth(kh)\right)} \tag{4.33}$$

Dit is het tweede criterium voor de bruikbaarheid van de tweede-orde Stokes benadering. Dit criterium blijkt scherper dan het eerste criterium (4.32). Het tweede criterium wordt tegenwoordig dan ook het meest gebruikt [Sve06, pagina 369]. In figuur 4.3 is de maximale waarde van H/L bij het tweede criterium uitgezet tegen kh. We zien dat de tweede-orde Stokes benadering bij grote waardes van $kh = 2\pi h/L$ bruikbaar is voor een heleboel waardes van H/L. In water dat veel dieper is dan de golflengte is kh groot en de tweede-orde Stokes benadering is dan bruikbaar voor de steilere golven. Als kh afneemt, neemt de maximale waarde van H/L ook af. Voor golven die veel langer zijn dan de gemiddelde waterdiepte is de tweede-orde Stokes benadering dus alleen voor de minst steile golven een bruikbaar. Samenvattend kunnen we zeggen dat de tweede-orde Stokes benadering niet bruikbaar is als

1. de golven te steil zijn



Figuur 4.3: De maximale waarde van H/L uitgezet tegen kh. Volgens het tweede criterium is de tweede-orde Stokes benadering niet toepasbaar in het gearceerde deel van de grafiek, omdat de benadering daar een extra top heeft.

2. de golven veel langer zijn dat de gemiddelde waterdiepte

waarbij de betekenis van de woorden *te* en *veel* door het tweede criterium (4.33) bepaald wordt.

We willen hier met nadruk vermelden dat de bovenstaande criteria geen garantie zijn voor een goede benadering. Bij het eerste criterium controleren we slechts dat de tweede term van de Stokes benadering kleiner is dan de eerste. Dit wordt dan beschouwd als indicatie van het steeds kleiner worden van de termen uit de benadering, maar dat hoeft natuurlijk helemaal niet zo te zijn. Het tweede criterium verwerpt de Stokes benaderingen die beslist niet bruikbaar zijn, omdat ze een vreemde top in het dal van de golf hebben. Dit betekent dus dat het criterium niet bepaalt welke benaderingen nauwkeurig zijn, maar vooral welke benaderingen niet nauwkeurig zijn.

De bovenstaande criteria zijn dus een noodzakelijke maar niet een voldoende voorwaarde voor nauwkeurigheid.

4.1.6 De benadering in de praktijk

Voor de duidelijkheid zetten we hier de tweede-orde benaderingen voor de potentiaal ϕ, de verstoring van het wateroppervlak η, de Bernoulli-constante C, de frequentie ω en de golfsnelheid c bij elkaar.

$$\phi = \frac{Hc}{2}\frac{\cosh(k(z+h))}{\sinh(kh)}\sin(\theta) + \frac{3}{32}H^2kc\frac{\cosh(2k(z+h))}{\sinh^4(kh)}\sin(2\theta) + Mx$$

$$\eta = \frac{H}{2}\cos(\theta) + \frac{H^2k}{8}\frac{3+2\sinh^2(kh)}{2\sinh^2(kh)}\frac{\cos(2\theta)}{\tanh(kh)}$$

$$C = \frac{p_\alpha}{\rho} + \frac{H^2kg}{8\sinh(2kh)}$$

$$\omega^2 = gk\tanh(kh) \tag{4.34}$$

$$c^2 = \frac{g}{k}\tanh(kh) \tag{4.35}$$

Deze benaderingen zijn gegeven in termen van de volgende zes grootheden.

1. De golfhoogte H
2. De gemiddelde waterdiepte h
3. De golflengte L of het golfgetal $k = 2\pi/L$
4. De periode T of de frequentie $\omega = 2\pi/T$
5. De golfsnelheid c
6. De constante M

Net zoals bij de lineaire golven zijn de bovenstaande grootheden niet onafhankelijk van elkaar. We geven nu eerst aan hoe de eerste vijf grootheden samenhangen. Daarna bespreken we de keuze van de waarde van M.

Er zijn twee belangrijke manieren om de eerste vijf grootheden te verkrijgen. Op de berekening van de golfsnelheid c na, doen we dit precies zoals bij de lineaire golven.

1. De golfhoogte H, de waterdiepte h en de golflengte L worden gegeven. We berekenen dan het golfgetal $k = 2\pi/L$. Uit de dispersierelatie (4.34) kunnen we dan de frequentie ω bepalen en uit vergelijking (4.35) bepalen we de golfsnelheid c.
2. De golfhoogte H, de waterdiepte h en de periode T worden gegeven. Uit de periode kunnen we de frequentie $\omega = 2\pi/T$ bepalen. Met een numerieke methode bepalen we nu uit de dispersierelatie (4.34) de waarde van het golfgetal k. Hieruit bepalen we met vergelijking (4.35) weer de waarde van de golfsnelheid c.

Gegeven de golfhoogte H, de waterdiepte h en de golflengte L of de periode T kunnen we de dus de waarde van de eerste vijf grootheden bepalen. Om de benadering te kunnen opstellen moeten we dus alleen nog de waarde van M bepalen. Hiervoor gebruiken we vergelijking (4.27) die de gemiddelde horizontale volumeflux van de golf $\overline{Q}$ aan de waarde van M relateerd.

$$\overline{Q} = \frac{H^2 g}{8c} + Mh$$

Als de gemiddelde horizontale volumeflux als randvoorwaarde gegeven is, kunnen we uit de bovenstaande vergelijking direct de waarde van M bepalen. Vaak is de gemiddelde volumeflux echter niet opgegeven. In dat geval krijgt M meestal één van de volgende twee waardes.

1. Als de golven gemaakt worden in een experimentele opstelling waarin zich een evenwicht kan instellen, kiezen we de waarde van M zo dat de gemiddelde horizontale volumeflux gelijk is aan 0.
$$M = -\frac{H^2 g}{8hc}$$
2. Voor golven op zee wordt M meestal gelijkgesteld aan 0 zodat de potentiaal ϕ alleen uit oscillerende termen bestaat [Sve06, pagina 362]. In dit geval hebben de golven een gemiddelde horizontale volumeflux ongelijk aan nul.
$$\overline{Q} = \frac{H^2 g}{8c} \tag{4.36}$$

Bij hogere-orde Stokes benaderingen is het verkrijgen van een hogere-orde vergelijking die $\overline{Q}$ aan M relateert heel erg moeilijk. Bij hogere-orde Stokes benaderingen stelt men M daarom meestal gelijk aan 0.

4.2 De vijfde-orde Stokes benadering

In de vorige paragraaf hebben we de tweede-orde Stokes benadering afgeleid. Voor deze afleiding moesten we erg veel rekenwerk doen. In grote lijnen deden we bij de tweede-orde Stokes benadering twee belangrijke stappen.

1. We hebben eerst een tweede-orde machtreeks ingevuld in het stelsel vergelijkingen van ons model. Hierbij werd bij de oppervlakte-condities een Taylorbenadering van de machtreeksen ingevuld. Na veel foutgevoelig rekenwerk was het resultaat een nieuw stelsel differentiaalvergelijkingen voor de termen uit de machtreeks.

2. Hierna is het stelsel differentiaalvergelijkingen opgelost. Het oplossen van de eerste-orde vergelijkingen ging net als het oplossen van de lineaire vergelijkingen. Het oplossen van de tweede-orde vergelijkingen was niet eenvoudig en erg foutgevoelig. Bovendien deden we hierbij de aanname $\omega_1 = 0$ die we niet hebben gerechtvaardigd.

In deze paragraaf bespreken we de vijfde-orde Stokes benadering. Als we de vijfde-orde Stokes benadering net zo afleiden als de tweede-orde benadering kost dat waarschijnlijk erg veel tijd. Bovendien verwachten we allerlei aannames te moeten doen in de hoop dat dit gewenste oplossingen oplevert. Al met al lijkt het opstellen van een hogere-orde Stokes benadering geen eenvoudige klus.

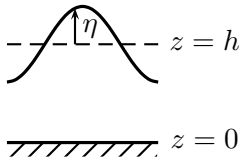
Toch zijn er in de literatuur vijfde-orde Stokes benaderingen te vinden. De bekendste zijn de benaderingen verkregen door Skjelbreia en Hendrickson [SH61] en Fenton [Fen85]. Beide benaderingen worden verkregen door veel duidelijker dan bij de tweede-orde benadering te kiezen wat de vorm is van de benadering. We zeggen bijvoorbeeld niet alleen dat we te maken hebben met een machtreeks, maar ook welke oscillerende termen bij elke macht horen. Als we deze machtreeksen invullen in het stelsel vergelijkingen van ons model krijgen we een nieuw stelsel analytische vergelijkingen dat opgelost kan worden zonder verdere aannames te doen.

Hieronder bespreken op de vijfde-orde Stokes benadering van Skjelbreia en Hendrickson. De notatie houden we zo dicht mogelijk bij de hiervoor gebruikte notatie. De vertaling van onze symbolen naar die in het artikel van Skjelbreia en Hendrickson kan gemaakt worden met behulp van bijlage A.2.

4.2.1 De uitgangsvergelijkingen

Voor het verkrijgen van de vijfde-orde Stokes benadering gebruiken Skjelbreia en Hendrickson [SH61] het model waarbij de bodem op $z = 0$ ligt. Hierbij hoort het volgende stelsel vergelijkingen.

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0 \\ \phi_z &= 0 \quad \text{als} \quad z = 0 \\ \eta_t &= \phi_z - \phi_x \eta_x \quad \text{als} \quad z = h + \eta \\ \phi_t + \frac{1}{2}\left(\phi_x^2 + \phi_z^2\right) + \frac{p_\alpha}{\rho} + g\eta &= C(t) \quad \text{als} \quad z = h + \eta \end{aligned} \tag{4.37}$$



Figuur 4.4: De definitie van het assenstelsel en η bij het afleiden van de vijfde-orde Stokes benadering van Skjelbreia en Hendrickson

Om de berekeningen verderop eenvoudiger te maken worden de onderste twee vergelijkingen op een andere manier opgeschreven. We leiden eerst een variant af van de kinematische vrije-oppervlakteconditie.

$$\eta_t = \phi_z - \phi_x \eta_x \quad \text{als} \quad z = h + \eta \tag{4.38}$$

We definiëren nu $\theta = kx - \omega t = kx - kct$ en nemen aan dat η een functie is van θ en dat ϕ een functie is van θ en z. Uit de analyse volgen nu de volgende gelijkheden.

$$\eta_t = -kc\eta_\theta = -c\eta_x \quad \text{en} \quad \phi_t = -kc\phi_\theta = c\phi_x \tag{4.39}$$

Met behulp van deze gelijkheden herschrijven we vergelijking (4.38) tot

$$-\phi_z = (c - \phi_x)\,\eta_x \quad \text{als} \quad z = h + \eta\,.$$

Voor later gebruik delen we de hele vergelijking door c. Het resultaat is een nieuwe kinematische vrije-oppervlakteconditie.

$$-\frac{\phi_z}{c} = \left(1 - \frac{\phi_x}{c}\right)\eta_x \quad \text{als} \quad z = h + \eta \tag{4.40}$$

We gaan nu een variant van de dynamische vrije-oppervlakte conditie afleiden.

$$\phi_t + \frac{1}{2}\left(\phi_x^2 + \phi_z^2\right) + \frac{p_\alpha}{\rho} + g\eta = C(t) \quad \text{als} \quad z = h + \eta \tag{4.41}$$

We merken eerst op dat bij de tweede-orde Stokes benadering de waarde van de atmosferische druk p_α alleen voorkwam in de eerste term van de benadering van $C(t)$. Daardoor kunnen we p_α vrij kiezen, zonder dat dit de tweede-orde Stokes benaderingen voor ϕ en η beïnvloedt.

Het begin van een vijfde-orde benadering is een tweede-orde benadering. Daarom verwachten we dat ook bij de vijfde-orde benadering de waarde van de atmosferische druk alleen invloed zal hebben op de eerste term van de vijfde-orde benadering van $C(t)$. We kunnen daarom de atmosferische druk p_α gelijkstellen aan 0, zonder dat dit invloed heeft op de vijfde-orde Stokes benaderingen voor ϕ en η.

$$p_\alpha = 0$$

Dit vullen we in, in vergelijking (4.41). Daarna vermenigvuldigen we de hele vergelijking met 2.

$$2\phi_t + \phi_x^2 + \phi_z^2 + 2g\eta = 2C(t) \quad \text{als} \quad z = h + \eta$$

Met behulp van de hierboven genoemde gelijkheden (4.39) kunnen we deze vergelijking herschrijven tot

$$(c-\phi_x)^2+\phi_z^2=c^2-2g\left(-\frac{C(t)}{g}+\eta\right) \quad \text{als} \quad z=h+\eta\,.$$

We schrijven $K(t)$ voor het quotient $-C(t)/g$ en vermenigvuldigen de bovenstaande vergelijking met k.[3] Links van het gelijkteken vermenigvuldigen we met c^2/c^2.

$$kc^2\left(\left(1-\frac{\phi_x}{c}\right)^2+\left(\frac{\phi_z}{c}\right)^2\right)=kc^2-2g\left(kK(t)+k\eta\right) \quad \text{als} \quad z=h+\eta \tag{4.42}$$

Dit is onze nieuwe dynamische vrije-oppervlakteconditie.

Bij het bepalen van een vijfde-orde Stokes benadering gebruiken Skjelbreia en Hendrickson de bovenste twee vergelijkingen van (4.37) en de zojuist afgeleide varianten van de vrije-oppervlaktecondities (4.40) en (4.42) als uitgangsvergelijkingen.

$$\begin{aligned}
\phi_{xx}+\phi_{zz} &= 0\\
\phi_z=0 &\quad \text{als} \quad z=0\\
-\frac{\phi_z}{c}=\left(1-\frac{\phi_x}{c}\right)\eta_x &\quad \text{als} \quad z=h+\eta\\
kc^2\left(\left(1-\frac{\phi_x}{c}\right)^2+\left(\frac{\phi_z}{c}\right)^2\right)=kc^2-2g\left(kK(t)+k\eta\right) &\quad \text{als} \quad z=h+\eta
\end{aligned} \tag{4.43}$$

4.2.2 De vergelijkingen opstellen en oplossen

Net als bij het afleiden van de tweede-orde benadering doen Skjelbreia en Hendrickson een voorstel voor de vorm van de onbekenden uit de bovenstaande vergelijkingen (4.43). De voorstellen van Skjelbreia en Hendrickson verschillen op twee belangrijke punten van de tweede-orde machtreeksen.

1. De expansieparameter van de reeksen van Skjelbreia en Hendrickson is $\lambda=ka$. De constante a is hierbij de helft van de amplitude van de eerste-orde benadering van η. Net als bij de tweede-orde Stokes benadering kunnen we de waarde van a pas bepalen nadat we de hele benadering voor η gevonden hebben.

2. Skjelbreia en Hendrickson kiezen heel precies de vorm van de vijfde-orde benadering. In de machtreeks voor ϕ horen bij de oneven macht n van λ bijvoorbeeld alleen oscillerende termen van de vorm $\sin(i\theta)$ waarbij i oneven en kleiner of gelijk aan n is.

Hieronder staan de machtreeksen die Skjelbreia en Hendrickson voorstellen. Merk op dat de onbekende functie $C(t)$ is vervangen door de nieuwe onbekende K.

$$\begin{aligned}
\frac{k\phi}{c} = &\left(\lambda A_{11}+\lambda^3A_{13}+\lambda^5A_{15}\right)\cosh(kz)\sin(\theta)+\\
&\left(\lambda^2A_{22}+\lambda^4A_{24}\right)\cosh(2kz)\sin(2\theta)+\\
&\left(\lambda^3A_{33}+\lambda^5A_{35}\right)\cosh(3kz)\sin(3\theta)+\\
&\lambda^4A_{44}\cosh(4kz)\sin(4\theta)+\lambda^5A_{55}\cosh(5kz)\sin(5\theta)
\end{aligned} \tag{4.44}$$

[3] Deze functie $K(t)$ heeft niets te maken met de K die bij de afleiding van de tweede-orde Stokes benadering gebruikt wordt. Deze terminologie is gebasseerd op de literatuur.

$$\begin{aligned} k\eta &= \lambda\cos(\theta) + \left(\lambda^2 B_{22} + \lambda^4 B_{24}\right)\cos(2\theta) + \left(\lambda^3 B_{33} + \lambda^5 B_{35}\right)\cos(3\theta) + \\ &\quad \lambda^4 B_{44}\cos(4\theta) + \lambda^5 B_{55}\cos(5\theta) \end{aligned} \tag{4.45}$$

$$kK = \lambda^2 C_3 + \lambda^4 C_4 \tag{4.46}$$

$$kc^2 = C_0^2\left(1 + \lambda^2 C_1 + \lambda^4 C_2\right) \tag{4.47}$$

In deze machtreeksen zijn A_{ij}, B_{ij} en C_i nog onbepaalde functies die constant zijn ten opzichte van de plaats en de tijd. Deze constanten moeten zo worden gekozen, dat de bovenstaande machtreeksen het stelsel vergelijkingen (4.43) tot en met de vijfde macht van λ nauwkeurig oplossen. Het blijkt dat de bovenstaande machtreeksen de bovenste twee vergelijkingen uit het stelsel (4.43) al oplossen. We hoeven de constanten A_{ij}, B_{ij} en C_i dus alleen nog maar zodanig te kiezen dat de machtreeksen de onderste twee vergelijkingen uit het stelsel tot en met de vijfde macht van λ nauwkeurig oplossen.

Om A_{ij}, B_{ij} en C_i te bepalen vullen Skjelbreia en Hendrickson hun machtreeksen in, in de onderste twee vergelijkingen van (4.43). In het resultaat verwaarlozen ze termen met een factor λ^6 en hogere machten van λ en herschrijven ze alle oscillerende termen als machten van $\cos(\theta)$. Ze krijgen dan twee vergelijkingen van de onderstaande vorm.

$$\begin{aligned} &\lambda\left(f_{11}\cos(\theta) + f_{12}\cos^2(\theta) + \ldots\right) + \ldots + \lambda^5\left(f_{51}\cos(\theta) + \ldots\right) = \\ &\lambda\left(g_{11}\cos(\theta) + g_{12}\cos^2(\theta) + \ldots\right) + \ldots + \lambda^5\left(g_{51}\cos(\theta) + \ldots\right) \end{aligned}$$

Deze vergelijkingen moeten gelden voor elke waarde van λ en θ. Hieruit volgt een nieuw stelsel vergelijkingen.

$$f_{11} = g_{11}\,, \quad f_{12} = g_{12}\,, \quad \ldots\,, \quad f_{51} = g_{51}\,, \tag{4.48}$$

Dit zijn de analytische vergelijkingen waaruit de constanten A_{ij}, B_{ij} en C_i bepaald kunnen worden. Het opstellen en oplossen van bovenstaande stelsel is een erg vervelend en foutgevoelig karwij. Fenton, die bij het opstellen van van zijn vijfde-orde Stokes benadering soortgelijke berekeningen moest doen, schrijft in zijn artikel [Fen85]

> *"The number of terms increases rapidly with order. For example, those equations obtained from the Bernoulli equation contain 2 terms at order ϵ, and successively 10,14,44 and finally 83 at order ϵ^5, after which calculations were terminated. These operations and subsequent solution of the equations took the writer about a week of intense effort (each time, until he got it right!) including a number of numerical checks at each stage."*

We zullen de berekeningen van Skjelbreia en Hendrickson hier niet met de hand uitwerken. We plaatsen wel een aantal van hun resultaten. Om de oplossingen compact te kunnen

opschrijven noteren Skjelbreia en Hendrickson $c \equiv \cosh(kh)$ en $s \equiv \sinh(kh)$.

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{1}{s} \\
A_{22} &= \frac{3}{8s^4} \\
A_{35} &= \frac{512C^{12} + 4224c^{10} - 6800c^8 - 12808c^6 + 16704c^4 - 3154C^2 + 107}{4096s^{13}(6c^2 - 1)} \\
B_{22} &= \frac{(2c^2 + 1)c}{4s^3} \\
B_{24} &= \frac{c(272c^8 - 504c^6 - 192c^4 + 322c^2 + 21)}{384s^9} \\
C_0^2 &= g\tanh(kh) \\
C_2 &= \frac{3840c^{12} - 4096c^{10} + 2592c^8 - 1008c^6 + 5944c^4 - 1830c^2 + 147}{512s^{10}(6c^2 - 1)}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

Voor de rest van de resultaten verwijzen we naar het artikel van Skjelbreia en Hendrickson [SH61].

In de volgende paragraaf bespreken we hoe de berekeningen met het symbolische rekenprogramma Mathematica gecontroleerd kunnen worden. Met dit programma vonden we een fout in de hierboven bij (4.49) genoemde oplossing voor C_2 van Skjelbreia en Hendrickson. Deze fout is al eerder opgemerkt door Fenton [Fen85]. Hieronder staat de correcte oplossing voor C_2 in de notatie van Skjelbreia en Hendrickson.

$$C_2 = \frac{3840c^{12} - 4096c^{10} - 2592c^8 - 1008c^6 + 5944c^4 - 1830c^2 + 147}{512s^{10}(6c^2 - 1)} \tag{4.50}$$

In de oplossing van Skjelbreia en Hendrickson staat er $+2592c^8$ in de teller van deze breuk. Op één minteken na is de door hun gegeven vijfde-orde Stokes benadering dus correct.

4.2.3 De vijfde-orde Stokes benadering controleren met Mathematica

Het computerprogramma Mathematica kan symbolisch rekenen. Dat betekent dat Mathematica met symbolen kan rekenen zonder dat de waardes van deze symbolen bekend hoeft te zijn. In het bijzonder bevat Mathematica functies waarmee een stelsel vergelijkingen analytisch kan worden opgelost. Hierdoor is het mogelijk een Stokes benadering af te leiden met Mathematica. Hieronder bespreken we heel globaal hoe met Mathematica de vijfde-orde Stokes benadering afgeleid kan worden. Voor de bijbehorende Mathematica-invoer verwijzen we naar bijlage B.

In grote lijnen gaat het afleiden van de vijfde-orde Stokes benadering met Mathematica net zoals Skjelbreia en Hendrickson het met de hand deden. De subtiele verschillen tussen de aanpak van Skjelbreia en Hendrickson en de onderstaande zijn meestal het gevolg van een voorkeur voor een bepaalde notatie.

1. We definiëren de machtreeksen (4.44), (4.45), (4.46) en (4.47) voor de onbekenden van het probleem.

2. Deze machtreeksen vullen we in, in de laatste twee vergelijkingen van het stelsel (4.43). Voor de termen die afhankelijk zijn van z stellen we net als bij het afleiden van de

tweede-orde Stokes benadering een Taylorreeks op. Het resultaat is twee vergelijkingen voor de onbekenden uit de machtreeks.

3. De termen uit deze vergelijkingen die als factor een hogere macht van λ hebben dan λ^5 gooien we weg.

4. We herschrijven de oscillerende termen uit de vergelijkingen tot machten van $\cos(\theta)$ en $\sin(\theta)$. We wijken hier af van Skjelbreia en Hendrickson, die ervoor kozen alles in termen van $\cos(\theta)$ te schrijven.

5. Nu sorteren we de termen uit de vergelijkingen op machten van λ en vervolgens op machten van $\cos(\theta)$ en $\sin(\theta)$. Hierdoor ontstaan uit de twee vergelijkingen een heleboel deelvergelijkingen. We rangschikken deze deelvergelijkingen op de macht van λ, zodat de eerste-orde vergelijkingen bovenaan staan en de vijfde-orde vergelijkingen onderaan.

6. We lossen nu de vergelijkingen van boven naar beneden op. Hierbij zoekt Mathematica zelf uit welke symbolen uit de vergelijkingen opgelost kunnen worden. We moeten hierbij ook aangeven dat we oplossingen willen die horen bij $C_0 = +\sqrt{g\tanh(kh)}$ (en niet bij $C_0 = -\sqrt{g\tanh(kh)}$).

7. We proberen de oplossingen voor de onbekenden uit de machtreeks zo eenvoudig mogelijk op te schrijven.

Na het uitvoeren van de bovenstaande stappen heeft Mathematica een lijst met oplossingen voor de onbekenden uit de machtreeksen opgesteld. Deze oplossingen zijn door Mathematica zo eenvoudig mogelijk opgeschreven. Toch komt de vorm van deze oplossingen vaak nog niet overeen met de vorm waarin Skjelbreia en Hendrickson hun oplossingen presenteren. De oplossingen van Skjelbreia en Hendrickson kunnen worden vergeleken met de oplossingen van Mathematica door het verschil van de beide oplossingen vereenvoudigen. Als dit gelijk aan nul is komen de oplossingen overeen.

Mathematica doet er op een gewone computer een paar minuten over om de vijfde-orde Stokes benadering af te leiden. Het belangrijkste resultaat dat we met Mathematica vinden is dat de door Skjelbreia en Hendrickson gevonden C_2 niet correct is. De correcte oplossing voor C_2 hebben we hierboven bij (4.50) al geplaatst.

4.2.4 De nauwkeurigheid van de benadering

In beginsel lost een vijfde-orde Stokes benadering het stelsel vergelijkingen van ons model op als we termen met een factor λ^6 of hogere machten van λ verwaarlozen. Net als bij de tweede-orde benadering is het echter onduidelijk hoe nauwkeurig een vijfde-orde Stokes benadering de echte oplossingen van het stelsel differentiaalvergelijkingen benaderd.

Voor de tweede-orde Stokes benadering konden we twee criteria afleiden voor de toepasbaarheid van de benadering. We eisten bijvoorbeeld dat de termen uit de benadering steeds kleiner moeten worden. Bovendien verworpen we benaderingen waarbij er rare toppen in het dal van de golf zitten. Op basis van deze principes zouden we natuurlijk ook criteria voor de vijfde-orde Stokes benadering kunnen afleiden.

We merkten eerder op dat de criteria voor de tweede-orde benaderingen niet aangeven of de benaderingen nauwkeurig zijn. De criteria verwerpen alleen benaderingen die op basis van de genoemde principes niet toepasbaar zijn. Hierdoor is het mogelijk dat een benadering

voldoet aan de criteria terwijl het eigenlijk geen nauwkeurige benadering is. De criteria geven dus mogelijk een valse indicatie van nauwkeurigheid.

In de literatuur leidt men daarom niet soortgelijke criteria af voor de toepasbaarheid van de vijfde-orde Stokes benadering. Wel kiest men er soms voor vijfde-orde benadering te vergelijken met experimentele resultaten of met benaderingen waarvan men weet dat ze nauwkeurig zijn. Fenton vergelijkt zijn vijfde-orde benadering bijvoorbeeld uitvoerig met stroomfunctie benaderingen van hoge orde die we later zullen bespreken.

Wij zullen de verschillende benaderingen pas met elkaar vergelijken in de discussie aan het eind van deze scriptie. Tot die tijd laten we bespreking van de toepasbaarheid van de vijfde-orde Stokes benadering even voor wat het is.

4.2.5 De benadering in de praktijk

De vijfde-orde Stokes benadering van Skjelbreia en Hendrickson is gegeven in termen van de volgende grootheden.

1. De golfhoogte H
2. De gemiddelde waterdiepte h
3. De golflengte L of het golfgetal $k = 2\pi/L$
4. De periode T of de frequentie $\omega = 2\pi/T$
5. De expansieparameter $\lambda = ka$

In de praktijk worden meestal de golfhoogte H, de waterdiepte h en óf de golflengte L, óf de periode T gegeven. Gegeven drie van de bovenstaande grootheden moeten we dus de andere twee bepalen. Skjelbreia en Hendrickson omschrijven in hun artikel hoe dit met een numerieke methode kan worden gedaan. Hiertoe leiden ze twee vergelijkingen af.

De eerste vergelijking wordt verkregen door te eisen dat de vijfde-orde Stokes benadering voor het golfprofiel η een hoogte H heeft.

$$H = \max \eta - \min \eta = \eta|_{\theta=0} - \eta|_{\theta=\pi} = \frac{2}{k}\left(\lambda + \lambda^3 B_{33} + \lambda^5 \left(B_{35} + B_{55}\right)\right)$$

We herschrijven deze vergelijking tot

$$\frac{H\pi}{L} = \lambda + \lambda^3 B_{33} + \lambda^5 \left(B_{35} + B_{55}\right) . \tag{4.51}$$

Dit is de eerste vergelijking. De tweede vergelijking volgt uit de definitie van de golfsnelheid $c = L/T$. Hieruit volgt dat

$$kc^2 = \frac{L^2 k}{T^2} = \frac{2\pi L}{T} .$$

Als we hierin de vijfde-orde Stokes benadering voor c^2 invullen krijgen we de tweede vergelijking.

$$\frac{2\pi L}{T} = C_0^2 \left(1 + \lambda^2 C_1 + \lambda^4 C_2\right) \tag{4.52}$$

De functies B_{33}, B_{35}, B_{55}, C_0, C_1 en C_2 uit de twee vergelijkingen (4.51) en (4.52) zijn alleen afhankelijk van de waterdiepte h en de golflengte L. We hebben dus twee vergelijkingen met

vijf onbekenden (H, h, L,T en λ). Als de waarde van drie van de vijf grootheden gegeven is, blijven er twee grootheden als onbekende over. We hebben dan dus twee vergelijkingen met twee onbekenden.

Met een numerieke methode kunnen we uit de bovenstaande vergelijkingen (4.51) en (4.52)

1. gegeven de waardes van H, h en L de waardes van T en λ bepalen, of
2. gegeven de waardes van H, h en T de waardes van L en λ bepalen.

We hebben dan de waardes van alle grootheden uit de vijfde-orde Stokes benadering van Skjelbreia en Hendrickson.

4.3 Hogere-orde Stokes benaderingen

In principe is het mogelijk de Stokes benadering tot willekeurig hoge orde te ontwikkelen. Het afleiden van de vijfde-orde Stokes benadering kost echter al zo veel tijd, dat nog hogere-orde benaderingen afleiden niet aantrekkelijk lijkt.

Toch bestaat er een methode waarmee op een computer Stokes benaderingen van hoge orde (bijvoorbeeld orde 110) kunnen worden opgesteld. Deze methode is in 1977 bedacht door Cokelet. Cokelet kiest een slimme expansieparameter, maakt gebruikt van Padé benaderingen en gebruikt handigheidjes die zorgen voor betere convergentie. We zullen de Stokes benaderingen van Cokelet hier niet bespreken. De geïnteresseerde lezer verwijzen we naar het artikel van Cokelet [Cok77].

Hoofdstuk 5

Benaderingen voor lange golven

In onze bespreking van de nauwkeurigheid van de tweede-orde Stokes benadering zagen we dat deze benadering niet bruikbaar is voor golven die veel langer zijn dan de gemiddelde waterdiepte. In de literatuur worden deze golven meestal *lange golven* genoemd. Het blijkt dat Stokes benaderingen in het algemeen slecht bruikbaar zijn voor zulke golven. Bij lange golven zullen we dus toevlucht moeten nemen tot andere benaderingen. In de literatuur staan deze bekend als lange golven benaderingen.

Het afleiden van lange golven benaderingen is erg ingewikkeld. Men begint met het benaderen van de hydrodynamische vergelijkingen. Dit leidt tot de Boussinesq vergelijkingen of de Korteweg-de Vries vergelijkingen. Het blijkt dat deze benaderde vergelijkingen in sommige gevallen analytisch kunnen worden opgelost. Voor een geïdealiseerde golf vindt men bijvoorbeeld een benadering die in de literatuur bekend staat als de *cnoidale* benadering en voor golven met maar één top kunnen benaderingen worden opgesteld die bekend staan als *solitonen*.

We zullen de afleiding van lange golven benaderingen in deze scriptie niet uitwerken. Voor een uitgebreide verhandeling verwijzen we naar [Sve06, hoofdstuk 9]. Een korte inleiding in de lange golven benaderingen kan worden gevonden in [Sor97, §3.3 en §3.4].

Hoofdstuk 6

Stroomfunctie benaderingen

De benaderingen die we in de vorige hoofdstukken hebben besproken waren geschikt voor diep water (lineaire en Stokes benaderingen) of voor ondiep water (lange golven benaderingen). Dit roept de vraag op of er ook benaderingen zijn die geschikt zijn voor zowel diep als ondiep water. In dit hoofdstuk presenteren we zo'n benadering; de stroomfunctie benadering.

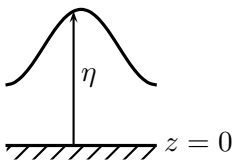
In de literatuur zijn verschillende varianten van de stroomfunctie benadering te vinden. De bekendste zijn de stroomfunctie benadering van Dean [Dea65] en de stroomfunctie benadering van Rienecker en Fenton [RF81]. Deze benaderingen verschillen niet veel van elkaar. Omdat de benadering van Rienecker en Fenton iets vaker toepasbaar is, zullen we hier deze benadering presenteren. Voor de benadering van Dean verwijzen we naar zijn artikel [Dea65].

Voor het afleiden van de benadering van Rienecker en Fenton wordt het stelsel vergelijkingen van ons model geschreven in termen van de stroomfunctie ψ in plaats van de potentiaalfunctie ϕ. Deze nieuwe vergelijkingen worden dan dimensieloos gemaakt. Vervolgens wordt een soort Fourierreeks voorgesteld als oplossing van deze vergelijkingen.

Voor de onbekenden uit deze reeks kan een stelsel analytische vergelijkingen worden opgesteld dat met een numerieke methode opgelost kan worden. Omdat het oplossen gedaan kan worden door de computer kan zonder veel moeite een reeks van heel hoge orde worden opgesteld. Dit betekent dat we eenvoudig een heel nauwkeurige benadering kunnen verkrijgen.

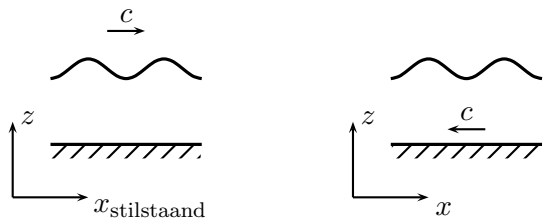
Hieronder zullen we de stroomfunctie benadering afleiden. We beginnen met het opstellen van de uitgangsvergelijkingen voor de stroomfunctie benadering.

6.1 De uitgangsvergelijkingen opstellen



Figuur 6.1: Het model dat gebruikt wordt voor het verkrijgen van de stroomfunctie benadering

Als uitgangspunt nemen we het model waarbij de bodem ligt op $z = 0$ en het wateroppervlak gegeven wordt door $z = \eta$. Het bijbehorende stelsel vergelijkingen is eerder bij (2.7)



Figuur 6.2: Bij het afleiden van de stroomfunctie benadering hebben we te maken met twee coördinatenstelsels. In het stilstaande stelsel (links) beweegt de golf vooruit met de golfsnelheid c. In het meebewegende stelsel (rechts) beweegt de bodem achteruit met snelheid c.

gegeven.

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0 \\ \phi_z &= 0 \qquad \text{als} \quad z = 0 \\ \eta_t &= \phi_z - \phi_x \eta_x \qquad \text{als} \quad z = \eta \\ \phi_t + \frac{1}{2}\left(\phi_x^2 + \phi_z^2\right) + \frac{p_\alpha}{\rho} + g\eta &= C(t) \qquad \text{als} \quad z = \eta \end{aligned} \tag{6.1}$$

In het voorgaande hebben we telkens gesteld dat aan dit stelsel vergelijkingen moet worden voldaan als we de golf bekijken vanuit een coördinatenstelsel dat stil staat ten opzichte van de bodem. De natuurwetten moeten echter ook gelden als we eenparig bewegen in zijwaartse richting. In het bijzonder moeten de bovenstaande vergelijkingen gelden als we met de golf meebewegen zodat het lijkt alsof de golf stilstaat. Bij de afleiding van de stroomfunctiebenadering bekijken we de golf vanuit zo'n meebewegend coördinatenstelsel. De horizontale coördinaat van dit stelsel noemen we x. Deze meebewegende x is gerelateerd aan de stilstaande coördinaat x door

$$x = x_{\text{stilstaand}} - ct$$

waarin c de golfsnelheid is gemeten vanuit het stilstaande coördinatenstelsel.

Vanuit het meebewegende stelsel gezien verandert de golf niet van vorm. Dit betekent dat de tijdsafgeleide van functie die het golfprofiel geeft η_t gelijk is aan 0. We nemen aan dat de meebewegende potentiaalfunctie ϕ ook constant is ten opzichte van de tijd. Tenslotte stellen we dat de atmosferische druk p_α op het wateroppervlak verwaarloosbaar is.

$$\eta_t = 0\,, \quad \phi_t = 0 \quad \text{en} \quad p_\alpha = 0$$

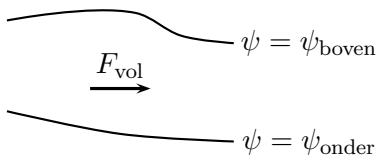
In het meebewegende coördinatenstelsel krijgt het stelsel vergelijkingen (6.1) nu de volgende vorm.

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{zz} &= 0 \\ \phi_z &= 0 \quad \text{als} \quad z = 0 \\ 0 &= \phi_z - \phi_x \eta_x \quad \text{als} \quad z = \eta \\ \frac{1}{2}\left(\phi_x^2 + \phi_z^2\right) + g\eta &= C \quad \text{als} \quad z = \eta\,. \end{aligned} \tag{6.2}$$

In de onderste vergelijking is de som links van het gelijkteken constant ten opzichte van de tijd. Hieruit volgt dat C ook constant is ten opzichte van de tijd. Hiermee hebben we al rekening gehouden door de afhankelijkheid van t niet te noteren.

We zullen nu het bovenstaande stelsel vergelijkingen herschrijven in termen van de stroomfunctie ψ. De stroomfunctie is sterk gerelateerd aan de potentiaalfunctie. We sommen eerst enkele belangrijkste eigenschappen van stroomfunctie ψ op. Voor een afleiding van deze eigenschappen verwijzen we naar [VV07, §2.2].

1. De stroomfunctie ψ en de potentiaalfunctie ϕ zijn gerelateerd door
$$\psi_z = \phi_x = u \quad \text{en} \quad \psi_x = -\phi_z = -w\,. \tag{6.3}$$
2. In rotatievrij water voldoet de stroomfunctie aan de Laplace vergelijking.
$$\psi_{xx} + \psi_{zz} = 0$$
3. Lijnen waarop de stroomfunctie ψ constant is zijn stroomlijnen van het water.
4. De stroomlijnen en de equipotentiaallijnen snijden elkaar loodrecht.
5. De volumeflux F_{vol} tussen de stroomlijnen $\psi = \psi_{\text{onder}}$ en $\psi = \psi_{\text{boven}}$ is gelijk aan $\psi_{\text{boven}} - \psi_{\text{onder}}$ (zie figuur 6.3).
6. De volumeflux F_{vol} tussen de stroomlijnen $\psi = \psi_{\text{onder}}$ en $\psi = \psi_{\text{boven}}$ is gelijk aan $\psi_{\text{boven}} - \psi_{\text{onder}}$ (zie figuur 6.3).



Figuur 6.3: De volumeflux tussen deze twee stroomlijnen is $F_{\text{vol}} = \psi_{\text{boven}} - \psi_{\text{onder}}$.

Met behulp van deze eigenschappen kunnen we het hierboven genoemde stelsel vergelijkingen herschrijven in termen van de stroomfunctie. We beginnen met de bovenste vergelijking.
$$\phi_{xx} + \phi_{zz} = 0$$
Door deze vergelijking met behulp van de (6.3) te herschrijven tot
$$\phi_{zx} = \phi_{xz}$$
kan worden ingezien dat aan deze vergelijking voldaan wordt als de stroomfunctie ψ tweemaal continu differentieerbaar is in alle variabelen. We zullen verderop een *nette* reeks voorstellen voor de stroomfunctie ψ. Zo'n reeks voldoet dus aan de bovenstaande Laplacevergelijking. We zullen deze vergelijking daarom niet meer noemen.

We kunnen de Laplacevergelijking voor de potentiaal wel vervangen door een andere Laplacevergelijking. Volgens eigenschap 2 voldoet de stroomfunctie ψ namelijk ook aan de Laplacevergelijking.
$$\psi_{xx} + \psi_{zz} = 0\,. \tag{6.4}$$

We vervangen de bovenste vergelijking daarom door deze Laplacevergelijking voor ψ.

Nu bekijken we de tweede en de derde vergelijking.

$$\begin{aligned} \phi_z &= 0 \quad \text{als} \quad z = 0 \\ 0 = \phi_z - \phi_x \eta_x &\quad \text{als} \quad z = \eta \end{aligned}$$

Dit zijn de bodemconditie en de kinematische vrije-oppervlaktconditie. Deze vergelijkingen zijn de wiskundige formulering van het principe dat er geen water door de bodem en het wateroppervlak kan stromen. Hieraan wordt voldaan als we eisen dat de bodem en het wateroppervlak stroomlijnen zijn. Met behulp van eigenschap 3 kunnen we dit als volgt opschrijven in termen van de stroomfunctie ψ.

$$\begin{aligned} \psi &= 0 \quad \text{als} \quad z = 0 \\ \psi = \text{constant} = -Q &\quad \text{als} \quad z = \eta \end{aligned} \tag{6.5}$$

Merk op dat uit eigenschap 5 volgt dat de totale volumeflux gemeten vanuit het meebewegende coördinatenstelsel nu gelijk is aan $\psi|_{z=\eta} - \psi|_{z=0} = -Q - 0 = -Q$.

Nu moeten we nog de vierde vergelijking uit het stelsel (6.2) herschrijven in termen van de stroomfunctie ψ.

$$\frac{1}{2}\left(\phi_x^2 + \phi_z^2\right) + g\eta = C \quad \text{als} \quad z = \eta$$

In deze vergelijking kunnen we direct de relatie (6.3) gebruiken. Dit geeft ons een nieuwe vergelijking voor de dynamische vrije-oppervlakteconditie.

$$\frac{1}{2}\left(\psi_x^2 + \psi_z^2\right) + g\eta = C \quad \text{als} \quad z = \eta \tag{6.6}$$

De vier vergelijkingen (6.4), (6.5) en (6.6) vervangen het stelsel vergelijkingen uit (6.2). Hieronder staan de nieuwe vergelijkingen nog eens bij elkaar.

$$\begin{aligned} \psi_{xx} + \psi_{zz} &= 0 \\ \psi &= 0 \quad \text{als} \quad z = 0 \\ \psi &= -Q \quad \text{als} \quad z = \eta \\ \frac{1}{2}\left(\psi_x^2 + \psi_z^2\right) + g\eta &= C \quad \text{als} \quad z = \eta \end{aligned} \tag{6.7}$$

Merk nogmaals op dat de stroomfunctie ψ uit dit stelsel vergelijkingen de stroming in het meebewegende stelsel beschrijft.

Bij het afleiden van de stroomfunctie benadering gebruiken Rienecker en Fenton het bovenstaande stelsel vergelijkingen in dimensieloze vorm. Voor het dimensieloos maken van de variabelen gebruiken zij de gemiddelde waterdiepte h.

$$h = \frac{1}{L}\int_0^L \eta(x)\,\mathrm{d}x$$

We middelen hier alleen over de ruimtelijke coördinaat, omdat vanuit het meebewegende stelsel gezien de golf op elk tijdstip hetzelfde is.

Met de gemiddelde waterdiepte h maken we de de grootheden uit het probleem dimensieloos. Hierbij schrijven we f' voor de dimensieloze variant van f. Merk op dat we ook

grootheden dimensieloos maken die alleen kunnen worden waargenomen vanuit het stilstaande coördinatenstelsel.

$$\begin{array}{cccc} x' = x/h & \eta' = \eta/h & c' = c/(gh) & Q' = Q/\sqrt{gh^3} \\ z' = z/h & \psi' = \psi/\sqrt{gh^3} & T' = T\sqrt{g/h} & H' = H/h \\ t' = t\sqrt{g/h} & k' = kh & C' = C/(gh) & D' = D/h \end{array} \tag{6.8}$$

Hierin is D' een constante die we later zullen tegenkomen. Met de bovenstaande definities kan het stelsel vergelijkingen (6.7) dimensieloos gemaakt worden.

$$\begin{aligned} \psi'_{x'x'} + \psi'_{z'z'} &= 0 \\ \psi' &= 0 \quad \text{als} \quad z' = 0 \\ \psi' &= -Q' \quad \text{als} \quad z' = \eta' \\ \frac{1}{2}\left(\psi'^2_{x'} + \psi'^2_{z'}\right) + \eta' &= C' \quad \text{als} \quad z' = \eta' \end{aligned} \tag{6.9}$$

Dit dimensieloze stelsel is het uitgangspunt bij het opstellen van de stroomfunctie benadering. In de volgende paragrafen bespreken we hoe we de oplossingen van het stelsel kunnen benaderen.

6.2 Het stelsel vergelijkingen opstellen

De belangrijkste onbekenden uit het zojuist genoemde stelsel zijn de dimensieloze stroomfunctie ψ' en de dimensieloze waterhoogte η'. Rienecker en Fenton benaderen de oplossing voor ψ' met een soort Fourierreeks.

$$\psi'(x', z') = B_0 z' + \sum_{j=1}^{N} B_j \frac{\sinh(jk'z')}{\cosh(jk'D')} \cos(jk'x') \tag{6.10}$$

Hierin zijn de B_j's constanten. Over de bovenstaande reeks maken we drie belangrijke opmerkingen.

1. De reeks bevat slechts N termen. We zeggen dat dit een benadering van orde N is. De benadering bestaat hierbij uit het verwaarlozen van de termen uit de afgeknipte staart van de reeks;
$$\sum_{j=N+1}^{\infty} B_j \frac{\sinh(jk'z')}{\cosh(jk'D')} \cos(jk'x')\,.$$

2. De reeks is een even functie. Dit wordt gerechtvaardigd door een opmerking van Dean [Dea65]. Hij merkt op dat als de atmosferische druk p_α een even functie is, dan moet de stroomfunctie ψ ook even zijn.

   Voor later gebruik zullen we aantonen dat η' nu ook even is. Hiertoe herschrijven we de laatste vergelijking van (6.9) tot
$$\eta' = C' - \frac{1}{2}\left(\psi'^2_{x'} + \psi'^2_{z'}\right) \quad \text{als} \quad z' = \eta'\,.$$
   Omdat ψ' even is in de horizontale richting zijn $\psi'^2_{x'}$ en $\psi'^2_{z'}$ even functies. De constante C' is ook even. Omdat η' is onafhankelijk van z', volgt hieruit dat de hoogte van het wateroppervlak η' een even functie moet zijn.

3. Elke term uit de reeks wordt gedeeld door $\cosh(jk'D')$. Het is de bedoeling dat D' ongeveer gelijk wordt gekozen aan η'. Uit de relatie

$$\frac{\cosh(jk'\eta')}{\cosh(jk'D')} \sim \frac{\sinh(jk'\eta')}{\cosh(jk'D')} \sim e^{|j|k'(\eta'-D')} \tag{6.11}$$

kan worden gezien dat in dat geval de absolute waardes van de termen uit de reeks op $z' = \eta'$ ongeveer even groot worden. Dit blijkt een positieve invloed te hebben op de convergentie van de numerieke methode die we verderop zullen gebruiken [RF81].

Omdat η' gelijk is aan η/h is de gemiddelde waarde van η' gelijk aan 1. De waarde van D' wordt daarom meestal gelijkgesteld aan 1.

$$D' = 1$$

De keuze van D' heeft in theorie geen invloed op de uiteindelijke benadering van ψ'. Dit kan het beste worden ingezien door de factor $\cosh(jk'D')^{-1}$ te beschouwen als schaling van de constanten uit de reeks. We zullen voor verschillende waardes van D' andere waardes voor de constanten B_j vinden. Zodra we de constanten invullen in de reeks voor ψ' verdwijnt dit verschil echter weer.

Nu vullen we de bovenstaande reeks voor ψ' in, in het stelsel uitgangsvergelijkingen (6.9). Het blijkt dat de reeks al voldoet aan de eerste twee vergelijkingen van het stelsel. We noteren daarom alleen wat we krijgen als we de reeks in de onderste twee vergelijkingen invullen.

$$B_0\eta' + \sum_{j=1}^{N} B_j \frac{\sinh(jk'\eta')}{\cosh(jk'D')} \cos(jk'x') = -Q$$

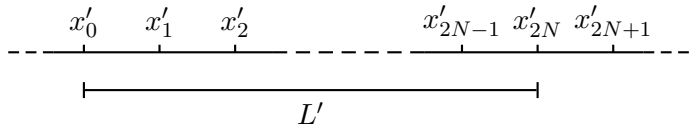
$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(k' \sum_{j=1}^{N} jB_j \frac{\sinh(jk'\eta')}{\cosh(jk'D')} \sin(jk'x')\right)^2 + \\ &\frac{1}{2}\left(B_0 + k' \sum_{j=1}^{N} jB_j \frac{\cosh(jk'\eta')}{\cosh(jk'D')} \cos(jk'x')\right)^2 + \eta' \quad = \quad C' \end{aligned} \tag{6.12}$$

Merk op dat we geen Fourierreeks invullen voor de onbekende η'. Dit blijkt onnodig voor de numerieke methode die we zullen toepassen.

Uit de bovenstaande twee vergelijkingen willen we de waarde van de constanten B_j bepalen. We zullen deze constanten niet analytisch oplossen, maar met een numerieke methode. Als invoer van deze methode zullen we hieronder een stelsel van $2N+6$ vergelijkingen opstellen.

De eerste $2N+2$ vergelijkingen van dit stelsel krijgen we door te eisen dat aan de bovenstaande vergelijkingen voldaan wordt op $2N$ punten die equidistant over een golflengte verdeeld liggen (zie figuur 6.4). We definiëren deze punten en de bijbehorende waardes van η' door

$$x'_m = \frac{L'}{2N} m = \frac{\pi}{Nk'} m \quad \text{en} \quad \eta'_m = \eta'(x'_m) \quad \text{voor} \quad m = 0\,, \ldots\,, 2N-1\,.$$



Figuur 6.4: De $2N$ punten $x'_0, \ldots, x'_{2N-1}$ overdekken precies één dimensieloze golflengte L'. Omdat de golf zichzelf herhaalt, is het punt x'_{2N} identiek aan het punt x'_0.

Als we deze punten invullen in de vergelijkingen (6.12) krijgen we voor de bovenste vergelijking

$$B_0\eta'_m + \sum_{j=1}^{N} B_j \frac{\sinh(jk'\eta'_m)}{\cosh(jk'D')} \cos(jm\pi/N) + Q = 0 \quad \text{voor} \quad m = 0\,,\,\ldots\,,\,2N-1\,. \tag{6.13}$$

Omdat de dimensieloze waterhoogte η' en de cosinus even functies zijn krijgen we er voor m groter dan N geen nieuwe vergelijkingen meer bij. In de numerieke methode zullen we de bovenstaande vergelijking daarom alleen gebruiken voor $m = 0, \ldots, N$. Merk op dat deze punten precies een halve golflengte overdekken.

We eisen ook dat op de $2N$ bovenstaande punten aan de tweede vergelijking uit (6.12) voldaan wordt. We krijgen dan

$$\frac{1}{2}v'^2_m + \frac{1}{2}u'^2_m + \eta'_m - C' = 0 \quad \text{voor} \quad m = 0\,,\,\ldots\,,\,2N-1\,. \tag{6.14}$$

met

$$u'_m = B_0 + k' \sum_{j=1}^{N} jB_j \frac{\cosh(jk'\eta'_m)}{\cosh(jk'D')} \cos(jm\pi/N) \tag{6.15}$$

en

$$v'_m = k' \sum_{j=1}^{N} jB_j \frac{\sinh(jk'\eta'_m)}{\cosh(jk'D')} \sin(jm\pi/N)\,.$$

Het blijkt dat deze vergelijking voor m groter dan N geen aanvullende vergelijkingen meer oplevert. We gebruiken ook vergelijking (6.14) daarom in de numerieke methode alleen voor $m = 0, \ldots, N$.

Door te eisen dat de vergelijkingen (6.13) en (6.14) moeten gelden voor $m = 0, \ldots, N$ hebben we 2 keer $N + 1$ vergelijkingen gevonden. We hebben echter $2N + 6$ onbekenden.

$$\underbrace{B_0, \ldots, B_n}_{N+1}, \underbrace{\eta'_0, \ldots, \eta'_N}_{N+1}, k', Q', C', c'$$

De eerste $2N + 5$ van deze onbekenden komen voor in de hierboven opgestelde vergelijkingen. De laatste onbekende, de dimensieloze golfsnelheid c', is eigenlijk al een onbekende vanaf het moment dat we het meebewegende coördinatenstelsel kozen.

Voor de numerieke methode willen we evenveel vergelijkingen als onbekenden. We zullen daarom nog vier vergelijkingen moeten opstellen. We nemen hierbij aan dat de volgende vier grootheden gegeven zijn.

1. De gemiddelde waterdiepte h (deze grootheid gebruikten we eerder bij het dimensieloos maken van het stelsel vergelijkingen)

2. De dimensieloze golfhoogte H'
3. De dimensieloze periode T'
4. De dimensieloze gemiddelde horizontale stroomsnelheid c'_e gemeten vanuit het stilstaande coördinatenstelsel **of** de dimensieloze gemiddelde horizontale volumeflux c'_s van het water gemeten vanuit het stilstaande coördinatenstelsel

De eerste aanvullende vergelijking ontstaat doordat de gemiddelde waarde van de waterhoogte η gelijk moet zijn aan de gemiddelde waterdiepte h. Omdat de waterhoogte η dimensieloos is gemaakt met de gemiddelde waterdiepte h, moet de gemiddelde waarde van de dimensieloze waterhoogte η' gelijk zijn aan 1. De gemiddelde waarde van η' over één golflengte is gelijk aan $\frac{1}{L'}\int_0^{L'} \eta' \, \mathrm{d}x'$. Deze integraal benaderen we met de trapeziumregel.

$$\frac{1}{2N}\left(\eta'_0 + 2\sum_{j=1}^{N-1} \eta'_j + \eta'_N\right) - 1 = 0 \tag{6.16}$$

De trapeziumregel geeft natuurlijk slechts een benadering van de gemiddelde waarde van η'. Door voor η' een even Fourierreeks op te schrijven kan echter worden aangetoond dat de fout die bij deze benadering gemaakt wordt van dezelfde soort is als het afkappen van de Fourierreeks voor ψ'.

De tweede aanvullende vergelijking krijgen we door te eisen dat de golfhoogte H gelijk is aan de verticale afstand tussen de top en het dal van de golf. Omdat η' even is wordt de top van de golf bereikt boven het punt x'_0 en het dal boven x'_N. De golfhoogte H moet dus gelijk zijn aan $\eta_0 - \eta_N$. In dimensieloze vorm kunnen we dit opschrijven als

$$\eta'_0 - \eta'_N - H' = 0\,. \tag{6.17}$$

Voor het opschrijven van de derde aanvullende vergelijking bekijken we de golf tijdelijk vanuit het stilstaande coördinatenstelsel. Het golfgetal k in het stilstaande coördinatenstelsel is gelijk aan het golfgetal dat we meten vanuit het bewegende stelsel. Vanuit het stilstaande coördinatenstelsel gezien hangen de golfsnelheid c en de periode T dus met elkaar samen volgens

$$c = \frac{\omega}{T} = \frac{2\pi}{kT}$$

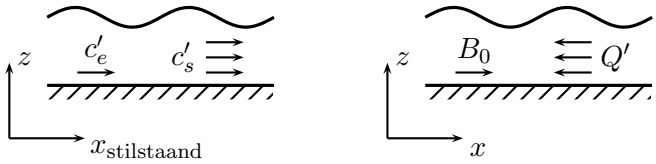
waarbij k het golfgetal in zowel het bewegende als het stilstaande coördinatenstelsel is. Als we deze vergelijking dimensieloos maken krijgen we

$$k'c'T' - 2\pi = 0\,. \tag{6.18}$$

Gegeven de golfsnelheid c' relateert deze vergelijking de golflengte $L' = 2\pi/k'$ aan de periode T' van de golf. De vergelijking kan daarom beschouwd worden als een dispersierelatie.

We krijgen de laatste aanvullende vergelijking door de waterstroming te bekijken vanuit zowel het stilstaande als het bewegende coördinatenstelsel. We nemen aan dat de gemiddelde dimensieloze horizontale stroomsnelheid c'_e of de gemiddelde dimensieloze horizontale volumeflux c'_s gemeten vanuit het stilstaande coördinatenstelsel gegeven is.

De gemiddelde dimensieloze horizontale stroomsnelheid gezien vanuit het stilstaande coördinatenstelsel is bij onze benadering voor ψ' gelijk aan $c + B_0$. Omdat we snelheden mogen optellen (zie figuur 6.5) krijgen we nu de vergelijking



Figuur 6.5: Hierboven zijn de grootheden uit de vierde aanvullende vergelijking in het stilstaande (links) en het meebewegende (rechts) coördinatenstelsel weergegeven. Het verschil tussen snelheden in de beide stelsels is gelijk aan de golfsnelheid c'.

$$c' - c'_e + B_0 = 0\,. \tag{6.19}$$

Als de gemiddelde dimensieloze horizontale stroomsnelheid gegeven is nemen we als vierde vergelijking.

Als gemiddelde dimensieloze horizontale volumeflux c'_s gegeven is gebruiken we

$$c' - c'_s - Q = 0 \tag{6.20}$$

als vierde vergelijking. Om deze vergelijking te verkrijgen bedenken we dat de dimensieloze volumeflux van het water gemeten vanuit het meebewegende coördinatenstelsel volgens onze uitgangsvergelijkingen gelijk aan $-Q$. De dimensieloze horizontale volumeflux c'_s in het stilstaande stelsel is dus gelijk aan $c' - Q'$ (zie figuur 6.5).

We hebben nu een stelsel van $2N + 6$ vergelijkingen met $2N + 6$ onbekenden. Voor de overzichtelijkheid vatten we het stelsel hieronder samen.

gegevens	h, H', T' en c'_e of c'_s
onbekenden	$B_0, \ldots, B_n$, $\eta'_0, \ldots, \eta'_N$, k', Q', C', c'
vergelijkingen	(6.13), (6.14), (6.16), (6.17), (6.18) en (6.19) of (6.20)

In de volgende paragraaf bespreken we hoe dit stelsel met een numerieke methode kan worden opgelost.

6.3 Het stelsel numeriek oplossen

Het hierboven opgestelde stelsel van $2N + 6$ vergelijkingen kunnen we opschrijven als de vectorvergelijking

$$\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \tag{6.21}$$

waarbij de vector $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{2N+6}$ de onbekenden bevat

$$\mathbf{z} = \left(\eta'_0, \ldots, \eta'_N, B_0, \ldots, B_n, c', k', Q', C'\right)^{\mathrm{T}} \tag{6.22}$$

en de vectorfunctie $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{2N+6} \to \mathbb{R}^{2N+6}$ gegeven wordt door $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = (f_1(\mathbf{z}), \ldots, f_{2N+6}(\mathbf{z}))^{\mathrm{T}}$ met

$$f_i = \begin{cases} (6.13) & \text{als } i = 1, \ldots, N+1 \\ (6.14) & \text{als } i = N+2, \ldots, 2N+2 \\ (6.16) & \text{als } i = 2N+3 \\ (6.17) & \text{als } i = 2N+4 \\ (6.18) & \text{als } i = 2N+5 \\ (6.19) \text{ of } (6.20) & \text{als } i = 2N+6 \end{cases}\,. \tag{6.23}$$

Met de verwijzingen (6.·) in deze definitie wordt natuurlijk de functie links van het gelijkteken in vergelijking (6.·) bedoeld. Met (6.20) bedoelen we bijvoorbeeld de functie $c' - c'_s - Q$.

In principe kan de vectorvergelijking $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ met verschillende numerieke methodes worden opgelost. Rienecker en Fenton kiezen er in hun artikel voor het stelsel op te lossen met de methode van Newton. Dit is een iteratieve methode die gegeven een goede beginschatting $\mathbf{z}^0$ kwadratisch naar de oplossing van het stelsel $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ convergeert. We zullen hieronder kort bespreken hoe Rienecker en Fenton de methode van Newton gebruiken om het bovenstaande stelsel op te lossen. Voor de details verwijzen we naar het artikel [RF81, §2.2].

Bij de methode van Newton wordt een nieuwe benadering van de oplossing $\mathbf{z}^{n+1}$ verkregen uit de vorige benadering $\mathbf{z}^n$ uit de matrixvergelijking

$$A(\mathbf{z}^{n+1} - \mathbf{z}^n) = -\mathbf{f}(\mathbf{z}^n)$$

waarbij de $(2N+6) \times (2N+6)$ matrix A gegeven wordt door

$$A = (a_{ij}) \quad \text{met} \quad a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(\mathbf{z}^n)\,.$$

In hun artikel beschrijven Rienecker en Fenton gedetailleerd de elementen van de matrix A. We zullen hun beschrijving niet overnemen, maar verwijzen hiervoor naar [RF81, pagina 124 en 125].

Als beginschatting $\mathbf{z}^0$ kiezen Rienecker en Fenton een vector die correspondeert met een lineaire benadering.

$$\eta'_m = 1 + \frac{1}{2}H' \cos(m\pi/N)$$

$$B_j = \begin{cases} -c' & \text{als } j = 0 \\ -\frac{H'}{4c'k'} & \text{als } j = 1 \\ 0 & \text{als } j = 2, \ldots, N \end{cases}$$

$$C' = 1 + \frac{1}{2}c'^2 \qquad Q' = c'$$

Hierbij worden de waardes van c' en k' recursief bepaald uit

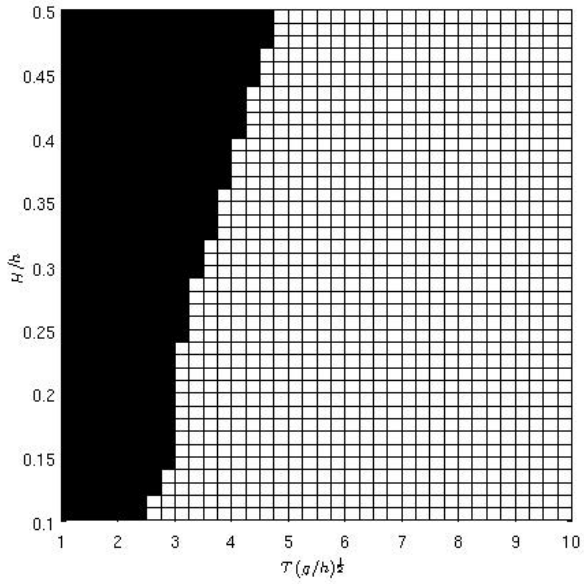
$$k'_{j+1} = \frac{2\pi}{T'c'_j}\,, \qquad c'_{j+1} = \sqrt{\frac{\tanh(k'_{j+1})}{k'_{j+1}}}$$

waarbij als beginschatting $c'_0 = 1$ genomen wordt.

Rienecker en Fenton waarschuwen dat de methode van Newton met de lineaire beginschatting soms niet convergeert bij hoge golven (zie ook figuur 6.6). We kunnen in zo'n geval een andere beginschatting kiezen. Rienecker en Fenton extrapoleren bij hoge golven de stroomfunctie benadering lagere golven tot een nieuwe beginschatting.

We hebben bij de schatting (6.11) een theoretisch argument gegeven voor de keuze $D' = 1$. Bij het opstellen van de numerieke vergelijkingen hebben we deze waarde van D' echter nog niet ingevuld. Rienecker en Fenton hebben de methode van Newton getest met verschillende waardes voor D'. Zij ondervonden dat de methode bij korte golven niet convergeert bij de keuze $D' = 0$. De methode convergeert wel als D' gelijk wordt gesteld aan 1. De keuze

$$D' = 1$$



Figuur 6.6: In deze grafiek is het deel waar de methode van Newton met lineaire beginschatting niet convergeert zwart gekleurd. De methode convergeert niet bij golven met heel kleine periode ($T\sqrt{g/h} < 3$) en ook niet bij te hoge golven met een tamelijk kleine periode ($T\sqrt{g/h} < 5$).

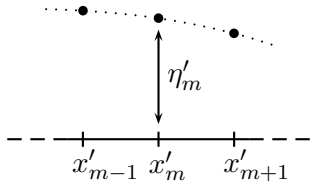
beïnvloedt de convergentie van de numerieke methode dus inderdaad positief.

Hierboven hebben we kort besproken hoe Rienecker en Fenton de methode van Newton gebruiken. Gegeven de waardes van N, h, H', T', c'_e of c'_s en D' kunnen we met de bovenstaande methode de vectorvergelijking $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ meestal numeriek oplossen. Als de methode van Newton niet convergeert kunnen we de beginschatting veranderen of een andere numerieke methode proberen. Het is ook mogelijk de methode van Newton te combineren met een andere numerieke methode. We benaderen dan eerst de oplossing van $\mathbf{f}(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ met de andere numerieke methode en gebruiken deze benadering vervolgens als beginschatting van de methode van Newton voor kwadratische convergentie.

6.4 Resultaten voor de praktijk

Het resultaat van de hierboven gepresenteerde numerieke methode is een vector $\mathbf{z}$ met de numerieke oplossingen voor $\eta'_0, \ldots, \eta'_N$, $B_0, \ldots, B_n$, c', k', Q' en C'. Met deze grootheden kunnen we uit (6.10) de stroomfunctie benadering voor de dimensieloze stroomfunctie ψ' bepalen. Bovendien weten we in $N+1$ punten wat de dimensieloze hoogte van het wateroppervlak η' is. Op deze resultaten is het nodige aan te merken.

1. De dimensieloze hoogte van het wateroppervlak η' is op $N+1$ punten per golflengte bekend. Als we bedenken dat η' even is, kunnen we de waarde van η' dus bepalen op $2N$ punten die equidistant over één golflengte verspreid liggen. We zouden echter ook graag de waarde van η' tussen deze punten weten.



Figuur 6.7: Na het uitvoeren van de numerieke methode weten we alleen dat het wateroppervlak door de punten (x'_m, η'_m) gaat. We moeten interpoleren om het hele golfprofiel te bepalen.

2. De resultaten van de numerieke methode zijn dimensieloos. We willen echter resultaten met een fysische betekenis.

3. De resultaten beschrijven de waterstroming zoals gezien vanuit een coördinatenstelsel dat met de golf meebeweegt. We willen liever weten hoe de waterstroming eruit ziet bekeken vanuit een stelsel dat stil staat.

In deze paragraaf bespreken we hoe we de resultaten van de numerieke methode omzetten naar resultaten voor praktische toepassingen. We werken hierbij de hierboven genoemde aanmerkingen van boven naar beneden af. We zullen dus eerst bespreken hoe we de dimensieloze waterhoogte η' op elk punt bepalen.

Om op alle punten de dimensieloze waterhoogte η' te kunnen bepalen zullen we de resultaten van de numerieke methode $\eta'_0, \ldots, \eta'_N$ moeten interpoleren. Het ligt in de lijn van onze benadering voor de dimensieloze stroomfunctie ψ' om deze interpolaties uit te voeren met een afgekapte Fourierreeks van N termen.

$$\eta'(x') = 1 + \sum_{j=1}^{N} A_j \cos(jk'x') \tag{6.24}$$

Bij het opstellen van deze reeks hebben we gebruik gemaakt van het feit dat η' een even functie is en dat de gemiddelde waarde van η' precies 1 is, omdat de waterhoogte η dimensieloos is gemaakt met de gemiddelde waterdiepte h.

De constanten A_j uit de Fourierreeks (6.24) worden bepaald door te eisen dat de reeks door de punten (x'_m, η'_m) gaat voor $m = 0, \ldots, N$. De fout die we maken door met de bovenstaande reeks te interpoleren ontstaat door het afkappen van de reeks. Dit is consistent met de fout die we maken bij het benaderen van ψ'.

We hebben hierboven een Fourierreeks voor η' opgesteld waarmee we overal de waarde van η' kunnen benaderen. Nu zullen we onze dimensieloze resultaten omzetten in natuurkundige grootheden. Dit kan heel eenvoudig met behulp van de definities in (6.8). Omdat geldt dat $\psi = \sqrt{gh^3}\psi'$ vinden we uit ons voorstel (6.10) de reeks

$$\psi(x', z') = \sqrt{gh^3} \cdot \psi'(x', z') = \sqrt{gh^3} \left(B_0 z' + \sum_{j=1}^{N} B_j \frac{\sinh(jk'z')}{\cosh(jk'D')} \cos(jk'x') \right)$$

voor de stroomfunctie ψ. We zouden ψ echter graag schrijven als functie van x en z in plaats van de dimensieloze coördinaten x' en z'. Hiervoor gebruiken we dat $x' = x/h$ en $z' = z/h$.

Het resultaat is de stroomfunctie ψ als functie van x en z.

$$\psi(x,z) = \sqrt{gh^3}\left(B_0\frac{z}{h} + \sum_{j=1}^{N} B_j \frac{\sinh(jk'z/h)}{\cosh(jk'D')}\cos(jk'x/h)\right)$$

We laten hierin het golfgetal dimensieloos, zodat hij zonder nabewerking uit het resultaat van de numerieke methode gehaald kan worden.

Door de bovenstaande stappen te herhalen bij de Fourierreeks voor de dimensieloze golfhoogte η' uit (6.24) vinden we een uitdrukking voor de golfhoogte η.

$$\eta(x) = h + h\sum_{j=1}^{N} A_j \cos(jk'x/h) \tag{6.25}$$

De horizontale stroomsnelheid u is gelijk aan $\partial\psi/\partial z$. Uit de zojuist afgeleide reeks voor de stroomfunctie ψ vinden we de volgende benadering voor u.

$$u(x,z) = \frac{\partial\psi}{\partial z} = \sqrt{gh}\left(B_0 + \sum_{j=1}^{N} jB_jk' \frac{\cosh(jk'z/h)}{\cosh(jk'D')}\cos(jk'x/h)\right) \tag{6.26}$$

Op dezelfde manier kan de verticale stroomsnelheid $w = -\partial\psi/\partial x$ uit de stroomfunctie ψ bepaald worden.

Hierboven hebben we laten zien hoe we uit de resultaten van de numerieke methode benaderingen van de stroomfunctie ψ en de waterhoogte η kunnen verkrijgen die niet langer dimensieloos zijn. Deze benaderingen veronderstellen dat we met de golf meebewegen. In de praktijk bekijken we de golf echter vanuit een stilstaand coördinatenstelsel. Hieronder bespreken we hoe de hierboven verkregen resultaten er in zo'n stilstaand stelsel uitzien.

In het begin van dit hoofstuk merkten we op dat de stilstaande horizontale coördinaat x_s en de meebewegende horizontale coördinaat x gerelateerd zijn door

$$x = x_s - ct\,.$$

In het meebewegende stelsel wordt de waterhoogte benaderd door de functie η in (6.25). De waterhoogte gezien vanuit het stilstaande stelsel wordt verkregen door de bovenstaande uitdrukking voor x in te vullen in deze benadering voor η. Het resultaat is een benadering η_s voor de waterhoogte gezien vanuit het stilstaande stelsel.

$$\eta_s(x_s,t) = h + h\sum_{j=1}^{N} A_j \cos(jk'(x_s/h - gc't)) \tag{6.27}$$

Intuïtief lijkt het nuttig deze stap ook uit te voeren voor de stroomfunctie ψ. Dit is echter niet het geval. De ψ die we op dit moment hebben beschrijft de waterstroming in het meebewegende stelsel zoals gezien vanuit het meebewegende stelsel. Als we in deze stroomfunctie x overal vervangen door $x_s - ct$ krijgen we een benadering van de stroomfunctie voor de stroming in het meebewegende stelsel zoals gezien vanuit het stilstaande stelsel. We willen echter de stroomfunctie die iets zegt over de stroming in het stilstaande stelsel.

We zullen laten zien dat we toch de horizontale stroomsnelheid in het stilstaande stelsel kunnen bepalen. Om de bovenstaande moeilijkheden te omzeilen nemen we als uitgangspunt

niet de stroomfunctie ψ, maar de horizontale stroomsnelheid u in het bewegende stelsel. Deze meebewegende u hebben we hierboven bij (6.26) verkregen. Heel precies geformuleerd is deze u is een benadering van de stroomsnelheid in het meebewegende stelsel gezien vanuit het meebewegende stelsel. Door $x = x_s - ct$ te gebruiken krijgen we een benadering van de stroomsnelheid in het meebewegende stelsel gezien vanuit het stilstaande stelsel.

$$u(x_s, z, t) = \sqrt{gh}\left(B_0 + \sum_{j=1}^{N} jB_j k' \frac{\cosh(jk'z/h)}{\cosh(jk'D')} \cos(jk'(x_s/h - gc't))\right) \tag{6.28}$$

We willen natuurlijk de stroomsnelheid in het stilstaande stelsel weten. Uit de gelijkheid

$$u_s = \frac{\partial x_s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(x + ct) = \frac{\partial x}{\partial t} + c = u + c$$

volgt dat een stroomsnelheid in het stilstaande stelsel u_s gelijk is aan de som van c en de stroomsnelheid in het bewegende stelsel u. Als we gebruiken dat c gelijk is aan ghc' vinden we

$$u_s(x_s, z, t) = ghc' + \sqrt{gh}\left(B_0 + \sum_{j=1}^{N} jB_j k' \frac{\cosh(jk'z/h)}{\cosh(jk'D')} \cos(jk'(x_s/h - gc't))\right) \tag{6.29}$$

als benadering voor de stroomsnelheid in het stilstaande stelsel gezien vanuit het stilstaande stelsel. Op soortgelijke wijze kan een benadering voor de verticale stroomsnelheid in het stilstaande stelsel worden gevonden. Het resultaat staat hieronder.

$$w_s(x_s, z, t) = \sqrt{gh}\left(\sum_{j=1}^{N} jB_j k' \frac{\sinh(jk'z/h)}{\cosh(jk'D')} \sin(jk'(x_s/h - gc't))\right) \tag{6.30}$$

Hierboven hebben we uit de resultaten van de numerieke methode benaderingen verkregen die bruikbaar zijn in de praktijk. De belangrijkste eindresultaten zijn de stroomfunctie benaderingen (6.27), (6.29) en (6.30) van respectievelijk de waterhoogte η, de horizontale component van de stroomsnelheid u_s en de verticale component van de stroomsnelheid w_s.

6.5 De stroomfunctie benadering in de praktijk

We hebben in de afgelopen paragrafen uitvoerig besproken hoe een stroomfunctie benadering verkregen wordt. Merk op dat veel in onze bespreking bedoeld was om de benadering te rechtvaardigen of toe te lichten. Als we de wiskundige overwegingen achter de stroomfunctie benadering vertrouwen komt het verkrijgen van een benadering echter slechts neer op het doen de volgende stappen.

1. Het verzamelen van de gegevens h, H, T en c_e of c_s en het kiezen van het aantal termen van de Fourierreeks N.

2. Het stelsel onderaan pagina 55 op de computer invoeren.

3. Dit stelsel oplossen met een numerieke methode.

4. De numerieke oplossingen invullen in de benaderingen voor η, u_s, en w_s (uit respectievelijk (6.27), (6.29) en (6.30)).

De tweede, derde en vierde stap kunnen worden uitgevoerd door een computerprogramma. Hierdoor is de stroomfunctie benadering net zo gemakkelijk in gebruik als de Stokes benaderingen.

In het bovenstaande stappenplan is duidelijk te zien dat de numerieke methode een grote rol speelt bij het verkrijgen van de stroomfunctie benadering. Een belangrijk verschil tussen de Stokes benaderingen en de stroomfunctie benadering is het gebruik van de numerieke methode. Bij een Stokes benadering wordt met de numerieke methode de waarde van slechts een paar onbekenden bepaald, terwijl bij de stroomfunctie benadering alle onbekenden met de numerieke methode bepaald worden.

6.6 De nauwkeurigheid en toepasbaarheid

In deze paragraaf bespreken we de nauwkeurigheid en toepasbaarheid van de stroomfunctie benadering. Bij het bepalen van de nauwkeurigheid vragen we ons af hoe goed de stroomfunctie benaderingen de echte oplossingen van de oorspronkelijke vergelijkingen benaderen. Bij het bepalen van de toepasbaarheid vragen we ons af wanneer er een stroomfunctie benadering verkregen kan worden. De toepasbaarheid is afhankelijk van het convergeren van de numerieke methode. Als de numerieke methode niet convergeert kunnen we geen stroomfunctie benadering verkrijgen en is de stroomfunctie benadering niet toepasbaar.

We willen eerst de nauwkeurigheid van de stroomfunctie benadering bespreken. Als de stroomfunctie benadering niet toepasbaar is heeft het geen zin de nauwkeurigheid van de benadering te bespreken. We nemen daarom voorlopig aan dat de numerieke methode uit het stappenplan convergeert.

We nemen aan dat een stroomfunctie benadering van oneindig hoge orde

$$\psi'(x', z') = B_0 z' + \sum_{j=1}^{\infty} B_j \frac{\sinh(jk'z')}{\cosh(jk'D')} \cos(jk'x')$$

een echte oplossing is van het stelsel vergelijkingen van ons model. We nemen ook aan dat er een redelijk laag getal M is zodat de benadering

$$\psi'(x', z') = B_0 z' + \sum_{j=1}^{N} B_j \frac{\sinh(jk'z')}{\cosh(jk'D')} \cos(jk'x')$$

voor toenemende orde $N \geq M$ steeds dichter bij deze echte oplossing komt.

Het voordeel van de stroomfunctie benadering is dat de computer de vervelende berekeningen uitvoert. We kunnen dus een stroomfunctie benadering van heel hoge orde N opstellen zonder dat we ons zelf zorgen hoeven te maken over het rekenwerk. Door N veel groter te kiezen dan M kunnen we de echte oplossingen van het stelsel vergelijkingen uit ons model zeer nauwkeurig benaderen. Het is zelfs mogelijk benaderingen met een gewenste nauwkeurigheid te verkrijgen door de orde N te verhogen totdat de bijbehorende benaderingen voor η, u_s en w_s bijna niet meer veranderen.

De orde kan natuurlijk niet willekeurig hoog gekozen worden. Het is mogelijk dat de numerieke methode convergeert voor een hoge orde N, maar dat de computer pas na twee

dagen klaar is met rekenen. De keuze van de orde wordt dus naar boven begrensd door te eisen dat de rekentijd acceptabel blijft.

Er kunnen nauwkeurige stroomfunctie benaderingen verkregen worden voor zowel diep als ondiep water. In dit opzicht verschilt de stroomfunctie benadering van de Stokes en lange golven benaderingen. Deze benaderingen bleken namelijk een voorkeur te hebben voor respectievelijk diep of ondiep water. In dit opzicht geeft de stroomfunctie benadering in meer gevallen een nauwkeurige benadering dan de Stokes en lange golven benaderingen.

We bespreken nu kort de toepasbaarheid van de stroomfunctie benadering. Zoals gezegd is de stroomfuncie benadering niet toepasbaar als de numerieke methode niet convergeert. Eerder in dit hoofdstuk merkten we op dat de door Rienecker en Fenton voorgestelde methode niet convergeert bij hele korte of hoge golven. In zo'n geval loont het vaak om af te wijken van deze methode. We zagen bijvoorbeeld dat de convergentie in veel gevallen verbeterd kan worden door een andere beginschatting dan de lineaire golf te kiezen. Rienecker en Fenton extrapoleren bij hoge golven de beginschatting vanuit de stroomfunctie benadering voor een lagere golf. Als dit nog steeds niet zorgt voor convergentie kan een andere numerieke methode uitkomst bieden.

Als we bereid zijn af te wijken van het door Rienecker en Fenton gegeven computerprogramma, is het in bijna alle gevallen mogelijk een stroomfunctie benadering te verkrijgen. Zoals gezegd hebben we hiervoor een flexibel programma nodig waarmee we kunnen afwijken van de lineaire beginschatting en in sommige gevallen zelfs een andere numerieke methode kunnen gebruiken.

Samengevat is de stroomfunctie benadering zeer nauwkeurig en vaak toepasbaar. Hierdoor is de stroomfunctie benadering erg populair. In de literatuur wordt de stroomfunctie benadering vaak geprezen. Hieronder plaatsen we enkele aanprijzingen.

1. Rienecker en Fenton zelf vergelijken de stroomfunctie benadering in hun artikel [RF81] met andere nauwkeurige benaderingen zoals de zeer hoge-orde Stokes benaderingen van Cokelet. Ze vinden dat het verschil tussen de benaderingen verwaarloosbaar klein wordt voor orde groter dan 64. De stroomfunctie benadering doorstaat ook de vergelijking met experimentele resultaten succesvol.

2. Svendsen prijst in zijn boek [Sve06, pagina 378] de nauwkeurigheid van de stroomfunctie benadering van Rienecker en Fenton. Hij vindt de stroomfunctie benadering zelfs zo nauwkeurig dat hij voorstelt de benadering te gebruiken om andere benaderingen te verifiëren.

   > *"Since the stream function results can be made as accurate as wanted by including enough terms in the expansion it can be used to provide reference results for analytical wave theories."*

   Hij waarschuwt echter dat voor het nauwkeurig benaderen van hoge golven vaak een hoge-orde stroomfunctie benadering benodigd is.

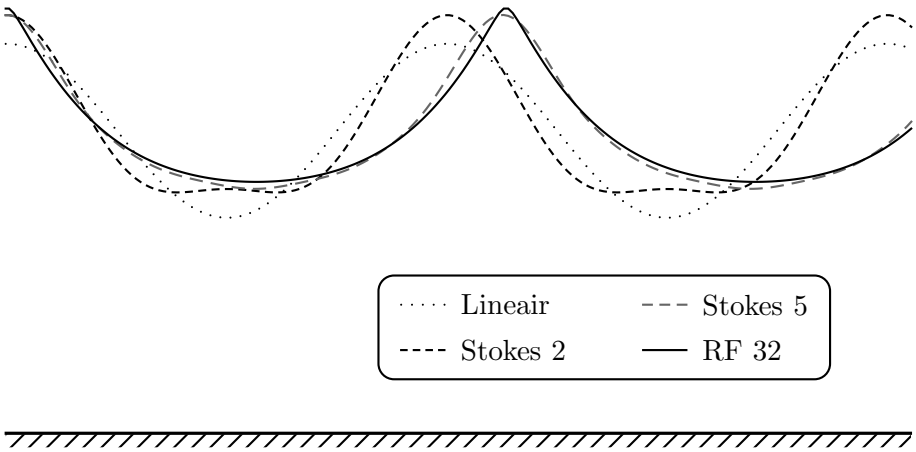
   > *"However, Svendsen and Justusen (1984) found that accurate results for very high waves required using up to 64th order..."*

3. In het artikel [Fen85] over de vijfde-orde Stokes benadering zegt Fenton dat de resultaten van de stroomfunctie benadering zo nauwkeurig zijn dat ze kunnen worden gebruikt om de nauwkeurigheid van andere benaderingen te onderzoeken.

Hoofdstuk 7

Discussie

In de voorgaande hoofdstukken hebben we vier benaderingen van golven besproken. We begonnen eenvoudig met de lineaire golven en behandelden daarna de tweede-orde Stokes benadering, de vijfde-orde Stokes benadering en de stroomfunctie benadering. In deze discussie zetten we eerst de belangrijkste voor- en nadelen van de besproken benaderingen op een rijtje. Daarna geven we aan welke benadering de voorkeur verdient.



Figuur 7.1: In dit figuur zijn de benaderingen van het wateroppervlak van een golf met hoogte $H = 2.3$, periode $T = 3.8$ en gemiddelde waterdiepte $h = 4.0$ bij elkaar gezet. Deze invoer is zo gekozen, dat de Stokes benaderingen het duidelijk afleggen tegen de stroomfunctiebenadering. De Stokes benaderingen in deze grafiek komen voor toenemende orde wel steeds dichter bij de stroomfunctie benadering. Merk op dat de tweede-orde Stokes benadering bij de gegeven invoer een niet-realistische extra top krijgt, maar dat deze top bij de vijfde-orde Stokes benadering niet aanwezig is. Als we de lineaire benadering en de tweede-orde Stokes benadering vergelijken met de stroomfunctie benadering, valt op dat de dispersierelatie van de eerste twee benaderingen de echte golflengte niet erg nauwkeurig benadert. De dispersierelatie van de vijfde-orde Stokes benadering geeft wel een goede benadering van de golflengte.

Lineaire golven

+ De lineaire golf kan eenvoudig worden afgeleid en benadert de laagste golven in bijna stilstaand water redelijk nauwkeurig.
+ De benadering kan zonder numerieke methode verkegen worden.

– Het is onduidelijk hoe goed de benadering bruikbaar is voor golven die hoger zijn dan de allerlaagste.

De tweede-orde Stokes benadering

+ De benadering corrigeert de lineaire benadering met een extra term.
+ De benadering kan soms zonder numerieke methode verkegen worden.

– We hebben alleen een criterium dat aangeeft voor welke golven de benadering niet bruikbaar is. Het is onduidelijk wanneer de benadering wel bruikbaar is.
– Het afleiden van de tweede-orde Stokes benadering is lastig.

De vijfde-orde Stokes benadering

+ De benadering bevat termen die de bovengenoemde benaderingen corrigeren.
+ Bijna alle onbekenden uit de reeks kunnen worden opgeschreven als expliciete analytische functies.

– Het is onduidelijk hoe nauwkeurig de benadering is.
– Het afleiden van de vijfde-orde Stokes benadering kost veel meer tijd dan de afleiding van de voorgaande twee benaderingen.
– De benadering is zo lang, dat hij eigenlijk niet geschikt is voor berekeningen met pen en papier.
– De waarde van bepaalde onbekenden uit de benadering moeten met een numerieke methode worden berekend.

De stroomfunctie benadering

+ Een hoge-orde stroomfunctie benadering is heel nauwkeurig. In de literatuur wordt de stroomfunctie benadering vaak gebruikt wordt om andere benaderingen te verifiëren.
+ De benadering hoeft niet te worden afgeleid, omdat de computer al het rekenwerk doet.

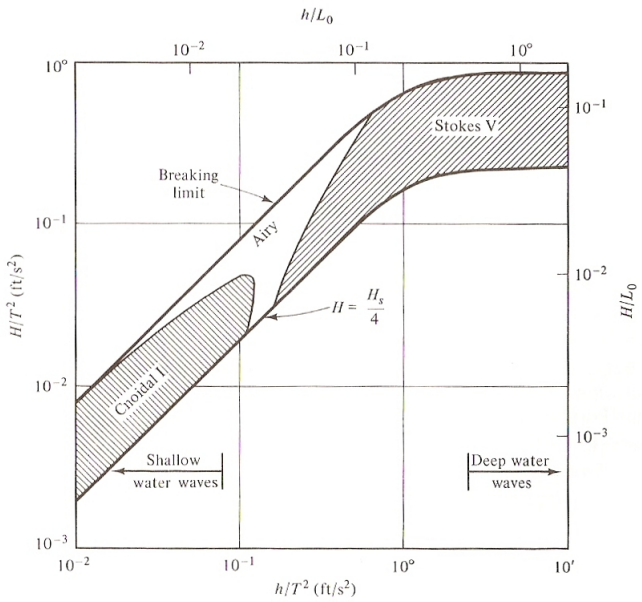
– Alle termen van de benadering moeten worden verkregen met een numerieke methode.
– Voor sommige golven convergeert de eenvoudigste numerieke methode niet. In zo'n geval moeten we maatregelen nemen om de convergentie te verbeteren.

Bij de bovenste drie benaderingen noemen we als nadeel dat het onduidelijk is hoe nauwkeurig ze zijn. Hiermee bedoelen we niet dat het voor deze benaderingen onmogelijk is na te gaan hoe nauwkeurig ze echte golven benaderen. We kunnen immers elke benadering verifiëren met een hoge-orde stroomfunctie benadering. We bedoelen dat we niet hebben onderzocht voor welke golven de benaderingen nauwkeurig zijn en voor welke golven dit niet zo is. Voor een dergelijk onderzoek zouden we voor een heleboel verschillende situaties alle benaderingen en een bijbehorende hoge-orde stroomfunctie benadering moeten opstellen. Vervolgens kunnen de benaderingen dan allemaal met deze hoge-orde stroomfunctie benadering worden vergeleken. Voor zo'n onderzoek was helaas geen tijd meer.

We zullen nu aangeven welke benadering het beste gebruikt kan worden. Als we een nauwkeurige benadering willen, volgt uit het voorgaande overtuigend dat een hoge-orde stroomfunctie benadering de voorkeur verdient. Zoals we hebben gezien wordt de stroomfunctie benadering ook in de literatuur als beste keuze beschouwd.

We hebben zelf niet kunnen onderzoeken welke benadering na de stroomfunctie benadering het nauwkeurigste is. We verwijzen wel graag naar [DD91, §11.5]. Hierin noemt men een artikel van Dean waarin een dergelijk onderzoek wel is gedaan. In dit onderzoek heeft Dean uitgezocht welke analytische benadering het beste aan het stelsel vergelijkingen uit ons model voldoet. Intuïtief lijkt dit een redelijke maat voor de nauwkeurigheid van de benadering. Merk wel op dat deze maat niet direct aangeeft hoe goed de benaderingen de echte oplossingen van het stelsel vergelijkingen benaderen.

Dean presenteert zijn conclusies in een grafiek (zie figuur 7.2). Hierin is te zien dat in diep water de vijfde-orde Stokes benadering het beste aan de vergelijkingen voldoet. In ondiep water is een lange golven benadering de beste keuze. Een opmerkelijk resultaat is dat in



Figuur 7.2: Deze grafiek geeft aan wanneer welke benadering de vergelijkingen van ons model het beste oplost. De *cnoidal 1* benadering is een lange golven benadering en met *airy* wordt een lineaire benadering bedoeld. [DD91]

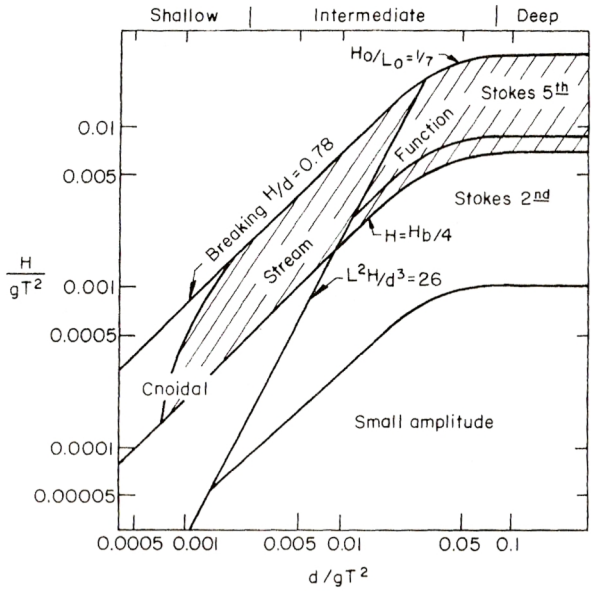
water van middelmatige diepte de lineaire golf het beste aan de vergelijkingen voldoet. In [DD91, §11.5] wordt bevestigd dat de analytische benaderingen in geen geval beter aan het stelsel vergelijkingen uit ons model voldoen dan de stroomfunctie benadering.

> *"However, when high-order stream function wave theory is used, it provides the best fit of all the theories, even in shallow water (although quite high orders, such as twentieth order, are necessary)."*

In de literatuur zijn meer grafieken te vinden die voor bepaalde golven een benadering adviseren. Een bekend voobeeld is de grafiek van Le Méhauté [LeM76, 15-2.3.3]. Le Méhauté gebruikt niet nauwkeurigheid als enige criterium, maar baseert zijn aanbevelingen ook op andere factoren zoals de algemeenheid van de uitgangsvergelijkingen, hoe goed de benaderingen bepaalde karakteristieke eigenschappen van golven voorspellen, gebruiksvriendelijkheid en persoonlijke voorkeur. Uit het onderstaande citaat blijkt dat Le Méhauté zijn grafiek niet beschouwt als absolute waarheid.

> *"A comprehensive quantitative investigation of the error which is made by using various theories in various domains has not been done so far; hence, such a graph is somewhat arbitrary and merely qualitative."*

Een gemoderniseerde versie van de grafiek van Le Méhauté uit [Sor97, pagina 68] is te zien in figuur 7.3. Het is interessant dat deze grafiek niet voor alle golven de stroomfunctie benadering adviseert. Helaas wordt deze keuze niet gemotiveerd. Verderop in het boek waaruit de grafiek komt wordt wel gesuggereerd dat men de waardes van de onbekenden uit de stroomfunctie benadering niet met een numerieke methode verkrijgt, maar dat men ze interpoleert uit



Figuur 7.3: Een moderne versie van de grafiek van Le Méhauté. Hierin wordt op basis van verschillende factoren een geschikte benadering gesuggereerd. Met *small amplitude* wordt de lineaire benadering bedoeld. [Sor97]

een tabel met aangeleverde waardes. Het zou kunnen dat de op die manier geconstrueerde stroomfunctie benadering erg laag scoort op gebruiksvriendelijkheid.

We hebben in deze discussie eerst de belangrijkste voor- en nadelen van de besproken benaderingen op een rijtje gezet. Vervolgens hebben we geprobeerd aan te geven welke benadering het beste is. We zagen dat de stroomfunctie benadering de beste keuze is als we nauwkeurigheid het belangrijkst vinden. Als we deze benadering niet willen gebruiken kunnen we uit de grafiek van Dean het nauwkeurigste alternatief aflezen. Tenslotte hebben we een grafiek uit de literatuur besproken waarbij niet alleen op de nauwkeurigheid wordt gelet, maar ook op andere factoren zoals gebruiksvriendelijkheid.

Bijlage A

Lijsten met symbolen

A.1 Lijst met symbolen uit deze scriptie

In de onderstaande tabel zijn de belangrijkste symbolen uit de scriptie bij elkaar gezet. De dimensieloze varianten van bepaalde symbolen zijn niet apart vermeld. We merken slechts op dat f' de dimensieloze variant van f is.

a	onbepaalde constante
A_{ij}	onbekende uit de vijfde-orde Stokes benadering
B_i	onbekende uit de stroomfunctie benadering
B_{ij}	onbekende uit de vijfde-orde Stokes benadering
c	golfsnelheid
C	Bernoulli-constante
C_i	onbekende uit de vijfde-orde Stokes benadering
c_e	gemiddelde horizontale stroomsnelheid
c_s	gemiddelde horizontale volumeflux
D	constante uit de stroomfunctie benadering die de convergentie verbeterd
F_v	horizontale volumeflux
g	valversnelling
H	golfhoogte
h	gemiddelde waterdiepte
k	golfgetal
K	constante gerelateerd aan de volumeflux bij de tweede-orde Stokes benadering geschaalde Bernoulli-constante bij de vijfde-orde Stokes benadering
L	golflente
M	constante gerelateerd aan de volumeflux
Q	waarde van de horizontale volumeflux
T	periode
u	horizontale component van de stroomsnelheid
w	verticale component van de stroomsnelheid
x	horizontale coördinaat
x_i	roosterpunten op de horizontale as
z	verticale coördinaat
ϵ	expansieparameter bij de tweede-orde Stokes benadering
η	de hoogte van het wateroppervlak

η_i	de hoogte van het wateroppervlak boven het roosterpunt x_i
θ	variabele gedefinieerd als $kx - \omega t$
λ	expansieparameter bij de vijfe-orde Stokes benadering
ϕ	potentiaalfunctie
ψ	stroomfunctie
ω	frequentie

A.2 De symbolen uit het artikel Skjelbreia en Hendrickson

Hieronder staan de constanten uit het artikel van Skjelbreia en Hendrickson over de vijfde-orde Stokes benadering [SH61] die afwijken van de constanten die we in deze scriptie gebruiken.

	scriptie	[SH61]
golfsnelheid	c	$\overline{c}$
golfgetal	k	β
gemiddelde waterdiepte	h	d
horizontale coördinaat	x	X
verticale coördinaat	z	S
verstoring wateroppervlak	η	y
verticale stroomsnelheid	w	v

Bijlage B

De vijfde-orde Stokes benadering in Mathematica

Hieronder presenteren we de Mathematica-invoer waarmee de vijfde-orde Stokes benadering van Skjelbreia en Hendrickson gecontroleerd kan worden. Voor een globale omschrijving van de onderstaande invoer verwijzen we naar paragraaf §4.3.2.

stokes5scriptie.nb

```
θ = k x−k c t;
phi[x_,z_,t_]:= c/k ( (λ A11+λ^3 A13+λ^5 A15)Cosh[k z] Sin[θ ]+(λ^2 A22+λ^4 A24) Cosh[2k z]Sin[2θ]+(λ^3 A33+λ^5 A35) Cosh[3k z]Sin[3 θ] +λ^4 A44 Cosh[4k z]Sin[4 θ] +λ^5 A55 Cosh[5k z]Sin[5θ]);
eta[x_,t_] := 1/k (λ Cos[θ]+(λ^2 B22+λ^4 B24) Cos[2θ]+(λ^3 B33+λ^5 B35) Cos[3θ]+λ^4 B44 Cos[4θ]+λ^5 B55 Cos[5θ])
K = 1/k(λ^2 C3+λ^4 C4);
c = Sqrt[1/k C0^2(1+λ^2 C1+λ^4 C2)];

onbekenden = {C0,A11,A13,A15,A22,A24,A33,A35,A44,A55,B22,B24,B33,B35,B44,B55,C1,C2,C3,C4};
oplossingen = {};

vergelijking1 = Collect[Series[D[eta[x,t],x](1−D[phi[x,z,t],x]/c)+D[phi[x,z,t],z]/c,{z,h,5}]/.z→h+eta[x,t]//. {θ→r,−θ→−r},λ];

vergelijking12 = 0;
Do[
    vergelijking12 = vergelijking12+λ^i Coefficient[vergelijking1,λ,i]
, {i,0,5}
]

vergelijking1lijst =CoefficientList[ TrigExpand[vergelijking12], {λ,Cos[r],Sin[r]}];

```

```
vergelijking2=Collect[Series[k c^2(1-D[phi[x,z,t],x]/c)^2+k c^2 (D[phi[x,z,t],z]/c)^2-k c^2+2g(k K+k eta[x,t]),{z,h,5}]/.z→h+eta[x,t]//. {θ→r,-θ→-r},λ];

vergelijking22 = 0;
Do[
    vergelijking22 = vergelijking22+λ^i Coefficient[vergelijking2,λ,i]
, {i,0,5}
]

vergelijking2lijst=CoefficientList[TrigExpand[vergelijking22], {λ, Cos[r],Sin[r]}];

Do[
    Print["orde ",i];
    vgls1=DeleteCases[Flatten[vergelijking1lijst[[i+1]]],0];
    vgls2=DeleteCases[Flatten[vergelijking2lijst[[i+1]]],0];
    vgls = Join[vgls1,vgls2];
    oplossen=Map[If[!FreeQ[vgls/.oplossingen,#],#]&,onbekenden];
    oplossen=DeleteCases[oplossen,Null];
    Print["Oplossen van ", oplossen];
    oplossingen=Join[oplossingen,Last[Solve[Map[#==0&,vgls],oplossen]]/.oplossingen];
, {i,1,5}
]

oplossingen = FullSimplify[oplossingen];
```

Het uitvoeren van de bovenstaande invoer duurt op een gewone computer ongeveer twee minuten. Na het uitvoeren van de bovenstaande opdrachten is `oplossingen` een lijst met `replacements`. In deze lijst zitten de oplossingen van de onbekenden uit `onbekenden`. De oplossing voor C_2 staat bijvoorbeeld in deze lijst als

$$C_2 = \frac{(436\cosh(2hk) - 428\cosh(4hk) + 15\cosh(6hk) + 32\cosh(8hk) + 5\cosh(10hk) + 264)\mathrm{csch}^{10}(hk)}{2048}.$$

De vorm van deze oplossing verschilt van de vorm waarin Skjelbreia en Hendrickson hun oplossingen presenteren (zie pagina 40). Een oplossing van Skjelbreia en Hendrickson kan worden vergeleken met de oplossing van Mathematica door het verschil van de beide oplossingen zo ver mogelijk te herschrijven. Als dit verschil gelijk aan nul is, dan zijn de beide oplossingen gelijk. Hieronder demonstreren we hoe de beide oplossingen voor C_2 vergeleken kunnen worden. We nemen hierbij eerst de orginele oplossing van Skjelbreia en Hendrickson als vergelijkingsmateriaal.

```
C2Math = C2 /. oplossingen;

Clear[c];

```

```
C2SHorig = (3840 c^12 - 4096 c^10 + 2592 c^8 + 5944 c^4 - 1830 c^2
    + 147)/(512 s^10 (6 c^2 - 1)) /. {s →Sinh[k h], c → Cosh[k h
    ]};

FullSimplify[C2Math - C2SHorig]
```

De uitvoer van de laatste opdracht is niet gelijk aan nul. Dit betekent dat de C_2 die Skjelbreia en Henrickson voorstellen uit `C2SHorig` niet gelijk is aan de door Mathematica bepaalde C_2 uit `C2Math`. Hieronder laten we zien dat de oplossingen wel overeenkomen als we de plus voor $6800c^8$ veranderen in een minteken.

```
C2SHcorr = (3840 c^12 - 4096 c^10 - 2592 c^8 - 1008 c^6 + 5944 c^4
    - 1830 c^2 + 147)/(512 s^10 (6 c^2 - 1)) /. {s → Sinh[k h], c
    → Cosh[k h]};

FullSimplify[C2Math - C2SHcorr]
```

De uitvoer van de laatste opdracht is nu wel gelijk aan nul. De gecorrigeerde C_2 in `C2SHcorr` komt dus overeen met de door Mathematica gevonden C_2 uit `C2Math`. In de notatie van Skjelbreia en Henrickson is de correcte oplossing voor C_2 dus

$$C_2 = \frac{3840c^{12} - 4096c^{10} - 2592c^8 - 1008c^6 + 5944c^4 - 1830c^2 + 147}{512s^{10}\,(6c^2 - 1)}\,.$$

Door de bovenstaande stappen ook uit te voeren voor de andere oplossingen van Skjelbreia en Henrickson kan de vijfde-orde Stokes benadering gecontroleerd worden.

Bibliografie

[Cok77] E. D. Cokelet. Steep gravity waves in water of arbitrary uniform depth. *Philosophical Transactions of the Royal Society of Londen*, 286(1335):183–230 (juli 1977).

[DD91] R.G. Dean en R.A. Dalrymple. *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists.* World Scientific, tweede uitgave (januari 1991).

[Dea65] R. G. Dean. Stream function representation of nonlinear ocean waves. *Journal of Geophysical Research*, 70(18):4561–4572 (september 1965).

[Fen85] J. D. Fenton. A fifth-order stokes theory for steady waves. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, 111(2):216–234 (maart 1985).

[LeM76] B. LeMehaute. *An Introduction to Hydrodynamics and Water Waves.* Springer (1976).

[RF81] M. M. Rienecker en J. D. Fenton. A fourier approximation method for steady water waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 104:119–137 (1981).

[SH61] L. Skjelbreia en J. Hendrickson. Fifth order gravity wave theory. In *Proceedings of the 7th conference of coastal engineering*, pag. 184–196 (1961).

[Sor97] Robert M. Sorensen. *Basic Coastal Engineering.* Kluwer Academic Publishers, tweede uitgave (1997).

[Sve06] Ib A. Svendsen. *Introduction to Nearshore Hydrodynamics.* World Scientific (2006).

[VV07] A.E.P. Veldman en A. Velická. Stromingsleer (2007).