P A R T I T I E S

Rijksuniversiteit Groningen
Bibliotheek
Wiskunde / Informatica / Rekencentrum
Landleven 5
Postbus 800
9700 AV Groningen

Afstudeerwerk van F.J. den Hoed

Afstudeerdocent Dr. J. Top

Groningen

augustus, 1995

WORDT
NIET UITGELEEND

INHOUDSOPGAVE

0 Inleiding 1

1 Recursieve formule voor p(n) 5

2 Faray rijen & Ford cirkels 11

3 Transformatie van de eta-functie 17

4 Bessel functies 23

5 Afleiding van de formule voor p(n) 32

6 Fout analyse van de restterm 41

7 Toepassing van de formule 46

Literatuur 50

0 INLEIDING

Een partitie van een natuurlijk getal n is een representatie van n als een som van natuurlijke getallen.
Dus 4 + 1 + 1 is een partitie van 6.
Hierbij is de afspraak dat de volgorde van de sommanden irrelevant is.
Dus 1 + 4 + 1 is dezelfde partitie van 6 als 4 + 1 + 1.
Het aantal verschillende partities van n wordt weergegeven door de functie p(n).
bijvoorbeeld: p(6) = 11, immers:

6, 5+1, 4+2, 4+1+1, 3+3, 3+2+1, 3+1+1+1, 2+2+2, 2+2+1+1,

2+1+1+1+1, 1+1+1+1+1+1

zijn de 11 manieren waarop 6 als een som van natuurlijke getallen geschreven kan worden.

Hieronder volgen nog een aantal waarden van p(n):

n	p(n)
1	1
2	2
3	3
4	5
5	7
10	42
100	190569292
200	397299029388
600	4580047880081443085536 22

De gegeven voorbeelden suggereren dat p(n) bijzonder groot wordt voor grote n.
De vraag is hoe groot?

In 1917 vroegen Hardy en Ramanujan zich dat af.
De bedoeling was om een asymptotische formule voor p(n) te vinden. Zij vonden het opmerkelijk dat niemand hier ooit iets over gepupliceerd had, terwijl er zeer veel geschreven was over asymptotisch gedrag van dergelijke functies.
Het bekendste voorbeeld daarvan is het gedrag van $\pi(x)$. ($\pi(x)$ geeft het aantal priemgetallen kleiner of gelijk aan x weer).

Stelling
(de priemgetalstelling, Hadamard & de Vallée Poisson 1896)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\log x}{x} = 1 \quad \textit{oftewel} \quad \pi(x) \sim \frac{x}{\log x}.$$

Deze vergelijking geeft een aardig idee over de spreiding van de priemgetallen, maar geeft absoluut geen exacte waarde voor $\pi(x)$.

Hardy en Ramanujan wilden iets dergelijks voor p(n) vinden. Zij kwamen met het volgende resultaat:

Stelling
(Hardy & Ramanujan 1917)

$$p(n) \sim \frac{e^{K\sqrt{n}}}{4n\sqrt{3}} \qquad \textit{voor} \quad K = \pi\sqrt{\frac{2}{3}} \; .$$

Maar uit hun afleiding volgde meer. Bij deze asymptotische benadering vonden ze ook een exacte formule voor p(n):

$$p(n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sum_{q=1}^{\infty} \sqrt{q}\, A_q(n) \frac{d}{dn} \frac{e^{K\lambda_n/q}}{\lambda_n} \; , \qquad \left(\lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}}\right)$$

waarbij $A_q(n) = \sum_p \omega_{pq}\, e^{-2\pi i n p/q}$.

De sommatie over p loopt over de positieve gehele getallen kleiner dan q (als $q=1$ dan $p=1$) met $ggd(p,q)=1$.
Verder is ω_{pq} van p en q afhangende éénheidswortel.

Dat een telprobleem, als het aantal partities van een getal, in een dergelijke formule kan worden uitgedrukt mag bijzonder genoemd worden. Maar wat nog veel opmerkelijker was, is dat een klein aantal gesommeerd al afgerond de exacte waarde van p(n) gaf.
De enige manier tot dan toe om de exacte waarde van p(n) te bepalen was een recursieve formule. M.b.v. van deze formule was p(n) bepaald voor $n \leq 600$.
Hiermee konden Hardy en Ramanujan hun formule testen als middel om de exacte waarde van p(n) te bepalen voor grote n. Zij benaderden p(200) door de eerste 8 termen van de formule te sommeren. Het bleek slechts 0,004 te verschillen van de exacte waarde van p(200).

Later toonde Rademacher aan dat de formule afgerond de exacte waarde van p(n) geeft, bij sommatie over $[2\sqrt{n}/3]$ termen. In zijn afleiding hiervan, ging hij ervan uit dat $n \geq 576$. Dat is geen bezwaar omdat p(n) bekend was voor $n \leq 600$. (Met behulp van een computer is het eenvoudig om na te gaan dat sommatie over $[2\sqrt{n}/3]$ termen genoeg is voor $n \geq 3$).

0 INLEIDING

Deze scriptie beoogt een volledige afleiding van de formule te geven. De afleiding volgt de methode zoals Rademacher die in 1943 publiceerde. Ook wordt onderzocht, in hoeverre de formule voor p(n) aanleiding geeft tot een bruikbaar algoritme, om de exacte waarde van p(n) te berekenen.

Van de lezer wordt kennis van complexe functietheorie verwacht. Alle andere benodigde theorie wordt in de verschillende delen van deze scriptie uitgewerkt.
In deze delen wordt alleen de theorie van een bepaald onderwerp behandeld, die nodig is voor de afleiding van de formule.
De scriptie bestaat uit de volgende delen.

1 Recursieve formule voor p(n)
2 Faray-rijen en Ford-cirkels
3 Transformatie van de eta-functie
4 Bessel-functies
5 Afleiding van de formule voor p(n)
6 Fout analyse van de restterm
7 De formule in de praktijk

In deel 1 wordt de genererende functie van p(n) bepaald. Hieruit valt eenvoudig de recursieve formule af te leiden die ooit werd gebruikt om de eerste 600 waarden van p(n) te vinden. Die genererende functie is ook de basis van de afleiding van de asymptotische formule.
Hieronder is die genererende functie gegeven:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m)^{-1} \ .$$

Door middel van Cauchy's integraalstelling kan p(n) uitgedrukt worden in een integraal over $F(x)x^{-n}$. Een geschikt pad waarover deze integrand geïntegreerd wordt, wordt beschreven in deel 2.
De eta-functie van Dedekind lijkt heel erg op de genererende functie van p(n), zodat $F(x)$ in deze eta-functie kan worden uitgedrukt. De eta-functie is een elliptische modulaire functie.
D.m.v. een transformatie kan $\eta(x)$ worden uitgedrukt in $\eta(x')$, waarbij $|x'|$ naar 0 nadert. Deze transformatie wordt in deel 3 beschreven.
De transformatie heeft tot gevolg dat $F(x)$ in $F(x')$ wordt uitgedrukt, waarbij $F(x')$ ongeveer 1 wordt.
Zo kunnen we F uit de integraal werken. De integraal krijgt vevolgens de vorm van een Bessel-functie.
Een aantal mooie eigenschappen van Bessel-functie wordt in deel 4 afgeleidt.
Deze toepassen leidt tot een formule voor p(n).
De hierboven beschreven grote lijn van de afleiding wordt, in deel 5, in detail uitgewerkt. Dat leidt niet helemaal precies tot de Hardy-Ramanujan formule, maar wel bijna. In plaats van de e-macht zal p(n) uitgedrukt worden in een sinus- hyperbolicus.
In deel 6 wordt bepaald hoeveel termen voldoende zijn om de

exacte waarde van p(n) te bepalen.
In deel 7 worden enkele exacte waarden van p(n) voor grote n gegeven, die bepaald zijn met de formule. Het pakket Pari-GP wordt gebruikt om de berekeningen uit te voeren. Verder wordt kort iets vermeld over toepassingen van partities.

1 RECURSIEVE FORMULE VOOR P(N)

Definitie p(n)

Zij n een geheel getal.

$$p(n) = \begin{cases} 0 & \text{als } n < 0 \\ 1 & \text{als } n = 0 \\ \text{aantal partities van } n & \text{als } n > 0 \end{cases}$$

Met het aantal partities van p(n) wordt bedoeld het aantal verschillende manieren waarop n als een som van positieve gehele getallen geschreven kan worden. De volgorde van de termen maakt hierbij niet uit.
Voorbeeld: p(4) = 5, want 4 kan op 5 verschillende manieren als een som geschreven worden:

$$\begin{aligned} 4 &= 4 \\ &= 3 + 1 \\ &= 2 + 2 \\ &= 2 + 1 + 1 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1. \end{aligned}$$

De genererende functie van p(n)

Een genererende functie $F(x)$ van een functie $f(n)$ is een machtreeks, waarbij de coëfficient van x^n gelijk is aan $f(n)$.

De genererende functie van $p(n)$ is:

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots} \qquad |x| < 1 .$$

We kunnen dit snel inzien:
Het product is een oneindig product van meetkundige reeksen, dus gelijk aan:

$$\begin{gathered} (1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots\ldots) \\ (1+x^2+x^4+x^6+x^8+\ldots\ldots) \\ (1+x^3+x^6+x^9+x^{12}+\ldots\ldots) \\ (1+x^4+x^8+x^{12}+x^{16}+\ldots\ldots) \\ \vdots \end{gathered}$$

We gaan nu de coëfficienten van dit oneindige product van sommen bekijken. Als voorbeeld nemen we x^4.
Hoe krijgen we x^4 ?

- Door uit de eerste som x^4 , en uit alle andere sommen 1 te nemen.
- Uit de eerste som x^2 en uit de tweede som x^2 te nemen.
- Uit de eerste som x en uit de derde som x^3 te nemen.
- Uit de tweede som x^4 te nemen.
- Uit de vierde som x^4 te nemen.

Dit zijn precies vijf manieren en p(4) = 5.
Ook kunnen we precies één partitie koppelen aan precies één manier. Bij de eerste som stellen we enen voor en geven deze somnummer 1, bij de tweede som stellen we tweëen voor en geven deze somnummer 2 etc.
De macht gedeeld door het somnummer stelt het aantal malen dat dat getal van de partitie voorkomt.
Dus x^4 uit de eerste rij stelt 4 enen voor: 1 + 1 + 1 + 1
x^2 uit de eerste rij stelt twee enen voor en x^2 uit de tweede som stelt een twee voor: 1 + 1 + 2
etc.

Nemen we nu de partitie 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 3 van 10 dan wordt deze gerepresenteerd door x^3 uit de eerste som x^4 uit de tweede som en x^3 uit de derde som.
Intuïtief is het nu duidelijk dat $F(x)$ de genererende functie van $p(n)$ is, maar we werken met een oneindig product, dus een "nette" redenatie is hier op zijn plaats.

Voor $|x| < 1$ zijn de reeksen

$$1+x+x^2+\ldots, \quad 1+x^2+x^4+\ldots, \quad 1+x^m+x^{2m}+\ldots,$$

absoluut convergent, en we kunnen ze vermenigvuldigen en verwisselen zoals we willen. De coëfficient van x^n in het product is $p_m(n)$, het aantal partities van n met delen kleiner of gelijk aan m.

We definieren nu

$$F_m(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)} = \sum_{n=1}^{\infty} p_m(n)x^n$$

De volgende uitspraken zijn duidelijk:

$$p_m(n) \le p(n)$$

$$p_m(n) = p(n) \qquad \textit{voor } n \le m$$

$$p_m(n) \to p(n) \qquad \textit{als } m \to \infty \textit{ voor alle } n$$

$$F_m(x) = \sum_{n=0}^{m} p(n)x^n + \sum_{n=m+1}^{\infty} p_m(n)x^n$$

$$F_m(x) \to F(x) \qquad \textit{als } m \to \infty$$

Dus $\sum_{n=0}^{m} p(n)x^n < F_m(x) < F(x)$, wat onafhankelijk van m is.

Dus $\sum p(n)x^n$ is convergent, en $\sum p_m(n)x^n$ convergeert uniform voor $|x| \leq \delta$ voor elke δ *met* $0 < \delta < 1$.

Nu concluderen we:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty} p_m(n)x^n = \lim_{m\to\infty} F_m(x) = F(x) \quad .$$

Een stelling van Euler

Als we van het oneindige product van sommen steeds van iedere som de eerste twee termen nemen krijgen we:

$$(1+x)(1+x^2)\ldots\ldots = \prod_{n=1}^{\infty}(1+x^n)$$

Het is eenvoudig in te zien dat dit de genererende functie is van het aantal partities van n in *ongelijke* delen.

Nu kijken we naar de functie:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) \quad .$$

Als we deze functie beschouwen als een genererende functie en vergelijken met de vorige functie kunnen we concluderen:

$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)$ is de genererende functie van $p_e(n) - p_o(n)$.

waarbij $p_e(n)$ staat voor het aantal partitie van n in een *even* aantal ongelijke delen, en $p_o(n)$ voor het aantal partities van n in een *oneven* aantal ongelijke delen.

Stelling (Euler)

$p_e(n) = p_o(n)$ *behalve als* $n = \frac{1}{2}k(3k\pm 1)$, *dan geldt*

$p_e(n) - p_o(n) = (-1)^k$

Deze stelling zullen we later bewijzen. Eerst gaan we de stelling gebruiken om een recursieve formule voor $p(n)$ af te leiden:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n) = \sum_{n=1}^{\infty}(p_e(n)-p_o(n))x^n$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (x^{\frac{1}{2}k(3k-1)} + x^{\frac{1}{2}k(3k+1)})$$

$$= 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \ldots$$

Dus

$$(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - \ldots)(\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)\frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)} = 1 .$$

Als we nu de coëfficienten van het linkerlid vergelijken met 1 zien we:

$$p(n) - p(n-1) - p(n-2) + p(n-5) + \ldots$$

$$\ldots(-1)^k p(n - \tfrac{1}{2}k(3k-1)) + (-1)^k p(n - \tfrac{1}{2}k(3k+1)) + \ldots = 0 .$$

Als $\frac{1}{2}k(3k \pm 1)$ groter dan n wordt kunnen de opvolgende termen worden weggelaten, immers $p(n) = 0$ voor n kleiner dan 0.

Voorbeeld:

$$p(5) = p(4) + p(3) - p(0).$$

Een bewijs voor de stelling van Euler

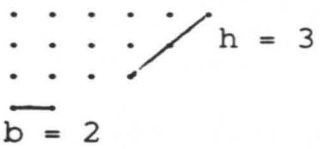
We kunnen een partitie d.m.v. van punten als volgt grafisch weergeven:

```
. . . . . . . . .
. . . . . .
. . .
. . .
.
```

Het totaal aantal punten is n. De rijen punten geven de delen weer. De bovenstaande grafische weergave stelt dus een partite van 22 voor, namelijk 22 = 9 + 6 + 3 + 3 + 1
Aangezien de volgorde van de termen van de som er niet toe doet spreken we af dat de bovenste rij het grootste deel is, de tweede rij het één na grootste deel etc.

We willen nu een (1,1) relatie zien te vinden tussen de partities in $p_e(n)$ en in $p_o(n)$. Deze (1,1) relatie moet dan uiteraard niet gelden voor $n = k(3k \pm 1)/2$.

We weten dat $p_e(n)$ en $p_o(n)$ uit ongelijke delen bestaan en geven hieronder een willekeurige grafische weergave van zo'n partitie:



We definiëren eerste twee begrippen.
De **helling (h)** is het aantal punten dat de lijn die van rechtsboven met een hoek van 45° naar beneden gaat bevat.
De **basis (b)** is het aantal punten dat de lijn die van linksonder naar rechts bevat, dat is het kleinste deel van de partitie.

We definiëren nu twee operaties: A en B.
A brengt de basis naar rechtsboven zodat de basis de helling wordt en B brengt de helling naar links beneden zodat de helling de basis wordt.

Een operatie is toegestaan als er opnieuw een partitie in ongelijke delen ontstaat d.w.z. dat de lijnen van boven naar beneden steeds kleiner worden, en dat er geen gaten ontstaan. In het voorbeeld is operatie A toegestaan en operatie B niet.

We onderscheiden nu drie gevallen: h > b h = b h < b

1) h > b. Als h > b dan is A toegestaan en B niet.

2) h = b. Als h = b dan is A toegestaan behalve als h en b elkaar snijden. B is niet toegestaan.

A is toegestaan A is niet toegestaan

3) h < b. Als h < b dan is B toegestaan behalve als h en b elkaar snijden en h = b - 1. A is niet toegestaan.

B is toegestaan B is niet toegestaan

Een operatie die is toegestaan verandert de partitie van een even aantal ongelijke delen in een oneven aantal ongelijke delen, of van een oneven aantal ongelijke delen in een even aantal ongelijke delen.
Dus als er één operatie is toegestaan dan is er (1,1) relatie tussen de partities in $p_e(n)$ en in $p_o(n)$. Als er geen operatie is toegestaan dan geldt: $p_e(n) - p_o(n) = \pm 1$

Er zijn twee gevallen waarbij geen operatie is toegestaan:

i) In geval 2) als h en b elkaar snijden.
Dan geldt:

$$n = k + (k+1) + (k+2) + \ldots (k+(k-1)) \quad \textit{met } k = b\ (=h)\ .$$

Als k oneven is, dan hebben we te maken met een partitie in een oneven aantal ongelijke delen. Bij deze partitie hoort geen partitie in een even aantal ongelijke delen.
Analoog voor k even.

$$k + (k+1) + + (k+2) + \ldots (k+(k-1))$$

$$= k^2 + \frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}k(3k-1)\ .$$

Dus $p_e(n) - p_o(n) = (-1)^k \quad \textit{als } n = \frac{1}{2}k(3k-1)$.

ii) In geval 3) als h en b elkaar snijden en h = b - 1.
Dan geldt:

$$n = (k+1) + (k+2) + \ldots (k+k) \quad \textit{met } k = h\ (= b-1)\ .$$

Het bovenstaande verhaal voor k is (on)even geldt nu ook.

$$(k+1) + (k+2) + \ldots (k+k)$$

$$= k^2 + \frac{(k+1) + k}{2} = \frac{1}{2}k(3k+1)\ .$$

Dus ook in dit geval : $p_e(n) - p_o(n) = (-1)^k$.

2 FARAY RIJEN & FORD CIRKELS

In de afleiding van de formule voor p(n) zullen we p(n) schrijven als een integraal over een pad van i naar $i + 1$. In dit deel construeren we een geschikt pad.

Faray rijen

Een Faray rij is een rij van alle breuken in de normaalvorm tussen 0 en 1 geordend op grootte waarbij de noemer een zeker getal N niet overschrijdt. Een Faray rij van orde N, dat wil zeggen dat de noemer N niet overschrijdt, wordt aangeduidt met $\mathcal{F}_N$.

De Faray rijen van respectievelijk de orde 1,2,3,4 en 5 zien er als volgt uit:

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}$$

<u>Stelling 1</u>

Van twee opeenvolgende breuken $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$ van de Faray-rij van orde N geldt:

$$p_1 q_2 = p_2 q_1 - 1 .$$

Bewijs:

We bewijzen deze stelling met volledige induktie.

Aan de hierboven gegeven Faray rijen van orde 1 t/m 5 kunnen we zien dat de stelling waar is voor orde 1 t/m 5.

Stel nu het is waar voor Faray rijen van orde N.

Zij $\frac{a}{b}$ een breuk met $ggd(a,b) = 1$, die niet in de Faray rij

van orde N ligt,

dat wil zeggen $b > N$.

Dan zal $\frac{a}{b}$ liggen tussen twee opeenvolgende Faray breuken van orde N.

Noem deze $\frac{p_1}{q_1}$ *en* $\frac{p_2}{q_2}$.

Dus: $\frac{p_1}{q_1} < \frac{a}{b} < \frac{p_2}{q_2}$.

Stel nu:

$\lambda = aq_1 - bp_1 \geq 0$

$\mu = -aq_2 + bp_2 \geq 0$

Als we de vergelijkingen oplossen naar a en b krijgen we:

$$a = \frac{\lambda p_2 + p_1\mu}{q_1p_2 - q_2p_1} = \mu p_1 + \lambda p_2$$

$$b = \frac{q_1\mu + \lambda q_2}{q_1p_2 - q_2p_1} = \mu q_1 + \lambda q_2$$

In de noemer hebben we de induktie hypothese ingevuld.

Als $\frac{a}{b}$ een breuk in de normaalvorm is zal moeten gelden:

$\lambda > 0$, $\mu > 0$

Immers als $\lambda = 0$ dan $\frac{a}{b} = \frac{\mu p_1}{\mu p_2} = \frac{p_1}{p_2} \in \mathcal{F}_N$

maar $\frac{a}{b}$ lag niet in de Faray rij van orde N.

Analoog voor $\mu = 0$.

De kleinste waarde voor de noemer b is $N + 1$.

Hiervoor moeten we λ en μ zo klein mogelijk kiezen.

Dus: $\lambda = 1 \quad \mu = 1$

Dan: $p_1 b - q_1 a = p_1(q_1 + q_2) - q_1(p_1 + p_2) = p_1 q_2 - q_1 p_2 = -1$

en : $a q_2 - b p_2 = (p_1 + p_2) q_2 - (q_1 + q_2) p_2 = p_1 q_2 - q_1 p_2 = -1$

(De laatste "=" tekens gelden vanwege de induktiehypothese)

Dus de stelling geldt ook voor Faray rijen van orde $N + 1$.
En dus volgens volledige induktie geldt de stelling voor alle Faray rijen.

Ford Cirkels

Definitie

Een Ford cirkel $C(p/q)$ in een cirkel met middelpunt $p/q + i/2q^2$ en straal $1/2q^2$.

Dus een Ford cirkel $C(p/q)$ is de cirkel:

$$\left| z - \left(\frac{p}{q} + \frac{i}{2q^2}\right) \right| = \frac{1}{2q^2}$$

Deze cirkels hebben een belangrijke eigenschap:

<u>Stelling 2</u>

Twee Ford cirkels hebben nooit meer dan één punt gemeenschappelijk. Ze hebben een punt gemeen precies dan, als hun breuken twee opeenvolgende breuken van een Faray rij zijn.

Bewijs

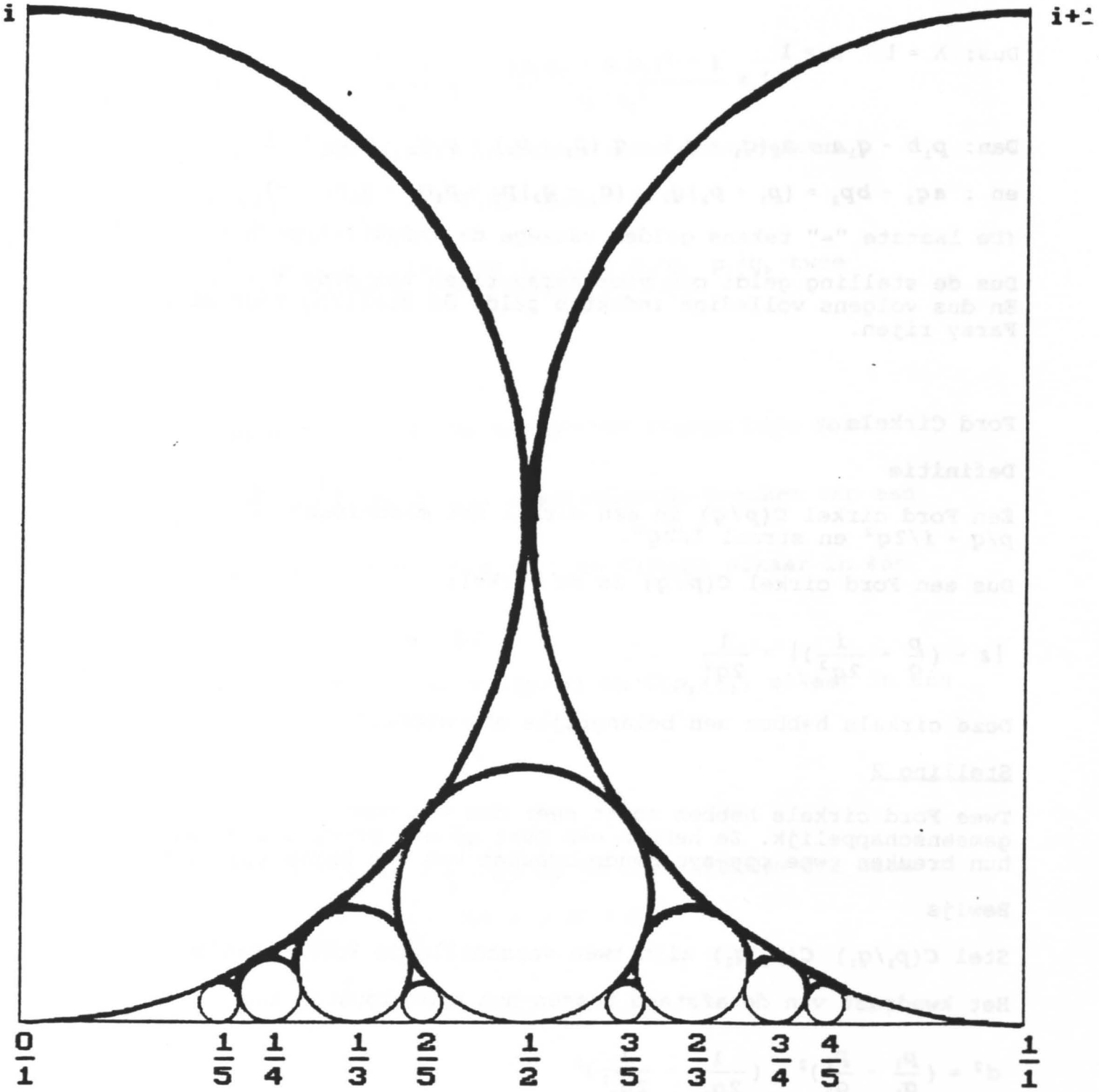
Stel $C(p_1/q_1)$ $C(p_2/q_2)$ zijn twee verschillende Ford cirkels.

Het kwadraat van de afstand tussen hun middelpunten is:

$$d^2 = \left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2q_1^2} - \frac{1}{2q_2^2}\right)^2$$

Het kwadraat van de som van hun stralen is:

$$t^2 = \left(\frac{1}{2q_1^2} + \frac{1}{2q_2^2}\right)^2$$



FORD CIRKELS VOOR $\mathbb{F}_5$

Nu zien we:

$$d^2 - t^2 = \left(\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2}\right)^2 - \frac{1}{q_1^2 q_2^2} = \frac{(p_1 q_2 - q_1 p_2)^2 - 1}{q_1^2 q_2^2} \geq 0$$

Dus de cirkels raken elkaar of hebben geen punt gemeen.

Ze raken elkaar alleen als $p_1 q_2 - p_2 q_1 = \pm 1$.
(Immers dan $d^2 = t^2$).

In dit geval, volgens stelling 1, zijn p_1/q_1 p_2/q_2 twee opeenvolgende breuken van een Faray rij zijn.

We zijn geïnteresseerd in de raakpunten tussen twee Ford cirkels.

Stel $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p}{q}$, $\frac{p_2}{q_2}$ zijn drie opeenvolgende breuken van een Faray rij.

Dan raken de Ford cirkels $C(p_1/q_1)$ en $C(p/q)$ elkaar in één punt.

Dat punt noemen we $x = a + bi$.

En ook raken de Ford cirkels $C(p/q)$ en $C(p_2/q_2)$ elkaar in één punt.

Dat punt noemen we $y = c + di$.

a ligt tussen $\frac{p_1}{q_1}$ *en* $\frac{p}{q}$.
Het deelt het interval $[\frac{p_1}{q_1}, \frac{p}{q}]$ op in twee stukken die zich verhouden als $\frac{1}{2q_1^2} : \frac{1}{2q^2}$ dus als $q^2 : q_1^2$

$$\text{dus } a = \frac{q^2 \frac{p}{q} + q_1^2 \frac{p_1}{q_1}}{q^2 + q_1^2}$$

We schrijven a nu als:

$$a = \frac{p}{q} - \left(\frac{p}{q} - a\right)$$

In het rechterlid vullen we voor a de uitdrukking in p, q, p_1 *en* q_2 in. Dat uitwerken levert:

$$= \frac{p}{q} - \frac{q_1(pq_1 - qp_1)}{q(q^2 + q_1^2)} .$$

We weten dat $\frac{p_1}{q_1}$ $\frac{p}{q}$ zijn twee opeenvolgende Faray breuken, dus:

$pq_1 - qp_1 = 1$ dus:

$$a = \frac{p}{q} - \frac{q_1}{q(q^2 + q_1^2)} .$$

b deelt het verticale interval $[\frac{1}{2q_1^2}, \frac{1}{2q^2}]$ op in twee stukken die zich verhouden als $\frac{1}{2q_1^2} : \frac{1}{2q^2}$ dus als $q^2 : q_1^2$.

Dus $b = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{q^2 + q_1^2} = \dfrac{1}{q^2 + q_1^2}$.

(Het is duidelijk dat b deze waarde heeft, ongeacht of q groter of kleiner is dan q_1).

Dus $x = \frac{p}{q} + \zeta'_{pq}$ met $\zeta'_{pq} = -\dfrac{q_1}{q(q^2 + q_1^2)} + \dfrac{i}{q^2 + q_1^2}$.

Op analoge wijze vinden we:

$$y = \frac{p}{q} + \zeta''_{pq} \quad \text{met} \quad \zeta''_{pq} = \frac{q_2}{q(q^2 + q_2^2)} + \frac{i}{q^2 + q_2^2} .$$

Zij N een gegeven natuurlijk getal.
We gaan nu een pad van Ford cirkels construeren die bij de Faray rij van orde N horen.

Op iedere cirkel $C(p/q)$ kiezen we een boog γ_{pq} die de raakpunten $p/q + \zeta'_{pq}$ *en* $p/q + \zeta''_{pq}$ met elkaar verbindt en niet de x-*as* raakt.

De cirkels $C(0/1)$ *en* $C(1/1)$ zijn congruent. We nemen van beide de helft.

We kiezen een boog van i tot $0/1 + \zeta''_{01}$ op $C(0/1)$ en van $i + 1$ tot $1/1 + \zeta'_{11}$ op $C(1/1)$.

De vereniging van deze twee bogen noemen we γ_{01}

Alle bogen samen vormen een pad van i naar $i + 1$.

Dat pad gebruiken we in de afleiding voor de formule van $p(n)$.

3 TRANSFORMATIE VAN DE ETA-FUNCTIE

De definitie van de η-functie van Dedekind is als volgt:

$$\eta(\tau) = e^{\pi i\tau/12} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i m\tau}) \qquad Im\ \tau > 0$$

De transformatie formule voor $\eta(\tau)$ ziet er als volgt uit:

$$\eta(\tau') = \eta(\tau)\ \sqrt{z}\ e^{\frac{\pi i}{12q}(p' - p)}\ e^{\pi i\ s(p,q)}$$

waarbij:

$$\tau = \frac{p}{q} + \frac{iz}{q}, \qquad \tau' = \frac{p'}{q} + \frac{iz^{-1}}{q}, \qquad pp' \equiv -1 \pmod q \text{ en}$$

$$s(p,q) = \sum_{\mu=1}^{q-1} \left(\frac{\mu}{q} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\mu p}{q} - \left[\frac{\mu p}{q}\right] - \frac{1}{2}\right) .$$

In dit deel willen we een afleiding van deze transformatie formule geven.
Dus we willen bewijzen:

$$\log \eta(\tau') = \log \eta(\tau) + \frac{1}{2}\log z + \frac{\pi i}{12q}(p' - p) + \pi i\ s(p,q)$$

Volgens de definitie van $\eta(\tau)$ hebben we:

$$\log \eta\left(\frac{p + iz}{q}\right) = \frac{\pi i(p + iz)}{12q} + \sum_{m=1}^{\infty} \log\left(1 - e^{2\pi i p m/q}\ e^{-2\pi z m/q}\right)$$

$$= \frac{\pi i(p + iz)}{12q} + \sum_{\mu=1}^{q} \sum_{k=1}^{\infty} \log\left(1 - e^{2\pi i p\mu/q}\ e^{-2\pi z(kq + \mu)/q}\right)$$

(volgt uit de periodiciteit van $e^{2\pi i m x}$) .

Nu vullen we de reeks in voor $\log(1 - x)$ en krijgen:

$$= \frac{\pi i p}{12q} - \frac{\pi z}{12q} - \sum_{\mu=1}^{q} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r}\ e^{2\pi i p\mu/q}\ e^{-2\pi z(kq + \mu)r/q}$$

$$= \frac{\pi i p}{12q} - \frac{\pi z}{12q} - \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} e^{2\pi i p\mu r/q} \frac{e^{-2\pi z\mu r/q}}{1 - e^{-2\pi z r}}$$

De uitdrukkingen vullen we in voor $\eta(\tau)$ en $\eta(\tau')$:

$$\sum_{\nu=1}^{q} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} e^{2\pi i p'\nu r/q} \frac{e^{-2\pi\nu r/kz}}{1 - e^{-2\pi r/z}} - \sum_{\mu=1}^{q} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} e^{2\pi i p\mu r/q} \frac{e^{-2\pi\mu z r/q}}{1 - e^{-2\pi z r}}$$

$$+ \frac{\pi}{12q}\left(\frac{1}{z} - z\right) + \pi i\, s(p,q) = -\frac{1}{2} \log z$$

Als we dit kunnen bewijzen zijn we klaar. We noemen deze vergelijking (*).

We gaan een functie geven die we integreren over een parallellogram.
We berekenen de integraal d.m.v. residu rekening wat het linkerlid gaat opleveren, en we berekenen de integraal rechtstreeks wat het rechterlid gaat opleveren.

De tweede dubbelsom in het linkerlid suggereert dat in de functie iets als

$$\sum_{\mu=1}^{q} \frac{1}{x} \frac{e^{-2\pi\mu N x/q}}{1 - e^{2\pi N x}} \frac{e^{-2\pi i p\mu N x/qz}}{1 - e^{-2\pi i N x/z}}$$ moet komen.

Vanwege convergentie veranderen we de term $\mu = q$ iets.
Verder willen we een soort symmetrie tussen μ en $p\mu$.
Daarom introduceren we:

$$\mu^* \equiv p\mu \pmod q \qquad 1 \le \mu^* \le q - 1$$

Beschouw nu de volgende functie:

$$F_n(x) = -\frac{1}{4ix} \coth \pi N x \cot \frac{\pi N x}{z} +$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{q-1} \frac{1}{x} \frac{e^{2\pi\mu N x/q}}{1 - e^{2\pi N x}} \frac{e^{-2\pi i\mu^* N x/qz}}{1 - e^{-2\pi i N x/z}}$$

waar $N = n + \frac{1}{2}$.

We integreren $F_n(x)$ over een parallellogram C met hoekpunten $z, i, -z, -i$ en laten daarna n naar oneindig gaan.

De $F_n(x)$ heeft polen in:

$$x = 0, \quad x = ir/N, \quad x = -zr/N, \quad r = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

De functie $-\frac{1}{4ix} \coth \pi N x \cot \frac{\pi N x}{z}$

heeft in $x = 0$ residu $-\frac{1}{12i}(z - \frac{1}{z})$

(Dit kan gevonden worden door de c_{-1} coëfficient van de Laurent-ontwikkeling te bepalen).

Het residu in $x = 0$ van

$$\frac{1}{x} \frac{e^{2\pi\mu N x/q}}{1 - e^{2\pi\mu N x}} \frac{e^{-2\pi i\mu^* N x/qz}}{1 - e^{-2\pi i N x/z}} \quad \text{is}$$

$$(\frac{1}{12} - \frac{\mu}{2q} + \frac{1}{2}\frac{\mu^2}{q^2})zi + (\frac{\mu}{q} - \frac{1}{2})(\frac{\mu^*}{q} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{12} - \frac{\mu^*}{2q} + \frac{1}{2}\frac{\mu^{*2}}{q^2})\frac{1}{iz}$$

Dit moet gesommeerd worden over μ van 1 tot $q - 1$.
We zien dat ook μ^* loopt van 1 tot $q - 1$.

De eerste en laatste term kunnen we rechtsstreeks sommeren.

Voor de middelste term kijken we nog even naar μ^* :

$\mu^* \equiv p\mu \pmod q$ dus

$$\frac{\mu^*}{q} = \frac{p\mu}{q} - [\frac{p\mu}{q}] ,$$

en dus hebben we volgens de definitie van $s(p,q)$:

$$\sum_{\mu=1}^{q-1} \left(\frac{\mu}{q} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\mu^*}{q} - \frac{1}{2}\right) = s(p,q) \ .$$

De sommatie van μ levert totaal:

$$\left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{12q}\right) zi + s(p,q) + \left(-\frac{1}{12} + \frac{1}{12q}\right)\frac{1}{zi}$$

Het residu van $F_n(x)$ in $x = 0$ is dus:

$$\frac{1}{12q}\left(zi + \frac{1}{zi}\right) + s(p,q)$$

Het residu van $F_n(x)$ in $x = \frac{ir}{N}$ is

$$\frac{1}{4\pi r} \cot \frac{\pi i r}{z} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{\mu=1}^{q-1} \frac{1}{r} e^{2\pi i \mu r/q} \frac{e^{2\pi\mu^* r/qz}}{1 - e^{2\pi r/z}}$$

We hebben $\mu^* \equiv p\mu \pmod q$ dus $p'\mu^* \equiv pp'\mu \equiv -\mu \pmod q$

dus we krijgen:

$$\frac{1}{4\pi i r} \coth \frac{\pi r}{z} - \frac{1}{2\pi i} \sum_{\mu^*=1}^{q-1} \frac{1}{r} e^{-2\pi i p'\mu^* r/q} \frac{e^{2\pi\mu^* r/qz}}{1 - e^{2\pi r/z}}$$

Het parallellogram C bevat de polen $x = \frac{ir}{N}$ voor $r = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$
Dus moeten we bovenstaande uitdrukking hierover sommeren, dan krijgen we:

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r}\left(\frac{2e^{-2\pi r/z}}{1 - e^{-2\pi r/z}} + 1\right) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\mu^*=1}^{q-1} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} e^{2\pi i p'\mu^* r/q} \frac{e^{-2\pi\mu^* r/qz}}{1 - e^{-2\pi r/z}}$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \sum_{\mu^*=1}^{q-1} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{r} e^{2\pi i p'(p-\mu^*) r/q} \frac{e^{-2\pi r(q-\mu^*)/qz}}{e^{-2\pi r/z} - 1}$$

We kunnen in de laatste term $q - \mu^*$ vervangen door μ^*.

Nu kunnen we alle termen bij elkaar optellen en krijgen de volgende uitdrukking voor het residu van $F_n(x)$ in

$x = \frac{ir}{N}$, $r = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$:

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r} + \frac{1}{\pi i}\sum_{\nu=1}^{q}\sum_{r=1}^{n}\frac{i}{r}\, e^{2\pi i p'\nu r/q}\,\frac{e^{-2\pi\nu r/qz}}{1 - e^{-2\pi r/z}} \qquad (\nu \text{ i.p.v } \mu^*)$$

Op een zelfde wijze vinden we het residu van $F_n(x)$ in

$x = -\frac{zr}{N}$, $r = +1, +2, \ldots, \pm n$:

$$\frac{i}{2\pi}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r} + \frac{i}{\pi}\sum_{\mu=1}^{q}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}\, e^{2\pi i p\mu r/q}\,\frac{e^{-2\pi\mu rz/q}}{1 - e^{-2\pi rz}}$$

Nu sommeren we alle residuen bij elkaar en krijgen:

$$\frac{1}{12qi}\left(\frac{1}{z} - z\right) + s(p,q) + \frac{1}{\pi i}\sum_{\nu=1}^{q}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}\, e^{2\pi i p'\nu r/q}\,\frac{e^{-2\pi\nu r/qz}}{1 - e^{-2\pi r/z}}$$

$$- \frac{1}{\pi i}\sum_{\mu=1}^{q}\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}\, e^{2\pi i p\mu r/q}\,\frac{e^{-2\pi\mu z/q}}{1 - e^{-2\pi rz}}$$

Laat nu $n \to \infty$ en vermenigvuldig met $2\pi i$. Dan hebben we twee maal het linkerlid van de vergelijking (*).

Nu willen we dus bewijzen dat:

$$\lim_{n\to\infty}\int_C F_n(x)\, dx = 2 \cdot -\frac{1}{2}\log z$$

Het is duidelijk dat op de vier zijden van C geldt dat de som van $F_n(x)$ naar 0 gaat als $N = n + 1/2 \to \infty$ (met uitzondering van de vier hoekpunten).

We merken nog even op dat:

$$\coth\alpha = \frac{\cosh\alpha}{\sinh\alpha} = \frac{\cos i\alpha}{i\sin i\alpha} = \frac{e^{-\alpha}+e^{\alpha}}{i(e^{-\alpha}-e^{\alpha})}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}$$

En dus zien we dat als $N = n + 1/2 \to \infty$ dat $\coth \pi Nx \cot \pi Nx/z$

gaat naar i op de zijden $(i,-z)$ en $(-i,z)$

gaat naar $-i$ op de zijden (i,z) *en* $(-i,-z)$

Dus:

$$\lim_{n\to\infty} xF_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} \text{ op } (i,z) \quad (-i,-z) \\ -\frac{1}{4} \text{ op } (i,-z) \quad (-i,z) \end{cases}$$

(met uitzondering van de hoekpunten).

De convergentie is, uiteraard, niet uniform, maar wel begrensd omdat de noemers $1 - e^{2\pi Nx}$ *en* $1 - e^{-2\pi iNx/z}$ bij 0 weg blijven omdat $N = n + 1/2 \quad (n \in \mathbb{N})$

Daarom krijgen we:

$$\lim_{n\to\infty}\int_C F_n(x)\,dx = \frac{1}{4}\left(-\int_{-i}^{z}\frac{dx}{x} + \int_{z}^{i}\frac{dx}{x} - \int_{i}^{-z}\frac{dx}{x} + \int_{-z}^{-i}\frac{dx}{x} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\int_{-i}^{z}\frac{dx}{x} + \int_{z}^{i}\frac{dx}{x} \right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-(\log z + \frac{\pi i}{2}) + (\frac{\pi i}{2} - \log z) \right) = -\log z$$

en dat is tweemaal het rechterlid van (*).

Hiermee hebben we (*) aangetoond en dus ook de transformatie van $\eta(\tau)$.

4 BESSEL - FUNCTIES

In dit deel laten we zien dat de Bessel functie geschreven kan worden als een integraal. Een dergelijke integraal komen we tegen in de afleiding voor p(n). Door middel van eigenschappen over de Bessel functie kunnen we dan de integraal schrijven als een product van elementaire functies.

We beschouwen de volgende integraal:

$$G(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} e^{w} w^{-s} \, dw$$

waarbij we in het w-vlak de negatieve x-as hebben weggesneden.

We zien w^{-s} als volgt:

$w^{-s} = e^{-s(\log|w| + i\arg w)}$ *met* $|\arg w| \leq \pi$ (dus de "hoofdwaarde")

De notatie, $-\infty$ tot (0+), als grenzen van de integraal geeft een pad aan wat in $-\infty$ onder de x-as begint, dan naar 0 gaat, vervolgens in een cirkeltje om 0 draait, om dan boven de negatieve x-as weer naar $-\infty$ te gaan. Dit pad kunnen we als een loop beschouwen.
De exacte vorm van het pad is niet van belang, omdat de functie $e^{w} w^{-s}$ regulier is in het vlak zonder de negatieve x-as.
Om in te zien dat de integraal convergent is nemen we een pad in drie delen:

1) van $-\infty$ tot $-\epsilon$ precies onder de weggesneden x-as. Dus met $\arg w \approx -\pi$

2) een cirkel met straal ϵ rond 0. Dus hier stellen we $w = \epsilon e^{i\phi}$ $\quad dw = i\epsilon e^{i\phi} \, d\phi$

3) van $-\epsilon$ tot $-\infty$ precies boven de weggesenden x-as. Dus met $\arg w \approx +\pi$

We krijgen dan:

$$G(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-\epsilon} e^{w} w^{-s(\log|w| - i\pi)} \, dw + \frac{1}{2}\pi \int_{-\pi}^{\pi} e^{\epsilon e^{i\phi}} e^{-s(\log\epsilon + i\phi)} \, \epsilon e^{i\phi} \, d\phi$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_{-\epsilon}^{-\infty} e^{w} e^{-s(\log|w| + i\pi)} \, dw$$

In de eerste en de derde integraal substitueren we $x = -w$:

$$G(s) = \frac{e^{i\pi s} - e^{-i\pi s}}{2\pi i} \int_{\epsilon}^{\infty} e^{-x} x^{-s}\, dx + \frac{\epsilon^{1-s}}{\epsilon^{1-s}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\epsilon e^{i\phi}} e^{-s(\log\epsilon + i\phi)} \epsilon e^{i\phi}\, d\phi$$

$$= \frac{\sin \pi s}{\pi} \int_{\epsilon}^{\infty} e^{-x} x^{-s}\, dx + \frac{\epsilon^{1-s}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\epsilon e^{i\phi}} e^{(1-s)\, i\phi}\, d\phi$$

Met de functies van s onder het integraalteken hebben we nu geen problemen meer, deze zijn analytisch. Verder is de convergentie van de oneigenlijke integraal uniform op elk begrensd gebied in het s-vlak.

Nu kijken we naar

$$\left| \frac{\epsilon^{1-s}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\epsilon e^{i\phi}} e^{(1-s)i\phi}\, d\phi \right| \le \epsilon^{1-\sigma} e^{\epsilon} e^{\pi|s|} \qquad (*)$$

Waarbij $\sigma = Re(s)$.

Als $\sigma < 1$ dan gaat het rechterdeel van (*) naar 0, als ϵ naar 0 gaat.

De bovenstaande conditie voor $\sigma = Re(s)$ verzekert dat geldt:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{\infty} e^{-x} x^{-s}\, dx = \int_{0}^{\infty} e^{-x} x^{-s}\, dx$$

We herkennen hierin de gamma-functie:

$$\Gamma(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-u} u^{s-1}\, du$$

Dit invullen in de uitdrukking voor $G(s)$ levert:

$$G(s) = \frac{\sin \pi s}{\pi} \Gamma(1 - s)$$

Door middel van een andere definitie van de Γ-functie kunnen we het volgende afleiden:

$$\Gamma(s)\, \Gamma(1 - s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

(Deze afleiding wordt in appendix 1 van dit deel gegeven.)

Dan hebben we:

$$G(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}$$

Dit hebben we bewezen onder de aanname $Re(s) < 1$. Maar aangezien aan beide kanten van de vergelijking "nette" functies staan, moet de vergelijking gelden voor alle s.
Hiermee hebben we de formule van Hankel:

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} e^{w} w^{-s} \, dw$$

Dit gaan we gebruiken om een andere uitdrukking voor de Bessel-functies te geven.
De Bessel functies zijn als volgt gedefiniëerd:

$$J_v(z) = (\frac{z}{2})^v \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\frac{z}{2})^{2n}}{n! \, \Gamma(v+n+1)}$$

Hierin Hankel's formule invullen levert:

$$J_v(z) = \frac{1}{2\pi i} (\frac{z}{2})^v \int_{-\infty}^{(0+)} e^{w} w^{-v-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{w^{-n}(z/2)^{2n}}{n!} \, dw$$

$$= \frac{(\frac{z}{2})^v}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} e^{w-(z^2/4w)} w^{-v-1} \, dw$$

Voor $Re(v) > 0$ kan pad (de "loop") uitgespreid worden tot een verticale lijn in het rechter half-vlak:

$$J_v(z) = \frac{(\frac{z}{2})^v}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{w-(z^2/4w)} w^{-v-1} \, dw \, , \quad Re(v) > 0 \, , \quad c > 0$$

We definiëren ook de Bessel functie I_v :

$$I_v(z) = (\frac{z}{2})^v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{z}{2})^{2n}}{n! \, \Gamma(v+n+1)}$$

Ook hierin Hankel's formule invullen, en dezelfde afleiding levert:

$$I_v(z) = \frac{(\frac{z}{2})^v}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{w+(z^2/4w)} w^{-v-1} \, dw \, , \quad Re(v) > 0 \, , \quad c > 0$$

In de afleiding van de formule voor $p(n)$ zullen we $I_{3/2}(z)$ herkennen.
Deze kan door middel van een aantal lemma's over Bessel functies in een mooie vorm gegeven worden.
We brengen eerst de twee soorten Bessel functies in één vorm d.m.v. de volgende definitie:

$$J_v^{(\epsilon)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \frac{(\frac{z}{2})^{2n+v}}{n!\,\Gamma(v+n+1)}$$

Dus

$$J_v^{(-1)}(z) = J_v(z)\ , \qquad J_v^{(1)}(z) = I_v(z)$$

Nu beschouwen we de volgende twee lemma's :

$$I \quad \frac{d}{dz}(z^{-v} J_v^{(\epsilon)}(z)) = \epsilon\, z^{-v} J_{v+1}^{(\epsilon)}(z)\ .$$

$$II \quad I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\ \sinh z\ .$$

Deze Lemma's zijn af te leiden d.m.v. de definities van de Bessel functies en bepaalde eigenschappen van de gamma functie. (In appendix 2 wordt een afleiding gegeven)

We definiëeren nu:

$$\lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}} \quad en \quad K = \frac{\pi}{q}\sqrt{\frac{2}{3}}\ .$$

In Lemma II nemen we $z = K\lambda_n$. We krijgen dan:

$$\frac{\sqrt{\pi}\,K}{\sqrt{2}}\, z^{-1/2}\, I_{1/2}(z) = \frac{\sinh z}{\lambda_n}$$

Nu zien we met Lemma I: $\frac{d}{dz}\frac{\sinh z}{\lambda_n} = \frac{\sqrt{\pi}\,K}{\sqrt{2}}\, z^{-1/2}\, I_{3/2}(z)$

Verder hebben we : $\frac{d}{dn} z = \frac{K^2}{2z}$ en dus:

$$\frac{d}{dn}\ \frac{\sinh K\lambda_n}{\lambda_v} = \frac{\sqrt{\pi}\,K^3}{2^3}\ \frac{I_{3/2}(K\lambda_n)}{(\frac{K}{2}\ \lambda_n)^{3/2}}\ .$$

Deze uitdrukking gebruiken we in de afleiding van de formule voor $p(n)$.

APPENDIX 1

De Gamma-functie is een uitbreiding van de faculteitsfunctie:

$m! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m$

We kunnen $m!$ als volgt schrijven:

$$m! = \frac{(m+N)!}{(m+1)(m+2)\ldots(m+N)}$$

$$= \frac{1}{m+1}\,\frac{2}{m+2}\,\ldots\,\frac{N}{m+N}\,(N+1)\,(N+2)\,\ldots\,(N+m)$$

$$= \prod_{v=1}^{N} \frac{v}{m+v} \cdot (N+1)^m \cdot \frac{(N+1)(N+2)\ldots(N+m)}{(N+1)^m}$$

Dit geldt voor een willekeurig natuurlijk getal N.

Voor $N \to \infty$ gaat de laatste factor naar 1, dus:

$$m! = \lim_{N\to\infty} (N+1)^m \prod_{v=1}^{N} \frac{v}{m+v}$$

De factor $(N+1)^m$ kunnen we onder het product brengen, immers

$$N+1 = \prod_{v=1}^{N} \frac{v+1}{v}$$

zodat we de volgende uitdrukking voor m krijgen:

$$m! = \lim_{N\to\infty} \frac{v}{v+m}\left(\frac{v+1}{v}\right)^m = \prod_{v=1}^{\infty} \frac{v}{v+m}\left(\frac{v+1}{v}\right)^m$$

We vervangen m door een willekeurig complex getal s en definieren:

$$s! = \lim_{N\to\infty} \frac{v}{v+s}\left(\frac{v+1}{v}\right)^m = \prod_{v=1}^{\infty} \frac{v}{v+s}\left(\frac{v+1}{v}\right)^s$$

Het verband tussen de Gamma-functie en $s!$ is als volgt:

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s}\, s!$$

(Het bewijs dat deze definitie overeenkomt met de eerder dit deel gebruikte definitie $\int_0^\infty e^u\, u^{s-1}\, du$ wordt hier achterwege gelaten).

Omdat $m! = m\,(m-1)!$ verwachten we dat

$\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$.

Dit is inderdaad het geval. (Volgt rechtstreeks uit de hierboven gegeven definitie van $\Gamma(s)$)

Verder zien we dat

$$\Gamma(s)\cdot\Gamma(-s) = -\frac{i}{s^2}\prod_{v=1}^{\infty}\frac{v}{v+s}\,\frac{v}{v-s}$$

En dus hebben we:

$$\Gamma(s)\cdot\Gamma(1-s) = \frac{1}{s}\prod_{v=1}^{\infty}\frac{v^2}{v^2-s^2}$$

wat met behulp van

$$\sin z = z\prod_{v=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\pi^2 v^2}\right)$$

leidt tot

$$\Gamma(s)\cdot\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

Hieruit volgt direkt de bekende vergelijking: $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

APPENDIX 2

Bessel functies kunnen we als volgt definiëren:

$$J_v^{(\epsilon)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n \frac{(\frac{z}{2})^{2n+v}}{n!\ \Gamma(n+v+1)}$$

Voor $\epsilon = \pm 1$ schrijven we:

$$J_v^{(-1)}(z) = J_v(z)\ , \qquad J_v^{(1)}(z) = I_v(z)\ .$$

We bewijzen de volgende twee lemma's:

$$I \quad \frac{d}{dz}(z^{-v} J_v^{(\epsilon)}(z)) = \epsilon\, z^{-v}\, J_{v+1}^{(\epsilon)}(z)\ .$$

$$II \quad I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\ \sinh z\ .$$

Lemma I volgt rechtstreeks uit de definitie van de Bessel functie:

$$z^{-v}\, J_v^{(\epsilon)}(z) = z^{-v} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n (\frac{1}{2})^{2n+v} \frac{z^{2n+v}}{n!\,\Gamma(n+v+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n (\frac{1}{2})^{2n+v} \frac{z^{2n}}{n!\,\Gamma(n+v+1)}$$

$$= \sum_{n=-1}^{\infty} \epsilon^{n+1} (\frac{1}{2})^{2n+v+2} \frac{z^{2n+2}}{(n+1)!\,\Gamma(n+v+2)}$$

(merk op dat de term $n=-1$ niet van z afhangt).

Dus $\frac{d}{dz}(z^{-1} J_v^{(\epsilon)}(z))$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^{n+1} (\frac{1}{2})^{2n+v+2} \frac{2(n+1)}{n+1} \frac{z^{2n+1}}{n!\,\Gamma(n+v+2)}$$

$$= \epsilon\, z^{-v} J_v^{(\epsilon)}(z)$$

Lemma *II* volgt uit de definitie van de Bessel functie en uit eigenschappen van de gamma-functie:

We weten: $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ *en* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Dus $\Gamma(\frac{1}{2}+n+1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{2n+1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\,\dfrac{\prod_{k=0}^{n}(1+2k)}{2^{n+1}}$ (*)

Verder hebben we: $n!\,2^n \prod_{k=0}^{n}(1+2k) = (2n+1)!$ (**)

$$I_{1/2}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{z}{2})^{2n+1/2}}{n!\,\Gamma(1/2+n+1)} = (\frac{2}{z})^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{z}{2})^{2n+1}}{n!\,\Gamma(1/2+n+1)}$$

Met behulp van (*) en (**) krijgen we:

$$I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{z\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sqrt{\frac{2}{z\pi}}\,\sinh z$$

5 AFLEIDING VAN DE FORMULE VOOR P(N).

In dit geven een afleiding voor de formule voor $p(n)$, waarbij we gebruik maken van de theorie uit de voorgaande delen. In de inleiding is beschreven hoe deze aflaiding gebruik maakt van die theorie.

We weten uit het deel Recursieve formule voor p(n) dat de genererende functie voor $p(n)$ er als volgt uit ziet:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - x^m)^{-1}, \quad met \quad 0 < |x| < 1 .$$

Neem $x = e^{2\pi i\tau}$, $met \ Im\ \tau > 0$.

Volgens Cauchy's integraalstelling krijgen we:

$$p(n) = \int_{\tau_0}^{\tau_0+1} f(e^{2\pi i\tau})\, e^{-2\pi i n\tau}\, d\tau$$

τ_0 is een punt in het bovenhalfvlak en elk pad van τ_0 naar $\tau_0 + 1$ is toegestaan.

Dus $p(n) = \int_{i}^{i+1} f(e^{2\pi i\tau}) e^{-2\pi i n\tau}\, d\tau$.

Als pad van i naar $i + 1$ kiezen we het pad dat we geconstrueerd hebben in het deel Faray rijen en Ford cirkels.

We krijgen dan:

$$p(n) = \sum_{0\le p<q\le N} \int_{\gamma_{pq}} f(e^{2\pi i\tau}) e^{-2\pi i n\tau}\, d\tau .$$

De sommatie loopt alleen over de termen waar $(p,q) = 1$.

Als we dezelfde notatie van de raakpunten gebruiken als in het deel Faray rijen en Ford cirkels krijgen we:

$$p(n) = \sum_{0 \le p < q \le N} \int_{\zeta'_{pq}}^{\zeta''_{pq}} f(e^{2\pi i(p/q+\zeta)})\, e^{-2\pi i n(p/q+\zeta)}\, d\zeta \ .$$

In de integraal behorend bij p/q loopt de variabele ζ over de boog van de cirkel:

$$|\zeta - \frac{i}{2q^2}| = \frac{1}{2q^2} \ .$$

Introduceer nu een nieuwe variabele z door: $\zeta = \frac{iz}{q^2}$

Dit invullen levert:

$$p(n) = \sum_{0 \le p < q \le N} \frac{i}{q^2} e^{-2\pi i n p/q} \int_{z'_{pq}}^{z''_{pq}} f(e^{2\pi i p/q - 2\pi n z/q^2}) e^{2\pi n z/q^2}\, dz$$

met $z'_{pq} = (1/i) q^2 \zeta'_{pq}$, $z''_{pq} = (1/i) q^2 \zeta''_{pq}$.

z loopt over de cirkel $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$.

z volgt de boog van z'_{pq} tot z''_{pq} die niet de imaginaire as raakt (in negatieve richting)

Als we de waarden voor ζ'_{pq} en ζ''_{pq} invullen zien we:

$$z'_{pq} = \frac{q^2}{q^2 + q_1^2} + i \frac{q q_1}{q^2 + q_1^2}$$

$$z''_{pq} = \frac{q^2}{q^2 + q_2^2} - i \frac{q q_2}{q^2 + q_2^2} \ .$$

In deel 3 hebben we gezien dat de eta-functie van Dedekind als volgt gedefinieerd is:

$$\eta(\tau) = e^{\pi i \tau/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau}) \ .$$

We herkennen hierin de genererende functie f van $p(n)$:

$$f(e^{2\pi i\tau}) = e^{\pi i\tau/12}\eta(\tau)^{-1} .$$

We stellen $\tau = \frac{p}{q} + \frac{iz}{q}$

Dus: $f(e^{2\pi ip/q - 2\pi z/q}) = e^{\pi ip/12q - \pi z/12q}\,\eta(\frac{p}{q} + \frac{iz}{q})^{-1}$

Stel nu $\tau' = \frac{p'}{q} + \frac{iz^{-1}}{q}$ $\qquad (pp' \equiv -1 \pmod q)$

Uit het deel <u>Transformatie van $\eta(\tau)$</u> weten we:

$$\eta(\tau') = \eta(\tau)\sqrt{z}\, e^{\frac{\pi i}{12q}(p'-p)}\, e^{\pi i\, s(p,q)}$$

dus $\eta(\tau)^{-1} = \eta(\tau')^{-1}\sqrt{z}\, e^{\frac{\pi i}{12q}(p'-p)}\, e^{\pi i\, s(p,q)}$.

Dit invullen in de uitdrukking die we voor f hadden levert:

$$f(e^{2\pi ip/q - 2\pi z/q}) = e^{\pi ip/12q - \pi z/12q}\, e^{\pi i(p'-p)/12q}\, e^{\pi i\, s(p,q)}\sqrt{z}\,\eta(\frac{p'}{q} + \frac{i}{zq})^{-1}$$

$\eta(\tau')$ kunnen we uitdrukken in $f(e^{2\pi i\tau'})$:

$$f(e^{2\pi ip/q - 2\pi z/q} = \omega_{pq}\, e^{(\pi/12q)(1/z - z)}\sqrt{z}\, f(e^{2\pi ip'/q - 2\pi/qz})$$

met $\omega_{pq} = e^{\pi i\, s(p,q)}$.

Nu vervangen we z door z/k en krijgen:

$$f(e^{2\pi ip/q-2\pi z/q^2}) = \frac{\omega_{pq}}{\sqrt{q}}\,\Psi_q(z)\,f(e^{2\pi ip'/q-2\pi/z})$$

waarbij $\Psi_q(z) = \sqrt{z}\,e^{\pi/12z-\pi z/12q^2}$.

Deze uitdrukkingen voor f invullen in de uitdrukking die we voor $p(n)$ haden levert:

$$p(n) = \sum_{0\le p<q\le N} \frac{i}{q^{5/2}}\,\omega_{pq}\,e^{-2\pi ipn/q} \int_{z'_{pq}}^{z''_{pq}} \Psi_q(z)\,f(e^{2\pi ip'/q-2\pi/z})\,e^{2\pi nz/q^2}\,dz \ .$$

We weten dat $f(x) = 1 + p(1)x + p(2)x^2 + \ldots$

In ons geval: $x = e^{2\pi ip'/q-2\pi/z}$

Het $Re\ z$ kunnen we klein maken, zodat $Re\ 1/z$ groot wordt, en dus $|x|$ klein is.
Dan kunnen we $f(x)$ met 1 vergelijken, en vervolgens de integraal afschatten.
We schrijven daarom:

$$p(n) = \sum_{0\le p<q\le N} \frac{i}{q^{5/2}}\,\omega_{pq}\,e^{-2\pi ipn/q} \int_{z'_{pq}}^{z''_{pq}} \Psi_q(z)\,e^{2\pi nz/q^2}\,dz$$

$$+ \sum_{0\le p<q\le N} \frac{i}{q^{5/2}}\,\omega_{pq}\,e^{-2\pi ipn/q} \int_{z'_{pq}}^{z''_{pq}} \Psi_q(z)\,(f(x) - 1)\,e^{2\pi nz/q^2}\,dz$$

We beschouwen de twee integralen:

$$I_{pq} = \int_{z'_{pq}}^{z''_{pq}} \Psi_q(z)\,e^{2\pi nz/q^2}\,dz$$

$$I_{pq}^{*} = \int_{z'_{pq}}^{z''_{pq}} \Psi_q(z)\,(f(e^{2\pi ip'/q-2\pi/z}) - 1)\,e^{2\pi nz/q^2}\,dz \ .$$

De variabele z loopt over $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$, en komt niet in 0.

Binnen deze cirkel en op de cirkelrand hebben we:

$0 < Re\ z \leq 1, \quad Re\ \frac{1}{z} \geq 1$ dus:

$$|\Psi_q(z)\ (f(e^{2\pi i p'/q - 2\pi/z}) - 1)\ e^{2\pi n z/q^2}|$$

$$= |z^{1/2} e^{\pi/12z - \pi z/12q^2} \sum_{m=1}^{\infty} p(m)\ e^{(2\pi i p'/q - 2\pi/z)m}\ e^{2\pi n z/q^2}|$$

$$\leq |z|^{1/2}\ e^{(2\pi n/q^2)Re(z)}\ e^{(2\pi n/q^2)Re(z)} \sum_{m=1}^{\infty} p(m)\ e^{-2\pi(m-1/24)Re(1/z)}$$

$$\leq |z|^{1/2}\ e^{(2\pi n/q^2)Re(z)} \sum_{m=1}^{\infty} p(m)\ e^{-2\pi(m-1/24)}$$

$$= |z|^{1/2}\ e^{(2\pi n/q^2)Re(z)}\ Constante\ .$$

De integraal I_{pq}^{*} is regulier in de cirkel $|z - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$.

We integreren daarom over een koorde van de cirkel. Op deze koorde geldt:

$|z| \leq \max\ (|z'_{pq}|\ ,\ |z''_{pq}|)$.

Dit invullen in de waarden die we voor z'_{pq} *en* z''_{pq} hadden levert:

$$|z'_{pq}|^2 \leq \frac{q^4 + q^2 q_1^2}{(q^2 + q_1^2)^2} = \frac{q^2}{q^2 + q_1^2} \leq \frac{2q^2}{(q + q_1)^2} < \frac{2q^2}{N^2}\ .$$

en op dezelfde wijze $|z''_{pq}|^2 < \frac{2q^2}{N^2}$.

Dus op de koorde hebben we $|z| \leq \frac{\sqrt{2}\ q}{N}$.

Voor $Re\ z$ geldt:

$$0 < Re\ z \le \max\left(\frac{q^2}{q^2 + q_1^2}\ ,\ \frac{q^2}{q^2 + q_2^2}\right)$$

en dus:

$$0 < Re\ z < \frac{2q^2}{N^2}\ .$$

De lengte van de koorde, d.w.z de lengte van het integratiepad is kleiner of gelijk aan $|z'_{pq}| + |z''_{pq}| < 2\sqrt{2}\ q/N$.

Dit alles levert:

$$|I_{pq}{}^2| < Const\ \frac{q^{3/2}}{N^{3/2}}\ e^{4\pi|n|\ /\ N^2} = O(q^{3/2}N^{-3/2}) \qquad \text{voor elke } n\ .$$

Als we de integraal I_{pq} uitbreiden zodat we over de hele cirkel integreren hebben we:

$$I_{pq} = \int_{K^{(-)}} \Psi_q(z)\ e^{2\pi nz/q^2}\ dz - \int_0^{z'_{pq}} - \int_{z''_{pq}}^{0}\ .$$

$K^{(-)}$ is de rotatie rond de cirkel in negatieve richting.

Voor de laatste twee integralen geven we eerst een afschatting:

Op de cirkel hebben we: $Re\ \frac{1}{z} = 1,\quad 0 \le Re\ z \le 1$.

De lengte van de boog van 0 naar z'_{pq} is kleiner of gelijk aan

$$\frac{\pi}{2}\ |z'_{pq}| < \frac{\pi}{2}\ \frac{\sqrt{2}\ q}{N}$$

en op de boog hebben we $|z| < \frac{\sqrt{2}\ q}{N}$.

Dus kunnen we een zelfde soort afschatting maken als voor I_{pq} en zien we:

$$\left|\int_0^{z'_{pq}} \Psi_q(z)\ e^{2\pi nz/q^2}\ dz\right| = O(q^{3/2}\ N^{-3/2}\ e^{4\pi|n|\ /N^2})$$

Dit gaat analoog voor de laatste integraal.

Nu gaan we weer terug naar wat we voor $p(n)$ hadden:

$$p(n) = \sum_{0\le p<q\le N} \frac{i}{q^{5/2}} \omega_{pq} e^{-2\pi ipn/q} (I_{pq} + I_{pq}^{*}) .$$

De afschattingen invullen levert:

$$p(n) = \sum_{0\le p<q\le N} \frac{i}{q^{5/2}} \omega_{pq} e^{-2\pi ipn/q} \int_{K^{(-)}} \Psi_q(z)\, e^{2\pi nz/q^2} + R$$

met

$$= O\Big(\sum_{0\le p<q\le N} q^{-1}N^{-3/2} e^{2\pi|n|/N^2}\Big) = O\Big(\sum_{0<q\le N} e^{4\pi|n|/N^2} N^{-3/2}\Big) = O(e^{4\pi|n|/N^2} N^{-1/2}$$

en dus

$$p(n) = i \sum_{q=1}^{N} \frac{1}{q^{5/2}} A_q(n) \int_{K^{(-)}} \Psi_q(z)\, e^{2\pi nz/q^2} + R$$

met

$$A_q(n) = \sum_{p=1\ (p,q)=1}^{q-1} \omega_{pq} e^{-2\pi ipn/q} \qquad \text{(Als } q = 1 \text{ dan } p = 0) .$$

De sommatie over p kon niet eerder geëlimineerd worden, omdat het integratiepad afhing van p.

$p(n)$ hangt niet af van N. Dus we mogen N naar oneindig laten gaan; dan gaat de restterm naar 0.
Dus:

$$p(n) = i \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{5/2}} A_q(n) \int_{K^{(-)}} \Psi_q(z)\, e^{2\pi nz/q^2} .$$

We hebben nu een exacte formule voor $p(n)$. We kunnen direct zien dat de som absoluut convergent is, immers:

$$\Big|\int_{K^{(-)}}\Big| \le 2\pi e^{\pi/12} e^{2\pi|n|} .$$

verder geldt $|A_q(n)| \le q$

(iedere term binnen de som heeft absolute waarde =1) ,

dus de som in de exacte formule wordt gemajoreerd door:

$$2\pi\, e^{\pi/12}\, e^{2\pi|n|} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{3/2}}$$

Nu moeten we de integraal gaan berekenen. We voeren eerst een substitutie uit:

$$w = \frac{1}{z}, \quad dz = -\frac{dw}{w^2}$$

en we krijgen:

$$p(n) = \frac{1}{i} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^{5/2}} A_q(n) \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} w^{\frac{-5}{2}}\, e^{\frac{\pi w}{12} + \frac{2\pi}{q^2}(n-\frac{1}{24})\frac{1}{w}}\, dw \ .$$

nu nog een substitutie: $t = \frac{\pi w}{12}$

$$p(n) = \frac{1}{i} \left(\frac{\pi}{12}\right)^{3/2} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-5/2} A_q(n) \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-\frac{5}{2}}\, e^{t + \frac{\pi^2}{6q^2 t}(n-\frac{1}{24})}\, dt, \quad (c>0) \ .$$

In de integraal herkennen we een Bessel-functie. We gebruiken nu de notatie uit het deel <u>Bessel-functies</u> en zien dat in de uitdrukking voor $p(n)$ de vorm $I_{3/2}(z)$ staat. $\left(z = \frac{\pi}{q}\sqrt{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{24})}\right)$

Als we dat uitwerken krijgen we:

$$p(n) = 2\pi \left(\frac{\pi}{12}\right)^{-3/2} \sum_{q=1}^{\infty} q^{-5/2} A_q(n)$$

$$\cdot \left(\frac{\pi}{2q}\sqrt{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{24})}\right)^{-3/2} I_{3/2}\left(\frac{\pi}{q}\sqrt{\frac{2}{3}(n-\frac{1}{24})}\right)$$

In het deel <u>Bessel-functies</u> geven we een afleiding van de volgende vergelijking:

$$\frac{d}{dn}\, \frac{\sinh K\lambda_n}{\lambda_n} = \frac{\sqrt{\pi}\, K^3}{2^3}\, \frac{I_{3/2}(K\lambda_n)}{\left(\frac{K}{2}\lambda_n\right)^{3/2}}$$

daarin is $\lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}}$ $\qquad K = \frac{\pi}{q}\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Dit vullen we in in onze uitdrukking voor $p(n)$ en zien:

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{q=1}^{\infty} q^{1/2} A_q(n) \frac{d}{dn} \frac{\sinh \frac{\pi}{q}\sqrt{\frac{2}{3}}\lambda_n}{\lambda_n}$$

Dit is de uiteindelijke formule voor $p(n)$.

Ook nu kunnen we weer makkelijk zien dat de som absoluut convergent is.
We stellen $C = \pi\sqrt{2/3}$ en hebben dan

$$\frac{\sinh \frac{C}{q}\lambda_n}{\lambda_n} = \frac{C}{q} + \frac{1}{6}\left(\frac{C}{q}\right)^3 \lambda_n^2 + \ldots,$$

$$\frac{d}{dn}\frac{\sinh \frac{C}{q}\lambda_n}{\lambda_n} = \frac{1}{6}\left(\frac{C}{q}\right)^3 + \ldots = O(q^{-3})$$

en dus

$$\sum_{q=1}^{\infty} q^{1/2} A_q(n) \frac{d}{dn}\frac{\sinh \frac{C}{q}\lambda_n}{\lambda_n} = O\left(\sum_{q=1}^{\infty} q^{-3/2}\right) .$$

6 FOUT ANALYSE VAN DE RESTTERM

In deel 5 hebben we de volgende formule voor p(n) afgeleid:

$$P(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{q=1}^{\infty} \sqrt{q}\, A_q(n) \frac{d}{dn} \frac{\sinh \frac{\pi}{q}\sqrt{\frac{2}{3}}\lambda_n}{\lambda_n}$$

waarbij $A_q(n) = \sum_{p=1}^{q-1} \sum_{(p,q)=1} \omega_{pq} e^{-2\pi i n/q}$ $\qquad \lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}}$

Om hiermee de exacte waarde van p(n) te bepalen kunnen we natuurlijk geen oneindig aantal termen uitrekenen. We willen maar N termen berekenen. Dit is voldoende als de som van N+1 tot oneindig kleiner dan een half is, immers we weten dat p(n) een natuurlijk getal is.
Verder zouden we liever een e-macht hebben dan een sinushyperbolicus (de oorspronkelijke formule van Hardy en Ramanudjan was met een e-macht). We kunnen de sinushyperbolicus vervangen door een e-macht ten koste van een kleine fout.
De twee fouten samen moeten kleiner dan 1/2 zijn om zeker te zijn dat we de exacte waarde van p(n) krijgen.

We schrijven p(n) als volgt:

$$P(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{q=1}^{N} \sqrt{q}\, A_q(n) \frac{d}{dn} \frac{\sinh \frac{C}{q}\lambda_n}{\lambda_n} + R_N$$

waar

$$R_N = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{q=N+1}^{\infty} \sqrt{q}\, A_q(n) \frac{d}{dn} \frac{\sinh \frac{C}{q}\lambda_n}{\lambda_n}$$

We gebruiken nu

$|A_q(n)| < 2q^{3/4}$

(Aan het eind van dit deel gaan we hier verder op in)

Nu gaan we R_N afschatten:

[Vul afschatting voor $A_q(n)$ in]

$$|R_N| < \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{q=N+1}^{\infty} q^{5/4} \left| \frac{d}{dn} \frac{\sinh \frac{C}{q}\lambda_n}{\lambda_n} \right|$$

[De machtreeks voor sinh invullen]

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{q=N+1}^{\infty} q^{5/4} \frac{d}{dn} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(\frac{C}{q})^{2v+1}(n-\frac{1}{24})^v}{(2v+1)!}$$

[De differentiatie naar n uitvoeren]

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{q=N+1}^{\infty} q^{5/4} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{(2v+1)!} (\frac{C}{q})^{2v+1} \lambda_n^{2v-2}$$

[De som over q afschatten als een integraal]

$$< \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{(2v+1)!} C^{2v+1} \lambda_n^{2v-2} \int_N^{\infty} \frac{dq}{q^{2v-1/4}}$$

[Bereken de integraal]

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{(2v+1)!\,(2v-5/4)} C^{2v+1} \frac{\lambda_n^{2v-2}}{N^{2v-5/4}}$$

[$N^{9/4}/\lambda_n^3$ buiten de som halen]

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{N^{9/4}}{\lambda_n^3} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{v}{(2v+1)!\,(2v-5/4)} (\frac{C\lambda_n}{N})^{2v+1}$$

[De term v=1 buiten de som halen en $\frac{v}{2v-5/4} \le \frac{8}{11}$ $(v \ge 2)$]

$$< \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{N^{9/4}}{\lambda_n^3} \left(\frac{2}{9} (\frac{C\lambda_n}{N})^3 + \frac{8}{11} \sum_{v=2}^{\infty} \frac{(C\lambda_n/N)^{2v+1}}{(2v+1)!} \right.$$

[De som is de machtreeks van een sinh min de eerste twee termen]

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{N^{9/4}}{\lambda_n^3} \left(\frac{2}{9} (\frac{C\lambda_n}{N})^3 + \frac{8}{11} (\sinh \frac{C\lambda_n}{N} - \frac{C\lambda_n}{N} - \frac{1}{6} (\frac{C\lambda_n}{N})^3) \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{N^{9/4}}{\lambda_n^3} \left(\frac{10}{99} (\frac{C\lambda_n}{N})^3 + \frac{8}{11} (\sinh \frac{C\lambda_n}{N} - \frac{C\lambda_n}{N}) \right)$$

Deze uitdrukking groeit als λ_n/N groter wordt, verder hebben we:

$$\lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}} < \sqrt{n} \ .$$

Dus krijgen we de volgende afschatting voor R_N :

$$R_N < \frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(\frac{10}{99} C^3 N^{-3/4} + \frac{8}{11} N^{-3/4} \left(\frac{N}{\sqrt{n}} \right)^3 \left(\sinh \frac{C\sqrt{n}}{N} - \frac{C\sqrt{n}}{N} \right) \right) .$$

In de formule voor $p(n)$ willen we de sinushyperbolicus vervangen door een e-macht. Daartoe vervangen we in de formule voor $p(n)$ in de eerste N termen over q

$$\frac{\sinh \frac{C}{q}\lambda_n}{\lambda_n} \quad \text{door} \quad \frac{1}{2} \frac{\exp \frac{C}{q}\lambda_n}{\lambda_n} \ .$$

Dit gaat ten koste van een fout R_N^* :

$$R_N^* = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{q=1}^{N} \sqrt{q}\, A_q(n) \frac{d}{dn} \frac{\exp\left(-\frac{C}{q}\lambda_n\right)}{\lambda_n}$$

[We gebruiken nu weer $|A_q(n)| < 2q^{3/4}$ en voeren de differtiatie uit]

$$|R_N^*| < \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{q=1}^{N} q^{5/4} \left(\frac{\exp(-\frac{C}{q}\lambda_n)}{2\lambda_n^2} \frac{C}{q} + \frac{\exp(-\frac{C}{q}\lambda_n)}{2\lambda_n^3} \right)$$

[In de exponent schatten we -1/q af met -1/N, en halen factoren onafhankelijk van q buiten de som, en schatten de som af met een integraal]

$$< \frac{C}{2\pi\sqrt{2}\lambda_n^2} \exp(-\frac{C}{N}\lambda_n) \int_0^{N+1} q^{1/4}\, dq$$

$$+ \frac{1}{2\pi\sqrt{2}\lambda_n^3} \exp(-\frac{C}{N}\lambda_n) \int_0^{N+1} q^{5/4}\, dq$$

[We rekenen de integralen uit en schatten de uitdrukkingen met λ_n af]

$$< \frac{2\exp\left(-\frac{C\sqrt{n-1}}{N}\right)}{(n-1)} (N+1)^{5/4} \left(\frac{1}{5\sqrt{3}} + \frac{1}{9\pi\sqrt{2}} \frac{N+1}{\sqrt{n-1}} \right)$$

De formule met restterm voor p(n) wordt dan:

$$p(n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sum_{q=1}^{N} \sqrt{q}\, A_q(n) \frac{d}{dn} \frac{e^{\frac{C}{q}\lambda_n}}{\lambda_n} + \nu\, N^{-3/4} (S_1 + S_2)$$

met $|\nu| < 1$ en

$$S_1 = \frac{10\sqrt{2}}{99\pi} C^3 + \frac{8\sqrt{2}}{11\pi} \left(\frac{N}{\sqrt{n}}\right)^3 \left(\sinh \frac{C\sqrt{n}}{N} - \frac{C\sqrt{n}}{N}\right)$$

$$S_2 = 2 \exp\left(-\frac{C\sqrt{n-1}}{N}\right) \frac{(N+1)^2}{n-1} \left(\frac{1}{5\sqrt{3}} + \frac{1}{9\pi\sqrt{2}} \frac{N+1}{\sqrt{n-1}}\right) .$$

Als $\sqrt{n}/N$ begrensd blijft zullen S_1 en S_2 ook begrensd zijn. De foutterm zal van de orde $O(N^{-3/4})$ of $O(n^{-3/8})$ zijn.
De foutterm is dus kleiner dan 1/2 te krijgen voor voldoende grote n en N. Aangezien p(n) een natuurlijk getal is zal p(n) dan gelijk aan het dichtsbijliggend natuurlijke gatal van de sommatie over q van 1 tot N.

We nemen

$N = [2\sqrt{n}/3]$ en $n \geq 24^2 = 576$.

We bekijken de uitdrukking met deze n en N in S_1 en S_2.
Gebruikmakend van $x-1 \leq [x] \leq x$ krijgen we de volgende condities:

$$\frac{3}{2} \leq \frac{\sqrt{n}}{N} \leq \frac{8}{5} \qquad \frac{\sqrt{n-1}}{N} \geq \frac{15}{48}\sqrt{23} \qquad \frac{N+1}{\sqrt{n-1}} \leq \frac{17}{5\sqrt{23}} .$$

Hiermee kunnen we S_1 en S_2 nummeriek afschatten:

$S_1 < 3{,}3077 \qquad S_2 < 0{,}0029$

Nu zien we dat de foutterm kleiner dan 1/2 is, en dat we om de exacte waarde van p(n) te bepalen maar $[2\sqrt{n}/3]$ termen hoeven mee te nemen, voor $n \leq 576$.

De eerste paar honderd waarden van p(n) kunnen we makkelijk bepalen met de recursieve formule. Met deze waarden kunnen we zien dat $[2\sqrt{n}/3]$ termen ook voldoende is voor de exacte waarde van p(n) voor $n > 3$.

We moeten nu nog kijken naar de afschatting van $A_q(n)$. We hebben

gebruik gemaakt van de afschatting $|A_q(n)| < 2q^{3/4}$. De afleiding hiervan is nogal bewerkelijk en wordt hier achterwegen gelaten, ook al omdat er een zeer eenvoudige afschatting voor $|A_q(n)|$ is:

$$|A_q(n)| \leq q$$

De absolute waarden van de termen van de som zijn gelijk aan 1, en er zijn maximaal q termen.

Als we dit invullen in de bovenstaande afschattingen van R_N en R_N^* kunnen we precies dezelfde stappen uitvoeren (de constanten zullen iets, veranderen maar worden alleen maar kleiner) en komen dan tot de volgende restterm:

$$\nu\, N^{-1/2}(S_1 + S_2)$$

Als we hiervan uitgaan kunnen we ook nemen $N = [2\sqrt{n}/3]$, maar om dan aan te tonen dat de fout kleiner dan een half is, moeten we $n \geq 66^2$ in plaats van $n \geq 24^2$ nemen.

7 TOEPASSING VAN DE FORMULE

De formule als computerprogramma.

Voor $p(n)$ hebben we de volgende formule:

$$p(n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \sum_{q=1}^{N} \sqrt{q}\, A_q(n) \frac{d}{dn} \frac{e^{C\lambda_n/q}}{\lambda_n} \qquad \textit{afgerond op een geheel getal}$$

$$C = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}\,, \quad \lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}}\,, \quad N = [2\sqrt{n}/3]$$

$$A_q(n) = \sum_{p=1\ (p,q)=1}^{q-1} e^{-2\pi i n p/q}\, e^{\pi i\, s(p,q)}$$

$$s(p,q) = \sum_{\mu=1}^{q-1} \left(\frac{\mu}{q} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\mu p}{q} - \left[\frac{\mu p}{q}\right] - \frac{1}{2}\right)$$

Als $q = 1$ dan $p = 0$, dus $A_1(n) = 1$

We willen deze formule in een vorm krijgen zodat deze als een functie in een hogere programmeertaal valt te schrijven.

We voeren de differentiatie naar n uit:

$$\frac{d}{dn} \frac{e^{C\lambda_n/q}}{\lambda_n} = \frac{\left(\frac{C}{q} - \frac{1}{\lambda_n}\right) e^{C\lambda_n/q}}{2\lambda_n^{\,2}}$$

We weten dat $p(n)$ geen imaginair deel bevat dus voor $A_q(n)$ mogen we het volgende nemen:

$$A_q(n) = \cos \pi(s(p,q) - 2np/q)$$

Nu hebben we de formule in "standaardfuncties" die elke programmeertaal aanwezig zijn. We weten dat de exacte waarde van $p(n)$ zeer groot wordt voor grotere n, dus moeten we met een pakket werken dat de mogelijkheid geeft om willekeurig grote ***reals*** te werken. Het pakket GP geeft de mogelijkheid om van te voren het significantieniveau op te geven, en werkt bovendien zeer snel met grote getallen. Dit significantieniveau kunnen we makkelijk bepalen omdat we weten dat de term $q = 1$ overheerst. Verder kunnen we voor grote n, λ_n met $\sqrt{n}$ vergelijken. De term $q=1$ ziet

er dan als volgt uit:

$$\frac{c - \frac{1}{\sqrt{n}}}{2\pi\sqrt{2}} \; \frac{e^{c\sqrt{n}}}{n}$$

De $\frac{1}{\sqrt{n}}$ kunnen we verwaarlozen.

En dus is voor grote n, $p(n)$ van de orde van grootte:

$$\frac{e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{n}}}{4\sqrt{3}\,n}$$

Het aantal cijfers van $p(n)$ is dan ongeveer:

$$1 + \sqrt{2/3}\,\pi\,\sqrt{n}\;{}^{10}\log e - {}^{10}\log n - {}^{10}\log 4\sqrt{3}\;.$$

Dat geeft een goede richtlijn voor welk significantieniveau moet worden opgegeven.

Met al deze informatie is het eenvoudig om een functie in GP te schrijven, dat voor zeer grote n de exacte waarde van $p(n)$ binnen afzienbare tijd berekent.

Voor wat kleinere n is een programma dat gebruik maakt van de recursieve formule sneller. Binnen een halve minuut kan met deze formule de waarden van p(1) tot en met p(1000) bepaald worden. Maar het zal duidelijk zijn dat een programma dat gebruik maakt van deze recursieve formule tegen onvermijdelijke geheugenproblemen zal oplopen.

Het pakket MapleV heeft een ingebouwde functie die $p(n)$ bepaald. Deze functie werkt met de recursieve formule maar op een zeer onhandige manier. Het berekenen van bv $p(200)$ levert al onoverkomelijke problemen op.

Toepassingen van partities

Als je n attributen wil verdelen over n posities, en het is toegestaan dat op een positie meerdere attributen mogen komen, kun je deze op $p(n)$ verschillende manieren verdelen over de n posities.
In het vakgebied theoretische natuurkunde heeft men soms te maken met dergelijke problemen en wil men dus de waarde van $p(n)$ weten. Als n groot is volstaat voor de toepassing vaak het asymptotisch gedrag van $p(n)$.

De eerste 100 waarden van p(n)

n	p(n)	n	p(n)
0	1	1	1
2	2	3	3
4	5	5	7
6	11	7	15
8	22	9	30
10	42	11	56
12	77	13	101
14	135	15	176
16	231	17	297
18	385	19	490
20	627	21	792
22	1002	23	1255
24	1575	25	1958
26	2436	27	3010
28	3718	29	4565
30	5604	31	6842
32	8349	33	10143
34	12310	35	14883
36	17977	37	21637
38	26015	39	31185
40	37338	41	44583
42	53174	43	63261
44	75175	45	89134
46	105558	47	124754
48	147273	49	173525
50	204226	51	239943
52	281589	53	329931
54	386155	55	451276
56	526823	57	614154
58	715220	59	831820
60	966467	61	1121505
62	1300156	63	1505499
64	1741630	65	2012558
66	2323520	67	2679689
68	3087735	69	3554345
70	4087968	71	4697205
72	5392783	73	6185689
74	7089500	75	8118264
76	9289091	77	10619863
78	12132164	79	13848650
80	15796476	81	18004327

n	p(n)	n	p(n)
82	20506255	83	23338469
84	26543660	85	30167357
86	34262962	87	38887673
88	44108109	89	49995925
90	56634173	91	64112359
92	72533807	93	82010177
94	92669720	95	104651419
96	118114304	97	133230930
98	150198136	99	169229875

p(100) = 190.569.292

p(200) = 3.972.999.029.388

p(500) = 2.300.165.032.574.323.995.027

p(1000) = 24.061.467.864.032.622.473.692.149.727.991

p(100000) =

27.493.510.569.775.696.512.677.516.320.986.352.688.173.429.315.
980.054.758.203.125.984.302.147.328.114.964.173.055.050.741.660.
736.621.590.157.844.774.296.248.940.493.063.070.200.461.792.764.
493.033.510.116.079.342.457.190.155.718.943.509.725.312.466.108.
452.006.369.558.934.464.248.716.828.789.832.182.345.009.262.853.
831.404.597.021.307.130.674.510.624.419.227.311.238.999.702.284.
408.609.370.935.531.629.697.851.569.569.892.196.108.480.158.600.
569.421.098.519

LITERATUUR

0 Inleiding

- G.H. Hardy Ramanudjan Twelve lectures on subjects suggested by his life and work (1940)

1 Recursieve formule voor p(n)

- Hardy & Wright The theory of numbers (1938)
- Apostol An introduction to analytic numbertheory

2 Faray rijen en Ford cirkels

- Rademacher Lectures on elementary number theory (1964)

3 Transformatie van de eta-functie

- Rademacher On the transformation of log $\eta(\tau)$. Journal of indian Mathematical Society, vol. 19 (1955) p. 25-30
- Rademacher Topics in analytic number theory (1970)

4 Bessel functies

- Rademacher Topics in analytic number theory (1970)

5 Afleiding van de formule voor p(n)

- Rademacher Topics in analytic number theory (1970)
- Rademacher On the partition function p(n). Proceedings of the National Acadamy of Sciences, vol 23 (1937), p. 78-84
- Rademacher On the expantion of the partition function. Annals of mathematics, ser 2, vol 44 (1943), p. 416-422

6 Fout analyse van de restterm

- Rademacher Topics in analytic number theory (1970)
- Rademacher On the Selberg formula for $A_q(n)$. Journal of the indian Mathematical Society, vol 21 (1957), p. 41-55