Afstudeerverslag

# Het probleem van wavelets op de sfeer

**Fleur Kelpin**

Rijksuniversiteit Groningen
Vakgroep Wiskunde
Postbus 800
9700 AV Groningen

Augustus 1996

# Het probleem van wavelets op de sfeer

Fleur Kelpin

30 augustus 1996

**Samenvatting**

Wavelets op de reële rechte worden geconstrueerd door schaling en translatie van een geschikte functie $\psi$. Het is de bedoeling ook op de sfeer wavelets te construeren. Hiertoe wordt op de bol een schaling geïntroduceerd. Translatie op $\mathbb{R}$ komt overeen met rotatie op de bol. De zo verkregen wavelet wordt bestudeerd in het licht van de theorie van Fourieranalyse op de sfeer en die van representaties van groepen.

# Inhoud

**1 Topologische groepen en de Haarmaat** 2
- 1.1 De actie van $G$ op $S$ . . . 2
- 1.2 Quotiëntruimtes . . . 2
- 1.3 Haarmaat . . . 3

**2 Representaties van groepen** 7
- 2.1 Definities . . . 7
- 2.2 Schur's lemma . . . 8
- 2.3 Directe sommen en ontbindingen . . . 10

**3 Fourieranalyse op de cirkel** 13
- 3.1 1D Representaties zijn karakters . . . 13
  - 3.1.1 Hoe komen de karakters in de Fourierreeks terecht? . . . 14
- 3.2 Invariante Deelruimtes . . . 15
- 3.3 De karakters zijn eigenfuncties van de Laplaciaan. . . . 16
- 3.4 Fouriercoëfficiënten zijn homomorfismen . . . 18

**4 Fourieranalyse op de bol** 18
- 4.1 SO(3) . . . 18
- 4.2 Integratie over SO(3) . . . 21
- 4.3 Legendre-polynomen . . . 26
- 4.4 De ruimtes $\mathcal{H}_n$ . . . 28

**5 De constructie van de wavelet** 32
5.1 Het projectieve vlak . . . . . 32
5.2 De schaling . . . . . 32
5.3 De Jacobiaan van de schaling . . . . . 33
5.4 Approximatie van delta . . . . . 34
5.5 Berekening van de Jacobiaan . . . . . 35
5.5.1 Een andere manier . . . . . 38

**6 De stelling van Wiener voor de sfeer** 41

**7 Resolutie van de identiteit?** 42
7.1 Het probleem . . . . . 43
7.1.1 $\rho$ moet oneindige maat hebben . . . . . 44
7.1.2 $\psi$ moet een even en een oneven deel hebben . . . . . 44
7.2 Vermoeden . . . . . 45

# 1 Topologische groepen en de Haarmaat

## 1.1 De actie van $G$ op $S$

**Definitie 1 (topologische groep)** *Een groep $G$, voorzien van een topologie, is een topologische groep indien*

- *De afbeelding $G \times G \ni (g_1, g_2) \to g_1 g_2 \in G$ continu is, en*
- *De afbeelding $G \ni g \to g^{-1} \in G$ continu is.*

**Definitie 2 ((linkse) actie)** *Een linkse actie van een groep $G$ (de transformatiegroep) op een topologische (Hausdorff)ruimte $S$ is een continue afbeelding $G \times S \ni (g, x) \to gx \in S$, z.d.d.*

- $g_1(g_2 x) = (g_1 g_2)x$, *en*
- $ex = x$

**Definitie 3 (transitieve actie)** *Een actie van $G$ op $S$ heet transitief als*

$$\forall x, y \in S \; \exists g \in G \text{ z.d.d. } gx = y$$

In dit geval noemt men $S$ wel een **homogene** ruimte. Dit om aan te geven dat alle punten uit de ruimte door de actie van $G$ in elkaar over kunnen gaan. Er zijn geen bijzondere punten.

## 1.2 Quotiëntruimtes

Als $G$ een groep is en $H$ een ondergroep, kan men een equivalentierelatie definiëren op G, door te stellen dat

$$g_1 \sim g_2 \Leftrightarrow g_2^{-1} g_1 \in H$$

De equivalentieklassen waar deze relatie $G$ in opdeelt zijn de linkernevenklassen $gH = \{gh \mid h \in H\}$. Deze klassen zijn de elementen van de quotiëntruimte, die we aanduiden met

$$G/H$$

De afbeelding $G \ni g \to gH \in G/H$ wordt wel aangeduid met $\pi$, voor projectie. Omdat de opdeling in klassen vaak wordt gebruikt om te abstraheren van de ruimte $H$, is de notatie $gH$ niet altijd even handig. In plaats daarvan schrijft men ook wel $\dot{g}$.

Als $G$ een topologische groep is, kan op de quotiëntruimte een topologie gedefinieerd worden door te stellen dat

$$O \subset G/H \text{ is open} \Leftrightarrow \pi^{-1}(O) \subset G \text{ is open}$$

Op analoge wijze is ook de quotiëntruimte $H\backslash G$ van rechternevenklassen te construeren.

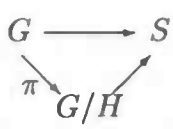
In het geval van een transitieve actie van $G$ op $S$, kunnen we een vast punt $p$ kiezen uit de homogene ruimte $S$. Dankzij de transitiviteit van de actie is de afbeelding $G \ni g \to gp \in S$ surjectief. Nu definiëren we

**Definitie 4 (stabilisator van $p$)**
*De stabilisator van een punt $p \in S$ is de groep*

$$H := \{g \in G \mid gp = p\}$$

$H$ is een gesloten ondergroep van $G$. Dit volgt direct uit de voorwaarden, genoemd in definitie 2, en uit de continuïteit van de afbeelding $pi$, gegeven door $G \ni g \to gp \in S$.

$\pi$ is rechts $H$-periodiek, omdat $ghp = gp$. Daarom induceert hij een afbeelding $G/H \ni \dot{g} \to gp \in S$. Deze is ook continu en tevens bijectief. Als $G$ en $S$ locaal compact zijn en $G$ separabel is, is de afbeelding bovendien een homeomorfisme en zijn $G/H$ en $S$ isomorf.



## 1.3 Haarmaat

**Definitie 5 (Haarmaat)** *Een linker Haarmaat op een topologische groep $G$ is een Radonmaat $\mu$ op $G$, zodanig dat voor alle $g \in G$ en alle Borelverzamelingen $A \subset G$*

$$\mu(gA) = \mu(A)$$

($gA := \{ga \mid a \in A\}$). Een rechter Haarmaat is analoog te definiëren, maar dan met de eis dat $\mu(Ag) = \mu(A)$.

**Stelling 1 (existentie en uniciteit linkerhaarmaat)** *Op iedere locaal compacte topologische groep bestaat er een linkerhaarmaat $\mu \neq 0$. Deze is op een factor na uniek.*

Voor de rechterhaarmaat is er een analoge stelling.

De existentie is, voor lokaal compacte groepen met aftelbare basis, voor het eerst bewezen door A.Haar. Vandaar de naam.

Op $\mathbb{R}^n$ is de Lebesguemaat zowel een linker- als een rechterhaarmaat. Immers $\lambda([a,b)) = b - a$, dus $\lambda([a,b) + c) = \lambda([a+c, b+c)) = (b+c) - (a+c) = \lambda([a,b))$ en bij de uitbreiding van de maat naar de Borelverzamelingen gaat deze translatieinvariantie niet verloren. Alle Haarmaten op $\mathbb{R}^n$ zijn dus een veelvoud van de Lebesguemaat.

**Stelling 2** *Voor alle Haarmaten $\mu$ op een topologische groep $G$ geldt het volgende:*

1. $\mathrm{dr}(\mu) = G$, *oftewel* $\mu(O) = 0$, $O$ *open*, $\Leftrightarrow O = \emptyset$
2. *Zij $f_1, f_2 \in C(G,S)$ met $S$ een topologische Hausdorffruimte. Als dan $f_1(g) = f_2(g)$ $\mu$-bijna overal op $G$, is $f_1(g) = f_2(g)$ $\forall g \in G$.*

Bewijs:

1. Zij $O$ open, niet leeg, $\mu(O) = 0$. Zij $\mu$ een linkerhaarmaat. (Voor rechterhaarmaten gaat het bewijs analoog). Omdat $O$ niet leeg is, is er een $g_O$ met $g_O \in O$. $G = \bigcup_{g \in G}\{g\} = \bigcup_{g \in G}\{gg_O\} = \bigcup_{g \in G} g\{g_O\} \subset \bigcup_{g \in G} gO$. Maar $\bigcup_{g \in G} gO \subset G$, dus

$$G = \bigcup_{g \in G} gO$$

Voor een gegeven $K$, compact, is $\bigcup_{g \in G} gO$ een overdekking met open verzamelingen. Dus bestaat er een eindige deeloverdekking $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} g_i O$. Maar aangezien $\mu(g_i O) = \mu(O) = 0$ is ook $\mu(K) = 0$. Dit voor alle compacte $K$. Nu is $\mu(G) = \sup_{K \subset G} \mu(K) = 0$ en dus $\mu = 0$.

2. De verzameling $\{g \mid f_1(g) \neq f_2(g)\}$ is het inverse beeld van de open verzameling $G\backslash\{0\}$ onder de continue afbeelding $f_1 - f_2$ en is dus zelf ook open. Alle open verzamelingen met maat 0 zijn leeg volgens 1. Dus is $f_1(g) = f_2(g)\ \forall g \in G$.

□

Deze stelling is voor $\mathbb{R}^n$ en de Lebesguemaat wel bekend.

Noteer de linker- en rechtertranslatie van functies als volgt:

$$(L(g)f)(x) = f(g^{-1}x)$$

$$(R(g)f)(x) = f(xg)$$

De inverse bij de linkertranslatie is zo gekozen opdat

$$\begin{aligned}(L(g_1)L(g_2)f)(x) &= (L(g_1)f)(g_2^{-1}x) = f(g_2^{-1}g_1^{-1}x) = f((g_1g_2)^{-1}x)\\ &= (L(g_1g_2)f)(x)\end{aligned}$$

en dus

$$L(g_1)L(g_2) = L(g_1g_2)$$

Een belangrijke eigenschap van de Haarmaat is de volgende:

**Stelling 3** *Zij $\mu$ een linkerhaarmaat en $f \in L^1(\mu)$. Dan is ook $L(g)f \in L^1(\mu)$ en*

$$\int (L(g)f)(x)d\mu(x) = \int f(g^{-1}x)d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x) \tag{1}$$

*Omgekeerd is iedere maat die aan vergelijking (1) voldoet een linkerhaarmaat.*

Het bewijs van deze stelling volgt de constructie van de Lebesgue-integraal. Voor indicatorfuncties van meetbare verzamelingen blijkt de bewering direct uit de definitie van de Haarmaat en in de loop van de constructie van de integraal voor algemenere functies blijft de identiteit gelden. De omkering volgt uit de uniciteit in de representatiestelling van Riesz-Markov. Op grond van de representatiestelling van Riesz-Markov kan men de maat immers identificeren met een lineaire functionaal. Noteer dus

$$\langle \mu, f \rangle = \int f(x)d\mu(x)$$

Voorts definiëren we de translatie van een Radonmaat door

$$\langle L(g)\mu, f \rangle = \langle \mu, L(g^{-1})f \rangle$$

en natuurlijk

$$\langle R(g)\mu, f \rangle = \langle \mu, R(g^{-1})f \rangle$$

Vergelijking (1) kan nu worden geschreven als

$$\langle L(g)\mu, f\rangle = \langle \mu, f\rangle$$

Als deze identiteit waar is voor alle $f$ uit $C_c(G)$, is volgens de uniciteit in Riesz-Markov $L(g)\mu = \mu$.

**Stelling 4** *Voor iedere locaal compacte topologische groep $G$ bestaat er een functie $\Delta_G : G \to \mathbb{R}_*^+$ zodanig dat voor iedere linkerhaarmaat $\mu$*

$$R(g)\mu = \Delta_G(g)\mu \tag{2}$$

Bewijs:
Voor alle $g_1 \in G$ is $L(g_1)R(g)\mu = R(g)L(g_1)\mu = R(g)\mu$. Dus is $R(g)\mu$ een linkerhaarmaat. Maar die is volgens stelling 1 op een factor na uniek. Dit levert de bewering, met als factor de $\Delta_G(g)$. □

**Definitie 6 (modulaire functie)** *De functie $\Delta_G$ uit vergelijking (2) heet de modulaire functie van groep $G$.*

**Definitie 7 (unimodulaire groep)** *Een locaal compacte topologische groep $G$ heet unimodulair als*

$$\Delta_G(g) = 1$$

*In dit geval zijn de linker- en rechterhaarmaat gelijk.*

**Stelling 5** *Compacte en Abelse groepen zijn unimodulair.*

Bewijs:
Een andere manier om vergelijking (2) te schrijven is

$$\Delta_G g \int f(xg)d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x)$$

Voor compacte groepen vul je voor $f$ de functie 1 in, om te komen tot

$$\Delta_G(g) \int d\mu(x) = \int d\mu(x)$$

$$\Delta_G(g) = 1$$

Bij Abelse groepen is er geen verschil tussen linker- en rechtervermenigvuldiging. □

Een laatste stelling, hier gegeven zonder bewijs, is

**Stelling 6** *Als $\mu$ een linkerhaarmaat op $G$ is, is*

$$\int f(x^{-1})\Delta_G(x^{-1})d\mu(x) = \int f(x)d\mu(x)$$

Een bewijs van deze stelling en meer theorie is o.a. te vinden in [7]

# 2 Representaties van groepen

## 2.1 Definities

**Definitie 8 (lineaire representatie)** *Een lineaire representatie $(E,T)$ van een groep $G$ in een lineaire ruimte $E$ (over $\mathbb{C}$ of $\mathbb{R}$) is een homomorfisme van $G$ naar de groep $\mathrm{GL}(E)$ van inverteerbare lineaire operatoren in $E$.*

Je hebt dus een afbeelding $T : G \to \mathrm{GL}(E)$ zodanig dat

$$T(g_1 g_2) = T(g_1)T(g_2) \quad \forall g_1, g_2 \in G$$

In het bijzonder is

$$T(g)^{-1} = T(g^{-1}) \quad \forall g \in G$$

aangezien $T(g^{-1})T(g) = T(g^{-1}g) = T(e) = Id$ en $T(g)T(g^{-1}) = T(gg^{-1}) = T(e) = Id$.

Als $G$ een topologische groep is en $E$ een topologische vectorruimte, kun je aangeven wanneer een representatie van $G$ in $E$ continu is.

**Definitie 9 (continue representatie)** *Een lineaire representatie van $G$ in $E$ is continu als de afbeelding $G \times E \ni (g,e) \to T(g)e \in E$ continu is.*

Een continue representatie heeft de volgende eigenschappen:

1. $T(g)$ is een continue operator $\forall g \in G$
2. de afbeelding $G \ni g \to T(g)e \in E$ is continu $\forall e \in E$
3. De familie operatoren $\{T(g) : g \in K\}$ is equicontinu[1] voor alle compacte $K \subset G$

**Definitie 10 (invariante deelruimte)** *Een deelruimte $E_1 \subset E$ heet invariant onder $(E,T)$ als $T(g)E_1 \subset E_1 \quad \forall g \in G$ N.B. We zullen alleen* **gesloten** *invariante deelruimtes beschouwen.*

**Definitie 11 (irreducibele representatie)** *Een representatie $(E,T)$ heet irreducibel als de triviale deelruimtes $0$ and $E$ de enige gesloten deelruimtes zijn die invariant zijn onder $(E,T)$. Anders heet hij reducibel.*

Een reducibele representatie $(E,T)$, kun je tot een invariante deelruimte $E_1$ **beperken**. De nieuwe representatie $(E_1, T^{E_1})$ is gedefinieerd door

$$T^{E_1}(g)x = T(g)x \quad \forall x \in E_1$$

Als de lineaire ruimte een Hilbertruimte is ($E = \mathcal{H}$), kennen we unitaire representaties:

[1] $(\forall V \subset E$, omgeving van $O)(\forall e \in E)(\exists U_{V,e} \subset E$, omgeving van $e)(\forall g \in G) \quad e' \in U \Rightarrow T(g)e' - T(g)e \in V$

**Definitie 12 (unitaire representatie)** *Een representatie $(\mathcal{H}, U)$ van een groep $G$ heet unitair als de operatoren $U(g)$ unitair zijn $\forall g \in G$*

Unitaire representaties spelen een speciale rol vanwege de volgende eigenschap:

**Stelling 7** *Zij $(\mathcal{H}, U)$ een unitaire representatie en $\mathcal{H}_1$ een invariante deelruimte. Dan is $\mathcal{H}_1^\perp$ ook invariant en commuteert de projectie $P$ op $\mathcal{H}_1$ met de operatoren $U(g)$.*

Bewijs:
Voor alle $h_1 \in \mathcal{H}_1, h^\perp \in \mathcal{H}^\perp, g \in G$ geldt $(U(g)h^\perp|h_1) = (h^\perp|U(g^{-1})h_1) \overset{\mathcal{H}_1 \text{inv.}}{=} 0$ dus zit ook $U(g)h^\perp$ in $\mathcal{H}_1^\perp$ en dus is $\mathcal{H}_1^\perp$ invariant.
Verder geldt voor willekeurige $h, h' \in \mathcal{H}$

$$(PU(g)h|h') = (U(g)h|Ph') = (h|U(g^{-1})Ph') \overset{\mathcal{H}\text{inv.}}{=} (h|PU(g^{-1})Ph')$$

$$= (PU(g)Ph|h') \overset{\mathcal{H}\text{inv.}}{=} (U(g)Ph|h')$$

Dus $PU(g) = U(g)P \quad \forall g \in G$ □

**Definitie 13 (vertwijnende operator)** *Een lineaire operator $A : E_1 \to E_2$ vertwijnt ('intertwines') de representaties $(E_1, T_1)$ en $(E_2, T_2)$ van een groep $G$ als $AE_1(g) = E_2(g)A \quad \forall g \in G$.*

De continue operatoren die de representaties $(E_1, T_1)$ en $(E_2, T_2)$ vertwijnen, vormen samen een ruimte die wel wordt aangeduid met $L_G(T_1, T_2)$ of, als het duidelijk is welke representaties bedoeld worden, met $L_G(E_1, E_2)$. Als $(E_1, T_1) = (E_2, T_2)$ schrijven we ook wel $L_G(T)$.

**Definitie 14 ((unitair) equivalente representaties)** *De representaties $(E_1, T_1)$ en $(E_2, T_2)$ heten equivalent als er een isomorfisme (d.w.z. een lineair homeomorfisme[2]) $A$ bestaat dat hen vertwijnt. Als $A$ unitair is, heten $(E_1, T_1)$ en $(E_2, T_2)$ unitair equivalent.*

## 2.2 Schur's lemma

Met behulp van deze terminologie is de volgende (belangrijke) stelling eenvoudig te formuleren en te bewijzen:

**Stelling 8 (Schur's lemma)** *Een unitaire representatie $(\mathcal{H}, U)$ is irreducibel* $\iff$ $\dim L_G(U) = 1$

Bewijs:

[2] continue bijectie met continue inverse

($\Longleftarrow$) Zij $\mathcal{H}_1$ een invariante deelruimte van $\mathcal{H}$. Dan volgt uit stelling 7 dat $P_{\mathcal{H}_1}$, de projectie op $\mathcal{H}_1$, in $L_G(U)$ zit. Maar omdat $L_G(U)$ ééndimensionaal is, vormt $Id$ een basis van deze ruimte. Dus $P_{\mathcal{H}_1} = Id$ of $P_{\mathcal{H}_1} = 0$. Conclusie: $\mathcal{H}$ is irreducibel.

($\Longrightarrow$) Als $A \in L_G(U)$, dan zit $A^*$ er ook in. Immers:

$$(A^*U(g)x|y) = (U(g)x|Ay) = (x|U(g^{-1})Ay) = (x|AU(g^{-1})y)$$

$$= (A^*x|U(g^{-1})y) = (U(g)A^*x|y)$$

Ook de lineaire combinaties $B := (A + A^*)$ en $C := i(A - A^*)$ zitten dan in $L_G(U)$. Maar deze zijn Hermitisch, dus bestaan hun spectrale families uit orthogonale projecties die commuteren met de $U(g)$. Het beeld van een projectie die commuteert met alle $U(g)$ is een invariante deelruimte. Maar de enige invariante deelruimtes van $\mathcal{H}$ waren 0 en $\mathcal{H}$. Dus $B = \lambda Id$ en $C = \mu Id$. $A$ is een lineaire combinatie van $B$ en $C$ en dus gelijk aan $\nu Id$. $L_G(U)$ is dus ééndimensionaal. □

**Gevolg 8.1 (Schur's lemma)**

- *Zij $U_1$ een irreducibele unitaire representatie en $U_2$ een willekeurige unitaire representatie. Dan is iedere operator uit $L_G(U_1, U_2)$ proportioneel aan een isometrie.*
- *Als $U_2$ ook irreducibel is, en $U_1$ en $U_2$ bovendien inequivalent zijn, geldt*

$$L_G(U_1, U_2) = \{0\}$$

Bewijs:
Zij $T \in L_G(U_1, U_2)$. Dan is $TT^* \in L_G(U_1)$. Stelling 8 zegt nu dat $TT^* = \lambda Id$ voor een $\lambda \geq 0$. Dus $(Tx|Ty) = (T^*Tx|y) = \lambda(x|y)$.

Stel $U_1$ en $U_2$ zijn inequivalent, $U_2$ is irreducibel. ran $A \subset \mathcal{H}_2$ is een $U_2$-invariante ruimte. Als immers $x_2 \in$ ran $A$, is $x_2 = Ax_1$ voor een $x \in U_1$. Maar voor willekeurige $g$ is dan $U_2(g)x_2 = U_2(g)Ax_1 = AU_2(g)x_1$. En omdat $\mathcal{H}_1$ $U_1$-invariant is, is $U_2(g)x_1 \in \mathcal{H}_1$ en dus $U_2(g)x_2 \in$ ran $A$. ran $A$ is bovendien gesloten, omdat $A$ volgens het eerste deel proportioneel is aan een isometrie en $\mathcal{H}_1$ volledig is. Op grond van de irreducibiliteit van $U_2$ is ran $A = \{0\} \vee$ ran $A = \mathcal{H}$. Maar als ran $A = \mathcal{H}$, zijn $U_1$ en $U_2$ equivalent. ran $A$ is dus $\{0\}$ en $A = 0$. □

**Gevolg 8.2** *Iedere irreducibele unitaire representatie $(\mathcal{H}, U)$ van een Abelse groep $G$ is ééndimensionaal.*

Bewijs:
Omdat de groep G commutatief is, geldt

$$U(g_1)U(g_2) = U(g_1g_2) = U(g_2g_1) = U(g_2)U(g_1)$$

$U(g)$ zit dus in $L_G(U)$. Maar omdat $(\mathcal{H}, U)$ irreducibel is, is $L_G(U)$ ééndimensionaal. Dus $U(g) = \lambda(g)Id$, wat wil zeggen dat iedere willekeurige deelruimte van $\mathcal{H}$ invariant is. Het irreducibel zijn van $(\mathcal{H}, U)$ wilde juist zeggen dat slechts 0 en $\mathcal{H}$ invariant zijn. Dat kan alleen als $\dim \mathcal{H} = 1$. □

## 2.3 Directe sommen en ontbindingen

Twee Hilbertruimtes $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$ kun je combineren tot hun directe som. De notatie voor deze ruimte is $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Hiertoe voorzie je het Cartesisch product $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$, van de norm $\|(x_1, x_2)\| = (\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2)^{\frac{1}{2}}$.

Ook twee representaties $(\mathcal{H}_1, U_1)$ en $(\mathcal{H}_2, U_2)$ kun je combineren tot een **directe som**. Dit is een representatie op de ruimte $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$. Deze representatie op $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ wordt gedefinieerd door

$$(U_1 + U_2)(g)(x_1, x_2) := (U_1(g)x_1, U_2(g)x_2)$$

Dit levert weer een unitaire representatie op. De beperking van $U_1 + U_2$ tot $\mathcal{H}_1$ (gezien als deelverzameling van $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$) is weer $U_1$.

**Stelling 9** $L_G(T, T_1 + T_2) = L_G(T, T_1) + L_G(T, T_2)$

Bewijs:
De ruimte $E$ waarop $T_1 + T_2$ werkt is te schrijven als $E_1 + E_2$. De projecties $P_{E_1}$ en $P_{E_2}$ commuteren met $T_1 + T_2$. Een operator $A$ uit $L_G(T, T_1 + T_2)$ is dus als volgt te ontbinden: $A = P_{E_1}A + P_{E_2}A$. □

Naast de constructie hierboven, waarbij ruimtes en representaties werden gecombineerd tot hun directe som, is het ook mogelijk om ruimtes en representaties te ontbinden door ze te schrijven als een directe som van deelruimtes en beperkte representaties:

Als $\mathcal{H}$ het opspansel is van orthogonale gesloten deelruimtes $\mathcal{H}_1$ en $\mathcal{H}_2$, is $\mathcal{H}$ isomorf met de directe som $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$.

Als een representatie reducibel is, wil dat zeggen dat er een invariante deelruimte $\mathcal{H}_1$ bestaat. Dan is $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_1^{\perp}$. Volgens stelling 7 is dan ook de deelruimte $\mathcal{H}_1^{\perp}$ invariant. $U$ is dus te schrijven als de directe som $U^{\mathcal{H}_1} + U^{\mathcal{H}_1^{\perp}}$.

Meer algemeen:

**Stelling 10** *Iedere eindigdimensionale unitaire representatie $(\mathcal{H}, U)$ van een groep $G$ is te schrijven als een directe som van irreducibele unitaire representaties.*

Bewijs:
Met inductie naar de dimensie van $\mathcal{H}$. Als $\dim \mathcal{H} = 1$, is $(\mathcal{H}, U)$ irreducibel. Stel dat de stelling bewezen is voor alle $\mathcal{H}$ met $\dim \mathcal{H} < n$.Zij $(\mathcal{H}_n, U_n)$ is een unitaire representatie met $\dim \mathcal{H}_n = n$. Stel nu dat $\mathcal{H}_n$ reducibel is. (Anders is de bewering triviaal.) Dan bestaat er een invariante deelruimte $\mathcal{H}_m$ met dimensie $0 < m < n$. We passen weer stelling 7 toe en zien dat ook $\mathcal{H}_m^{\perp}$ een invariante deelruimte is, en wel met dimensie $0 < n - m < m$. $U = U^{\mathcal{H}_m} + U^{\mathcal{H}_m^{\perp}}$. Beide representaties zijn volgens de inductiehypothese op hun beurt te ontbinden in een directe som van irreducibele unitaire representaties. Hiermee is de inductiehypothese bewezen voor $(\mathcal{H}_n, U_n)$. □ Over dit soort ontbindingen kunnen we met behulp van Schur's lemma het volgende zeggen:

**Stelling 11** *Zij (H ,U) een unitaire representatie, die geschreven kan worden als de directe som van eindig dimensionale irreducibele twee aan twee inequivalente unitaire representaties:*

$$\mathcal{H} = \sum_{n=0}^{\infty} {}^{\oplus} \mathcal{H}_n \qquad U = \sum_{n=0}^{\infty} U^{\mathcal{H}_n}$$

*Stel $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ commuteert met $U(g)$:*

$$AU(g) = U(g)A \ \forall g \in G$$

*Dan geldt:*

$$\exists \lambda_n : \ A = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n Q_n$$

*Hierin is $Q_n$ de projectie op $\mathcal{H}_n$.*

Bewijs:
We schrijven $U_n = U^{\mathcal{H}_n}$. Definieer verder $A_{n,m} : \mathcal{H}_m \to \mathcal{H}_n$ door

$$A_{n,m} = Q_n A|_{\mathcal{H}_m}$$

Dan is $A_{n,m} \in L_G(U_n, U_m)$. Immers:

$$\begin{aligned} A_{n,m}U_m(g) &= Q_n A_{|\mathcal{H}_m} U_m(g) = Q_n AU(g)_{|\mathcal{H}_m} = Q_n U(g) A_{|\mathcal{H}_m} \\ &= U(g)Q_n A_{|\mathcal{H}_m} = U_n(g)A_{n,m} \end{aligned}$$

In de voorlaatste stap gebruiken we stelling 7. Maar de elementen van $L_G(U_n, U_m)$ zijn volgens het tweede deel van stelling 8.1 gelijk aan 0 als de representaties inequivalent zijn, in dit geval dus als $n \neq m$.

$$A_{n,m} = 0, \ n \neq m \tag{3}$$

Op $A_{m,m}$ kun je stelling 8 toepassen om te concluderen dat $A_{m,m}$ op $\mathcal{H}_m$ gelijk is aan $\lambda_m I$.

$$A_{m,m} = \lambda_m I_{\mathcal{H}_m} \tag{4}$$

Uit de definitie van $A_{m,n}$ volgt dat

$$A = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} Q_n A Q_m = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} Q_n A|_{\mathcal{H}_m} Q_m = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_{n,m} Q_m$$

Hierin is $Q_m$ de projectie op $\mathcal{H}_m$. Invullen van (3) en (4) geeft

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n I_{\mathcal{H}_n} Q_n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n Q_n$$

□

**Gevolg 11.1** *Zij $(\mathcal{H}, U)$ een unitaire representatie die geschreven kan worden als de directe som van eindig dimensionale irreducibele inequivalente unitaire representaties:*

$$\mathcal{H} = \sum_{n=0}^{\infty}{}^{\oplus} \mathcal{H}_n \qquad U = \sum_{n=0}^{\infty} U^{\mathcal{H}_n}$$

*Iedere $U$-invariante deelruimte $\mathcal{H}$ is dan van de vorm*

$$\mathcal{H} = \sum_{n\in A}^{\infty}{}^{\oplus} \mathcal{H}_n$$

*met $A$ een verzameling is van gehele getallen $\geq 0$.*

Bewijs:
De projectie $Q$ op $\mathcal{H}$ commuteert met $U$, omdat $\mathcal{H}_n$ $U$-invariant is.

$$Q = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n Q_n$$

Maar omdat $Q$ een projectie is, en dus $Q^2 = Q$, moeten de $\lambda_n^2 = \lambda_n$, oftewel $\lambda = 0 \vee \lambda = 1$

$$Q = \sum_{\{n|\lambda_n=1\}} Q_n$$

$$\mathcal{H} = \sum_{n\in A}^{\infty}{}^{\oplus} \mathcal{H}_n$$

□

# 3 Fourieranalyse op de cirkel

Alvorens Fourieranalyse op de bol aan te pakken, is het wellicht handig eens te kijken naar Fourieranalyse in het licht van de theorie van representaties.

De cirkelgroep $S$ is de multiplicatieve groep van alle complexe getallen met modulus 1. De afbeelding $\mathbb{R} \ni t \to e^{2\pi it} \in S$ is een groepshomomorfisme met als kern de ondergroep $\mathbb{Z}$. Dus kun je $S$ identificeren met $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

## 3.1 1D Representaties zijn karakters

De cirkelgroep $S$ is commutatief. Dus zegt stelling 8.2 dat alle irreducibele unitaire representaties van $S$ ééndimensionaal zijn. Dus alle irreducibele unitaire representaties zijn van de vorm $U(g) = \chi(g)Id$. $\chi(g)$ moet aan de volgende eisen voldoen opdat $U(g)$ een representatie is:

- $|\chi(g)| = 1$
- $\chi(g_1)\chi(g_2) = \chi(g_1 g_2)$

In dit geval noemen we $\chi(g)$ een **karakter**.

**Stelling 12** *De karakters $e_n(x) = e^{2\pi inx}, n \in \mathbb{Z}$ zijn precies alle karakters van de cirkelgroep.*

Bewijs:
De $e_n$ zijn karakters want $|e_n(x)| = 1$ en $e_n(x+y) = e_n(x)e_n(y)$. Rest nog te bewijzen dat ieder karakter van de cirkelgroep van deze vorm is. Zij $e$ een karakter van $S$. Dan kun je $e$ uitbreiden tot een karakter van $\mathbb{R}$ met periode 1 door te stellen dat $e(x+n) = e(x)$ als $0 \leq x < 1$ en $n \in \mathbb{Z}$. Omdat $|e| = 1$, moet $e(x) = e^{i\phi(x)}$ voor reële $\phi$. De tweede eigenschap $e(x+y) = e(x)e(y)$ gaat nu over in de eis dat $\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y)$, modulo $2\pi$. Voor alle $j \in \mathbb{Z}$ geldt dus dat $\phi(jx) = j\phi(x)$, modulo $2\pi$. Dus, aangezien $j\phi(\frac{k}{j}) = \phi(k) = k\phi(1)$, moet $\phi(x) = x\phi(1), \quad x = \frac{k}{j}$.

$$e(x) = e^{ix\phi(1)}$$

In ieder geval voor rationale x. Maar i.v.m. continuïteit moet het dan gelden voor alle $x$. Uit $1 = e(0) = e(1) = e^{i\phi(1)}$ volgt dat $\phi(1)$ alleen een geheel veelvoud van $2\pi$ kan zijn, dus dat $e$ één van de $e_n$ moet zijn. □

De duale groep $\widehat{S}$, de multiplicatieve groep van karakters van de compacte groep $S$, is dus isomorf met de discrete groep $\mathbb{Z}$. Dit is in overeenstemming met de stelling van Pontriagin uit 1958, die zegt dat als $G$ compact is, $\widehat{G}$ discreet is en dat als $G$ discreet is, $\widehat{G}$ compact is.

Een ander resultaat is de Pontriagin-dualiteit, die zegt dat $\widehat{\widehat{G}} = G$. Bij een Fourieranalyse van de groep $\mathbb{Z}$ zou dus blijken dat de karakters isomorf zijn met de cirkelgroep $S$.

### 3.1.1 Hoe komen de karakters in de Fourierreeks terecht?

Het zal al wel opgevallen zijn dat de karakters $e_n$ van de cirkelgroep precies die functies zijn die voorkomen in de 'standaard' Fourierreeks

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e_n(x)$$

met

$$\hat{f}(n) = \int_S f(x) e_n(x)^* d\sigma(x)$$

en dat de groep $\mathbb{Z}$ precies de groep is waar je over sommeert.

Dit is niet verwonderlijk gezien de algemene theorie van Fourieranalyse op een **Abelse**, locaal compacte, separabele groep $G$, ontwikkeld door Pontriagin en Van Kampen. Deze theorie definieert de Fouriertransformatie als een integraaloperator $\mathcal{F}$ die een functie $f \in L^1(G)$ transformeert tot een functie $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ op $\widehat{G}$, gedefinieerd door

$$\hat{f}(\hat{g}) = \int_G f(g) \langle g, \hat{g} \rangle dg$$

(met $dg$ de haarmaat op $G$). Een belangrijke eigenschap van een op deze manier gedefinieerde transformatie is dat

$$\widehat{(L(g)f)}(\hat{g}) = \langle g, \hat{g} \rangle \hat{f}(\hat{g})$$

Immers

$$\begin{aligned}
\widehat{(L(g)f)}(\hat{g}) &= \int_G (L(g)f)(g') \langle g', \hat{g} \rangle dg' \\
&= \int_G f(g^{-1}g') \langle g', \hat{g} \rangle dg' \\
&= \int_G f(g'') \langle gg'', \hat{g} \rangle dg'' \\
&= \langle g, \hat{g} \rangle \int_G f(g'') \langle g'', \hat{g} \rangle dg'' \\
&= \langle g, \hat{g} \rangle \hat{f}(\hat{g})
\end{aligned}$$

Met andere woorden,

$$\mathcal{F} L(g) = \langle g, \hat{g} \rangle \mathcal{F}$$

Stelling 8.1 zegt nu dat $\mathcal{F}$ op translatieinvariante deelruimtes proportioneel is aan een isometrie. De linksinvariante representatie $L$ is daar immers irreducibel.

Een algemenere bewering, hier gegeven zonder bewijs, is de **Plancherel** formule: Bij een geschikte normering van de haarmaat $dg$ en voor voldoend gladde functies $f$ en $g$ is

$$\|f\|_{L^2(G)} = \|\hat{f}\|_{L^2(\hat{G})}$$

voor alle $f \in L^1 \cap L^2(G)$. [3]

Uit de polarisatieformule voor het inproduct in $L^2$ volgt dan dat ook

$$\int_G f_1(g)\overline{f_2(g)}dg = \int_{\hat{G}} \hat{f}_1(\hat{g})\overline{\hat{f}_2(\hat{g})}d\hat{g}$$

Als hierin voor $f_1$ een approximatie van delta wordt gesubstitueerd, gaat $\hat{f}_1$ puntsgewijs naar 1 en volgt dat

$$f(e) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\hat{g})d\hat{g}$$

en door substitutie van $f$ met $L(g)f$ uiteindelijk dat

$$f(-g) = \int_{\hat{G}} \langle g, \hat{g}\rangle \hat{f}(\hat{g})d\hat{g}$$

## 3.2 Invariante Deelruimtes

Een speciale eigenschap van de $e_n$ is dat de deelruimtes $\mathcal{H}_n := \{\lambda e_n \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$ precies de minimale translatieinvariante deelruimtes van $L^2(S)$ zijn. Dit zijn die deelruimtes van $L^2(S)$, die invariant zijn onder de linksreguliere representatie $L$, en die zelf geen invariante deelruimtes bevatten. (vergelijk definitie 10).

Dat de deelruimtes $\mathcal{H}_n$ translatieinvariant zijn, is eenvoudig in te zien:

$$\begin{aligned}(L(y)\lambda e_n)(x) &= \lambda e_n(x-y)\\ &= \lambda e^{2\pi i n(x-y)}\\ &= \lambda e^{-2\pi i n y} e_n(x)\\ &= \lambda' e_n(x) \in \mathcal{H}_n\end{aligned}$$

Ze zijn tevens minimaal invariant, omdat ééndimensionale ruimtes natuurlijk geen deelruimtes meer hebben.

In het algemeen geldt dat

$$\begin{aligned}(e_n * f)(x) &= \int_S e_n(x-y)f(y)d\sigma(y)\\ &= e_n(x)\int_S e_n(y)^* f(y)d\sigma(y)\\ &= e_n(x)\hat{f}(n)\end{aligned}$$

[3] $L^1$ omdat de transformatie anders niet goed gedefinieerd is; $L^2$ omdat je een Hilbertruimte nodig hebt

oftewel

$$e_n * f = e_n \hat{f}(n) \tag{5}$$

Maar $e_n * f$ kan willekeurig goed worden benaderd met sommen van de vorm

$$\sum_{k=0}^{m-1} f\left(x - \frac{k}{m}\right) \int_{k/m}^{(k+1)/m} e_n(y)dy$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} L(\frac{k}{m}) f(x) \int_{k/m}^{(k+1)/m} e_n(y)dy$$

Als $\mathcal{H}$ nu een invariante deelruimte van $L^2(S)$ is, geldt voor willekeurige $f \in \mathcal{H}$ dat alle $L(\frac{k}{m})f$ ook in $\mathcal{H}$. Bovenstaande lineaire combinatie van $L(\frac{k}{m})f$'s dus ook, voor willekeurige $m$. We herinneren eraan dat we alleen **gesloten** invariante deelruimtes beschouwen. Dus moet ook $e_n * f \in \mathcal{H}$, en tenslotte precies die $e_n$ waarvoor $\hat{f}(n) \neq 0$. Dus volgt dat

$$\mathcal{H} \supset \sum_{\{n|\exists f \in \mathcal{H} \text{ met } \hat{f}(n) \neq 0\}}^{\oplus} \mathcal{H}_n$$

Maar de inclusie ($\subset$) volgt al uit Fourierreeks van $f$, immers $f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n) e_n$. Conclusie:

$$\mathcal{H} = \sum_{\{n|\exists f \in \mathcal{H} \text{ met } \hat{f}(n) \neq 0\}}^{\oplus} \mathcal{H}_n$$

## 3.3 De karakters zijn eigenfuncties van de Laplaciaan.

De karakters $e_n$ zijn eigenfuncties van de differentiaaloperator

$$Kf = f''$$

Iedere lineaire operator $K$ op $C^\infty(S)$ die commuteert met de translaties $(L(y)f)(x) = f(x-y)$ en de spiegeling $(S_g f)(x) = f(gx)$, $g \in \{-1, 1\}$ is gelijk aan een vermenigvuldiging met een constante $\lambda_n$ op de ruimtes $\mathcal{H}_n \oplus \mathcal{H}_{-n}$.

Dit is eventueel in te zien m.b.v. stelling 8 (Schur's lemma). De ruimtes $\mathcal{H}_n \oplus \mathcal{H}_{-n}$ zijn de minimaal invariante deelruimtes onder de gecombineerde actie van de unitaire representaties $L$ en $S$. Om dit argument precies te maken, zouden we het semi-directe product van deze twee representaties moeten construeren.

Maar het is ook na te gaan door directe berekening: Een element $f \in \mathcal{H}_n \oplus \mathcal{H}_{-n}$ is te ontbinden op de basisvectoren $e_n$ en $e_{-n}$:

$$f = c_1 e_n + c_2 e_{-n}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

$$\begin{aligned}
(L(y)Kf)(x) &= (KL(y)f)(x) \\
&= K(c_1e_n(x-y) + c_2e_{-n}(x-y)) \\
&= c_1K(e_n(-y)e_n(x)) + c_2K(e_{-n}(-y)e_{-n}(x)) \\
&= c_1e_n(-y)K(e_n(x)) + c_2e_{-n}(-y)K(e_n(-x)) \\
&= c_1e_n(-y)K(e_n(x)) + c_2e_{-n}(-y)KS_{-1}(e_n(x)) \\
&= c_1e_n(-y)K(e_n(x)) + c_2e_{-n}(-y)S_{-1}(Ke_n)(x) \\
&= (c_1e_n(-y) + c_2e_{-n}(-y))(Ke_n)(-x) \\
&= f(-y)(Ke_n)(-x)
\end{aligned}$$

Substitutie van $x = 0$ geeft

$$Kf(-y) = (Ke_n)(0)f(-y) = \lambda_n f(-y)$$

Een differentiaaloperator $K = c_0(x) + c_1(x)D + ... + c_k(x)D^k$ met coëfficiënten uit $C^\infty(S)$ die commuteert met translaties en reflecties, moet dus op grond van het voorafgaande de ruimtes $\mathcal{H}_n \oplus \mathcal{H}_{-n}$ als eigenruimtes hebben. Maar

$$\begin{aligned}
(Ke_n)(x) &= c_0(x)e_n(x) + c_1(x)(2\pi in)e_n(x) + ... + c_k(x)(2\pi in)^k e_n(x) \\
&= \lambda_n e_n(x)
\end{aligned}$$

$$c_0(x) + c_1(x)(2\pi in) + ... + c_k(x)(2\pi in)^k = \lambda_n \ \forall x, n$$

Dus moeten de $c_i(x)$ constant zijn.

$$K = c_0 + c_1D + ... + c_kD^k$$

Verder moet gelden dat

$$c_0 + c_1(2\pi in) + ... + c_k(2\pi in)^k = \lambda_n$$

$$= c_0 + c_1(2\pi i - n) + ... + c_k(2\pi i - n)^k \ \forall n$$

Wat alleen kan als de oneven $c_i$'s 0 zijn.

Conclusie:

**Stelling 13** *Als een differentiaaloperator $K = c_0(x) + c_1(x)D + ... + c_k(x)D^k$ met coëfficiënten uit $C^\infty(S)$ commuteert met translaties en reflecties, is het een polynoom in $D^2$.*

## 3.4 Fouriercoëfficiënten zijn homomorfismen

De $L^1$ functies op de cirkel vormen een algebra onder het convolutieproduct

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_S f_1(x-y) f_2(y) d\sigma(y)$$

Een homomorfisme van deze algebra is een lineaire functie $j : L^1(S) \to \mathbb{C}$, ongelijk aan 0, die convolutie in $L^1(S)$ omzet in vermenigvuldiging in $\mathbb{C}$.

**Stelling 14** *De Fouriercoëfficiënten*

$$j_n(f) = \hat{f}(n) = \int_S f e_n^*$$

*vormen een volledige lijst met alle homomorfismen van* $L^1(S)$

Bewijs:
Dat de $j_n$ lineair zijn, volgt uit de lineariteit van de integraal. Verder is, zoals bekend, $\widehat{f_1 * f_2} = \hat{f}_1 \hat{f}_2$. De $j_n$ zijn dus homomorfismen van $L^1(S)$.

Stel $j$ is een homomorfisme van $L^1(S)$. Vergelijking (5) op pagina 16 zegt dat $e_n * f = e_n \hat{f}(n)$. Toepassing van $j$ geeft dat

$$j(e_n) j(f) = j(e_n) \hat{f}(n)$$

Nu is het, omdat $j \neq 0$, niet mogelijk dat $j(e_n) = 0 \; \forall n$. Er bestaat dus een $m \in \mathbb{Z}$ met $j(e_m) \neq 0$. Maar dan is

$$j(f) = \hat{f}(m)$$

Dus is $j = j_m$. □

# 4 Fourieranalyse op de bol

## 4.1 SO(3)

Nu we de Fourieranalyse op de cirkel bestudeerd hebben, wordt het tijd eens te kijken naar de bol. Een probleem hierbij is dat de rotaties op de bol, in tegenstelling tot de translaties op de cirkel, niet commutatief zijn. Een nadere bestudering van de rotatiegroep SO(3) is dus gewenst.

**Definitie 15 (SO(3))** *SO(3) is de multiplicatieve groep van alle reële, orthogonale* $3 \times 3$ *matrices met determinant 1.*

Ter herinnering: Een reële matrix $g$ is orthogonaal als

$$gg^* = g^*g = 1$$

Hierin is $(g^*)_{ij} = \overline{g_{ji}}$ $(= g_{ji}$ omdat we met reële matrices werken). De matrices uit SO(3) zijn rotaties om een rotatie-as $x$, waarvoor geldt dat

$$gx = x$$

Immers, omdat $\det g = \det g^* = 1$, is

$$\det(g-1) = \det(g^*)\det(g-1) = \det(1-g^*) = \det(1-g) =$$

$$(-1)^3 \det(g-1) = -\det(g-1)$$

Waaruit blijkt dat $\det(g-1) = 0$ en dat 1 een eigenwaarde is, met een as $x$ als eigenvector.

Een voorbeeld, waaruit blijkt dat SO(3) niet commutatief is, is

$$g_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dan is

$$g_1g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{maar} \quad g_2g_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Omdat SO(3) niet commutatief is, gaat het algemene verhaal uit paragraaf 3.1.1 nu niet op. Het is zelfs zo dat er slechts één karakter is, het triviale $g \to 1$.

**Stelling 15** *Het enige karakter van SO(3) is 1.*

Bewijs:
Zij $e$ een karakter van SO(3). Dan hangt $e(g)$ niet af van de as waarom $g$ roteert, alleen van de grootte van de hoek waarover $g$ roteert. Immers, als $g$ as $x$ heeft en $h \in$ SO(3) een rotatie is die $x$ op de noordpool afbeeldt, is $k = hgh^{-1}$ een rotatie met dezelfde hoek om de noordpool. Maar dan is

$$e(k) = e(hgh^{-1}) = e(h)e(g)e(h^{-1}) = e(h)e(g)e(h)^* = e(g)$$

Zij nu $k_\alpha$ een rotatie van $\alpha$ rad rechtsom om de noordpool en $j_\alpha$ een rotatie van $\alpha$ rad rechtsom om de 'oostpool'. Dan is $k_\alpha j_\alpha^{-1}$ een rotatie over een bepaalde hoek $\beta$, die continu van $\alpha$ afhangt.

Als $\alpha = 0$ is ook $\beta = 0$. Als $\alpha = \pi$, is $kj^{-1}$ een rotatie van $\pi$ rad, om de as die recht naar voren steekt. $\beta$ is dan dus ook gelijk aan $\pi$. Als $\alpha$ van 0 naar $\pi$ loopt, loopt $\beta$ dus ook van 0 naar $\pi$. Maar

$$e(\beta) = e(k_\alpha j_\alpha^{-1}) = e(k_\alpha)e(j_\alpha^{-1}) = e(\alpha)e(\alpha)^* = 1$$

Dus $e = 1$. □

We kunnen de theorie uit paragraaf 1 nu toepassen op SO(3) en de sfeer:

- De groep $G = \mathrm{SO}(3)$ kan opgevat worden als een variëteit in $\mathbb{R}^9$. Op die manier induceert de topologie van $\mathbb{R}^9$ een topologie op $G$. $G$ is een **topologische groep**. De coëfficiënten van het product van twee matrices hangen immers continu af van de coëfficiënten van de oorspronkelijke matrices en de coëfficiënten van de inverse van een matrix continu afhangen van de coëfficiënten van de oorspronkelijke. (Denk bijvoorbeeld aan de regel van Cramer.)

- De sfeer $S_2$ is een topologische Hausdorffruimte, met de door $\mathbb{R}^3$ geïnduceerde topologie. De afbeelding $G \times S_2 \ni (g, x) \to gx \in S_2$ is een **linkse actie**, zoals eenvoudig is na te gaan.

- Deze actie is bovendien **transitief**. Op bladzijde 23 wordt een $g_x \in \mathrm{SO}(3)$ geconstrueerd die de noordpool $p = (0, 0, 1)$ naar een willekeurig punt $x$ op de sfeer roteert. Gegeven twee willekeurige punten $x$ en $y$, bestaat er dus een matrix $g_y g_x^{-1}$ met $g_y g_x^{-1} x = g_y p = y$.

- Omdat de actie transitief is en de ruimte $S_2$ dus een homogene ruimte is, bestaat de **stabilisator** $H$ van de 'willekeurig gekozen'[4] noordpool $p$. Dit zijn alle $g \in G$ met $gp = p$, ofwel alle rotaties met $p$ als as. Zoals bekend is $H$ dan een gesloten ondergroep van $G$. Alle $h \in H$ zijn van de vorm

$$h_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  De groep $H$ is isomorf met de cirkelgroep. Het isomorfisme wordt gegeven door de afbeelding

$$H \ni h_\theta \to e^{2\pi i\theta} \in S \tag{6}$$

- De **quotiëntruimte** $G/H$ is **geen** groep. Deze ruimte kan wel geïdentificeerd worden met de sfeer, door de identificatie $f : G/H \ni gH \to gp \in S_2$. $f(ghH) = ghp = gp = f(gH)$, dus is f constant op de nevenklassen. Verder is

$$\begin{aligned} f(g_1 H) = f(g_2 H) &\Leftrightarrow g_1 p = g_2 p \Leftrightarrow g_2^{-1} g_1 p = p \\ &\Leftrightarrow g_2^{-1} g_1 \in H \Leftrightarrow g_1 H = g_2 H \end{aligned}$$

  Dus is de identificatie injectief. De surjectiviteit spreekt voor zich.

  Merk op dat nu de linkse actie van $G$ op $S$ overeenkomt met de natuurlijke actie $(G \times G/H) \ni (g_1, g_2 H) \to (g_1 g_2) H \in G/H$.

[4] Omdat $S_2$ homogeen is, zou ieder punt $p$ hebben volstaan. Maar vanwege de inbedding van de sfeer in $\mathbb{R}^3$ ligt deze keuze voor de hand.

De actie van $H$ deelt de sfeer $S_2 = G/H$ opnieuw op. De rechternevenklassen zijn banen $Hx$, met $x$ een punt op de sfeer. Het zijn gewoon horizontale cirkels, oftewel breedtecirkels. Deze breedtecirkels zijn te identificeren met de breedtegraad waarop ze liggen. Op deze manier is $H\backslash G/H$ te identificeren met het interval $[0, \pi]$.

## 4.2 Integratie over SO(3)

Zij $\varphi$ een functie op $G = \mathrm{SO}(3)$. Dan middelen we $\varphi$ over de nevenklassen $gH$ tot een functie $\varphi^\flat$:

$$\varphi^\flat(\dot{g}) = \int_H \varphi(gh)dh \tag{7}$$

Hier is $dh$ de Haarmaat op $H$. Vanwege het isomorfisme (6) wordt de Haarmaat $dh$ gegeven door $dh = \frac{1}{2\pi}d\theta$.

De notatie $\dot{g}$ wordt gebruikt om de nevenklassen $gH$ aan te geven. $\varphi^\flat$ is namelijk een functie op $G/H$. Immers:

$$\varphi^\flat(g\dot{h}_1) = \int_H \varphi(ghh_1)dh \overset{(1)}{=} \int_G \varphi(gh)dh = \varphi^\flat(\dot{g})$$

Hier gebruiken we de translatieinvariantie van de Haarmaat. (Zie vergelijking (1) op pagina 5.)

Merk op dat

$$\begin{aligned}(L(g_1)\varphi)^\flat(\dot{g}) &= \int_H (L(g_1)\varphi)(gh)dh = \int_H \varphi(g_1^{-1}gh)dh = \varphi^\flat(\dot{g_1^{-1}}g) \\ &= L(g_1)(\varphi^\flat)(\dot{g})\end{aligned}$$

oftewel

$$(L(g)\varphi)^\flat = L(g)(\varphi^\flat) \tag{8}$$

$\varphi^\flat$ werkt op $G/H$. Maar $G/H$ is isomorf met de sfeer $S_2$. En over de sfeer kunnen we integreren met invariante maat $\sigma$, die zo genormeerd is dat $\int_{S_2} d\sigma(x) = 1$. In poolcoördinaten $(\theta, \phi)$ is $\sigma(x) = \frac{1}{4\pi}\sin\theta d\theta d\phi$.

De integraal van een functie op SO(3) is nu te definiëren door

$$\int_G \varphi(g)dg = \int_{S_2} \varphi^\flat(x)d\sigma(x)$$

N.B. Bovenstaande notatie is een beetje slordig. Met $\varphi^\flat(x)$ wordt de functie $S_2 \ni x = gp \to \varphi^\flat(\dot{g}) \in \mathbb{C}$ bedoeld.

De hierboven gedefinieerde integraal is linksinvariant, omdat $\sigma$ linksinvariant is.

$$\begin{aligned}\int_G (L(g_1)\varphi)(g)dg &= \int_{S_2} (L(g_1)\varphi)^\flat(x)d\sigma(x) \overset{(8)}{=} \int_{S_2} \varphi^\flat(g_1^{-1}x)d\sigma(x) \\ &= \int_{S_2} \varphi^\flat(x)d\sigma(x) = \int_G \varphi(g)dg\end{aligned}$$

Deze integraal definieert dus een linkerhaarmaat op SO(3). SO(3) is compact en dus unimodulair. De linkerhaarmaat is daarom tevens rechterhaarmaat. Op een constante na is de Haarmaat uniek en de maat, zoals die hierboven geconstrueerd is, is genormeerd op 1.

Op de volgende bladzijde staat een constructie van deze integraal in Mathematica.

# Integratie over SO(3)

## Implementatie

Eerst terugbrengen tot integratie over de sfeer. We zoeken een matrix uit SO(3) die de noordpool (0,0,1) afbeeldt op het punt op de sfeer met poolcoordinaten (#1,#2). Hiervoor roteer je het x,y,z-assenkruis zodanig dat de z-as naar (#1,#2) wijst. In poolcoordinaten:
x: (1,0,0) ~ (Pi/2,Pi/2)
y: (0,1,0) ~ (Pi/2,0)
z: (0,0,1) ~ (0,0)
#1 rad roteren om de x-as geeft
x: (Pi/2,Pi/2)
y: (Pi/2+#1,0)
z: (#1,0)
Vervolgens #2 rad roteren om de z-as geeft
x: (Pi/2,Pi/2+#2)
y: (Pi/2+#1,#2)
z: (#1,#2)
Dit verklaart de volgende uitdrukking:

```
Middel[f_]:=Integrate[
f[{{Sin[Pi/2]Cos[Pi/2+#2],
    Sin[Pi/2+#1]Cos[#2],
    Sin[#1]Cos[#2]},
   {Sin[Pi/2]Sin[Pi/2+#2],
    Sin[Pi/2+#1]Sin[#2],
    Sin[#1]Sin[#2]},
   {Cos[Pi/2],
    Cos[Pi/2+#1],
    Cos[#1]}}
 .{{Cos[theta0],-Sin[theta0],0},
   {Sin[theta0], Cos[theta0],0},
   {0          , 0          ,1}}]/(2Pi),
{theta0,0,2 Pi}]&
```

Deze gemiddelde functie kun je integreren over de sfeer:

```
SO3Int[f_]:=
Integrate[Middel[f][theta1,phi1]*Sin[theta1]/(4Pi),
{theta1,0,Pi},{phi1,0,2 Pi}]
```

## Voorbeeldje

De Legendrepolynomen zijn uit te breiden tot functies op SO(3):

```
p={0,0,1};
Pp[n_,g_]:=LegendreP[n,x]/.x->(g.p).p
```

Hun norm blijft dan (natuurlijk) gelijk aan 1/Sqrt[2n+1]

```
SO3Int[(Pp[1,#1])^2&]
```

$$\frac{1}{3}$$

Bekijk de klasse $L^1(G)$ van functies met

$$\|\varphi\|_1 = \int_G |\varphi(g)|dg < \infty$$

Deze klasse is een algebra met het convolutieproduct

$$(\varphi_1 * \varphi_2)(g_1) = \int_G \varphi_1(g_1 g^{-1})\varphi_2(g)dg$$

Dit product is associatief, maar niet commutatief.

We bekijken nu de subklasse $L^1(G/H)$ van functies uit $L^1(G)$, die constant is op de nevenklassen $gH$. Een functie $\varphi \in L^1(G/H)$ kunnen we identificeren met een functie $f \in L^1(S_2)$ door te stellen dat

$$f(x) = \varphi(\dot{g}) \text{ als } gp = x$$

en andersom

$$\varphi(\dot{g}) = f(gp)$$

Deze subklasse vormt een subalgebra. Als immers $\varphi_1 \in L^1(G)$, $\varphi_2 \in L^1(G/H)$, is

$$\begin{aligned}(\varphi_1 * \varphi_2)(g_1 h) &= \int_G \varphi_1(g_1 h g^{-1})\varphi_2(\dot{g})dg \\ &= \int_G \varphi_1(g_1 g^{-1})\varphi_2(\dot{gh})dg \\ &= \int_G \varphi_1(g_1 g^{-1})\varphi_2(\dot{g})dg \\ &= (\varphi_1 * \varphi_2)(g_1)\end{aligned}$$

en zit $\varphi_1 * \varphi_2$ in de subklasse $L^1(G/H)$. $L^1(G/H)$ is ook **niet** commutatief. Het volgende voorbeeld maakt dit duidelijk. De afbeelding $x_1$ beeldt $g \in G$ af op de $x_1$-coördinaat van $gn$. $x_1(ghn) = x_1(gn)$ $\forall x \in H$, dus $x_1 \in L^1(G/H)$. Zij $\varphi \in L^1(G/H)$ willekeurig. Dan

$$\begin{aligned}(\varphi * x_1)(\dot{g}_1) &= \int_G \varphi(g_1 \dot{g^{-1}})x_1(\dot{g})dg \\ &= \int_G \varphi(g_1 \dot{g^{-1}h})x_1(\dot{h^{-1}g})dg \\ &= \int_G \varphi(g_1 \dot{g^{-1}})x_1(\dot{h^{-1}g})dg\end{aligned}$$

voor willekeurige $h \in H$. Maar $\int_H x_1(\dot{h^{-1}g})dh = 0$ omdat je de $x_1$-coördinaat over een horizontale cirkel integreert. Dus is

$$(\varphi * x_1)(\dot{g}) = \int_H dh \int_G \varphi(g_1 \dot{g^{-1}})x_1(\dot{h^{-1}g})dg = 0$$

voor willekeurige $\varphi$. We kiezen een $\varphi$ die hoort bij een $f$ die een approximatie van delta op de sfeer, d.w.z. $f \geq 0, \int f = 1, \mathrm{dr}(f) \subset D$, met $D$ een rond kapje om de noordpool. Als $D$ naar de noordpool gaat, wordt $\varphi = 0$ buiten $H$. Als we uitgaan van een commutatieve convolutie, krijgen we

$$\begin{aligned} 0 &= (x_1 * \varphi)(\dot{g}_1) = \int_G x_1(g_1\dot{g}^{-1})\varphi(\dot{g})dg = \int_H x_1(g_1\dot{h}^{-1})\varphi(\dot{h})dh \\ &= x_1(g_1)\int_H \varphi(\dot{h})dh = x_1(g_1) \end{aligned}$$

wat een tegenspraak oplevert.

Op soortgelijke wijze definiëren we de klasse $L^1(H\backslash G/H)$, de klasse van alle $L^1$-functies op $G$, die constant zijn op de nevenklassen $HgH$. Een functie $\varphi \in L^1(H\backslash G/H)$ kunnen we op de eerste plaats identificeren met een functie $f \in L^1(S_2)$. Deze $f$ hangt alleen af van de breedtegraad.

**Definitie 16 (zonale functie)** *Een zonale functie is een functie op de sfeer, die alleen van de breedtegraad afhangt.*

Aangezien $\|\varphi\|_1 = \int_G |\varphi(g)|dg = \int_0^\pi |f(\cos\phi)|\frac{1}{2}\sin\phi d\phi$, kun je $\varphi$ en $f$ ook identificeren met een functie $F \in L^1([0,\pi], \frac{1}{2}\sin\phi d\phi)$. Voor deze identificaties geldt:

$$\varphi(\ddot{g}) = f(gp) = F(gp \cdot p) \tag{9}$$

waarin met $\ddot{g}$ de dubbele nevenklasse $HgH$ wordt aangegeven.

Deze algebra is eindelijk commutatief. Voor $\varphi_1, \varphi_2 \in L^1(H\backslash G/H)$ geldt

$$\begin{aligned} (\varphi_1 * \varphi_2)(\ddot{g}_1) &= \int_G \varphi_1(g_1\ddot{g}^{-1})\varphi_2(\ddot{g})dg \\ &= \int_G \varphi_1(\ddot{g^{-1}}g_1)\varphi_2(\ddot{g})dg \\ &= \int_G \varphi_1(\ddot{g^{-1}})\varphi_2(\ddot{g_1}g)dg \\ &= \int_G \varphi_2(\ddot{g^{-1}}\ddot{g_1^{-1}})\varphi_1(\ddot{g})dg \\ &= (\varphi_2 * \varphi_1)(\ddot{g_1^{-1}}) \\ &= (\varphi_2 * \varphi_1)(\ddot{g}_1) \end{aligned}$$

Waarbij steeds gebruik wordt gemaakt van $\ddot{g} = \ddot{g^{-1}}$ aangezien

$$gp \cdot p = (gp, p) = (p, g^*p) = (p, g^{-1}p) = (g^{-1}p, p) = g^{-1}p \cdot p$$

als $g \in \mathrm{SO}(3)$.

## 4.3 Legendre-polynomen

Bij de Fourieranalyse op de cirkel zijn de karakters $e_n$ eigenfuncties van de Laplaciaan $\Delta$. (Vergelijk paragraaf 3.3.) Verder is $e_n$ homogeen van de graad $n$. Immers $e_n(\lambda x) = \lambda^n e_n(x)$. Analoog hieraan definiëren we:

**Definitie 17** ($\Pi_n$) *$\Pi_n$ is de lineaire ruimte van alle polynomen $P(x_1, x_2, x_3)$, die homogeen zijn van de graad $n$. D.w.z.*

$$P(\lambda x) = \lambda^n P(x) \; \forall x \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$$

**Definitie 18** ($H_n$) *$H_n \subset \Pi_n$ is de deelruimte van harmonische homogene polynomen. D.w.z.*

$$H_n = \{P \in \Pi_n \mid \Delta P = 0\}$$

**Definitie 19** ($\mathcal{H}_n$) *$\mathcal{H}_n$ bevat de harmonische homogene polynomen, beperkt tot de sfeer. D.w.z.*

$$\mathcal{H}_n = \{P_{|S_2} \mid P \in H_n\}$$

*De elementen van $\mathcal{H}_n$ heten ook wel bolfuncties van de graad $n$ of sferisch harmonische functies van de graad $n$.*

We bekijken de ruimtes $\mathcal{H}_n$ als deelruimtes van $L^2(S_2)$.

**Stelling 16** *$\mathcal{H}_n \perp \mathcal{H}_m$ als $n \neq m$.*

Bewijs:
Met behulp van de formule van Green:

$$\int_{S_2} u\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \int_{|x|<1} u\Delta v - v\Delta u dx$$

Zij $u = P \in \mathcal{H}_n$, $v = Q \in \mathcal{H}_m$. Dan volgt, omdat $P$ en $Q$ harmonisch zijn:

$$\int_{S_2} P\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{n}} - Q\frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}} = \int_{|x|<1} 0 - 0 \; dx = 0$$

Ga nu over op poolcoördinaten $x = rs$, met $s \in S_2$. Homogeniteit geeft $P(x) = P(rs) = r^n P(s)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \mathbf{n}}(x) &= \frac{\partial P}{\partial r}(rs) \\ &= nr^{n-1}P(s) \end{aligned}$$

Natuurlijk geldt ook $\frac{\partial Q}{\partial \mathbf{n}} = mr^{m-1}Q(s)$. Dit invullen geeft

$$\int_{S_2} PmQ - QnP d\sigma = 0$$

$$(m-n)\int_{S_2} PQd\sigma = 0$$

En als $n \neq m$ moet dus

$$P \perp \bar{Q}$$

En, omdat $Q \in \mathcal{H}_m \Leftrightarrow \bar{Q} \in \mathcal{H}_m$,

$$\mathcal{H}_n \perp \mathcal{H}_m$$

□

Kies nu een rij zonale functies $\{p_n\}$ met $p_n \in \mathcal{H}_n$.

- Uit definitie 16 (zonale functie) op pagina 25 volgt dat $p_n(x,y,z) = P_n(z)$ met $P_n$ een polynoom.
- $p_n$ is homogeen van de graad $n$ en $P_n$ kan dus hoogstens graad $n$ hebben. De $n$-de afgeleide van $P_n$ is immers homogeen van de nulde graad en dus constant.
- $p_n \perp p_m,\ n \neq m$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{S_2} p_n(x)\overline{p_m(x)}d\sigma(x) \\ &= \int_0^{\pi} P_n(\cos\phi)\overline{P_m(\cos\phi)}\frac{1}{2}\sin\phi d\phi \\ &= \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} P_n(z)\overline{P_m(z)}dz \end{aligned}$$

  Dus $P_n \perp P_m$ in de ruimte $L^2([-1,1]),\ n \neq m$.

- Ter herinnering: De monomen $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ vormen, in $L^2([-1,1])$, een basis voor de ruimte van alle polynomen met graad $\leq n$.
- De $P_n$ moeten precies graad $n$ hebben. Dit volgt met inductie naar de graad. $P_0$ heeft graad hoogstens 0 (dus 0). Als $P_1, ..., P_n$ allemaal precies graad $n$ hebben, vormen ze een basis voor alle polynomen met graad $\leq n$. $P_{n+1}$ staat loodrecht op $P_1, ..., P_n$ en heeft dus graad $> n$. We weten al dat $P_{n+1}$ graad $\leq n+1$ heeft, dus heeft $P_{n+1}$ graad $n+1$.
- Ter herinnering: De Legendrepolynomen ontstaan door het toepassen van de Gram-Schmidt procedure op de basis $\{1, x, x^2, ...\}$. Ze zijn zo genormeerd dat $P(1) = 1$.

- $P_n$ is proportioneel aan het n-de Legendre-polynoom. Dit volgt weer met inductie naar n. $P_0$ heeft graad 0 en is dus proportioneel aan 1. Stel $P_i$ is proportioneel aan het $i$-de Legendre-polynoom, $i = 0, ..., n$. $\{P_0, ..., P_n\}$ spannen dan dezelfde ruimte op als $\{1, x, ..., x^n\}$; d.w.z. de ruimte van polynomen met graad $\leq n$. $P_{n+1}$ zit in de n+2-dimensonale ruimte van polynomen met graad $\leq n+1$ en staat loodrecht op $P_0, ..., P_n$. Maar $\{P_0, ..., P_n, \text{Legendre}_{n+1}\}$ is een basis voor deze ruimte. Dus $P_{n+1} = 0P_0 + 0P_1 + ... + (P_n|\text{Legendre}_{n+1})\text{Legendre}_{n+1}$. $P_{n+1}$ is proportioneel aan het $n+1$-ste Legendre-polynoom.

Dit is de inhoud van

**Stelling 17** *In $\mathcal{H}_n$ zit, op een constante na, precies één zonale functie $p_n$. $p_n(x, y, z) = P_n(z)$ met $P_n$ het n-de Legendre-polynoom.*

## 4.4 De ruimtes $\mathcal{H}_n$

**Stelling 18** *$\mathcal{H}_n$ is rotatie-invariant.*

Bewijs:
Eerst tonen we aan dat, als $g \in \text{SO}(3)$, $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$, $\Delta L(g)f = L(g)\Delta f$. $y = g^{-1}x$. Dan

$$\begin{aligned}
\Delta L(g)f &= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 L(g)f}{\partial x_j^2} \\
&= \sum_{i,k} \sum_{j=1}^{3} g_{ij} g_{kj} \frac{\partial^2 f}{\partial y_j^2} \\
&= \sum_{i,k} \delta_{i,k} \frac{\partial^2 f}{\partial y_j^2} \\
&= \Delta f(g^{-1}x) \\
&= (L(g)\Delta f)(x)
\end{aligned}$$

$\Pi_n$ is invariant onder rotaties. Voor $x$, $y$ en $z$ geldt immers dat, omdat bijvoorbeeld $gx = g_{11}x + g_{21}y + g_{31}z$, ze geroteerd worden naar polynomen. Polynomen in $x$, $y$ en $z$ blijven dus ook polynomen. Homogene polynomen blijven homogeen omdat, voor $P$ homogeen,

$$(L(g)P)(\lambda x) = P(g^{-1}\lambda x) = P(\lambda g^{-1}x) = \lambda^n (L(g)P)(x)$$

We concluderen dat $H_n$ invariant is onder rotaties. Aangezien rotaties de sfeer invariant laten is dan ook $\mathcal{H}_n$ rotatie-invariant □

De ruimte $\mathcal{H}_n$ voorzien we van het inproduct uit $L^2(S_2)$. Het wordt een Hilbertruimte omdat de limiet van polynomen met graad $\leq n$ weer een polynoom met

graad $\leq n$ is en omdat de limiet van homogene harmonische polynomen zelf ook weer homogeen en harmonisch is.

We bekijken nu de projectie $Q_n$ op $\mathcal{H}_n$. Omdat de ruimtes $\Pi_n$ eindigdimensionaal zijn, zijn de deelruimtes $\mathcal{H}_n$ dat zeker. Kies dus een basis $\{e_1^n, ..., e_N^n\}$ voor $\mathcal{H}_n$. $Q_n$ wordt nu gegeven door

$$Q_n f = \sum_{i=1}^{N} (f|e_i^n) e_i^n$$

$$\begin{aligned} Q_n f(x) &= \sum_{i=1}^{N} \int_{S_2} f(y)\overline{e_i^n(y)} e_i^n(x) d\sigma(y) \\ &= \int_{S_2} f(y) K^n(x,y) d\sigma(y) \end{aligned} \tag{10}$$

met

$$K^n(x,y) = \sum_{i=1}^{N} e_i^n(x)\overline{e_i^n(y)}$$

Definiëer nu $K_x^n(y) = K^n(x,y)$.

$$f(x) = (f|K_x^n) \; \forall f \in \mathcal{H}_n \tag{11}$$

Als $f \in \mathcal{H}_n$, is op grond van de rotatie-invariantie, ook $L(g)f \in \mathcal{H}_n$. Bovenstaande formule geldt dan zowel voor $f$ als voor $L(g)f$. Voor de unitaire representatie volgt dan dat

$$(f|L(g)K_x^n) = (L(g^{-1})f|K_x^n) = (L(g^{-1})f)(x) = f(gx) = (f|K_{gx}^n)$$

$$L(g)K_x^n = K_{gx}^n$$

Oftewel

$$K^n(x,y) = K_x^n(y) = K_x^n(g^{-1}gy) = L(g)K_x^n(gy) = K_{gx}^n(gy) = K^n(gx,gy)$$

Dit houdt in dat $K^n(x,y)$ alleen afhangt van het inproduct $x \cdot y$.

$$K^n(x,y) = k^n(x \cdot y)$$

Bekijk nu $K_p^n$. Dit is een functie op de sfeer, gegeven door $S_2 \ni y \to K^n(p \cdot y) \in \mathbb{C}$. $K_p^n$ is zonaal. Immers $L(h)K_p^n = K_{hp}^n = K_p^n \; \forall h \in H$. $K_p \in \mathcal{H}_n$, want het is een gewogen som van basisvectoren uit $\mathcal{H}_n$. Maar de zonale functie $p_n$ is volgens stelling 17 op een constante na de enige in $\mathcal{H}_n$. Gevolg:

$$K_p^n = \lambda_n p_n$$

Omdat $k^n(z) = k^n((x,y,z)\cdot p) = K_p^n((x,y,z))$ is dan ook

$$k^n = \lambda_n P_n$$

We berekenen de $\lambda_n$ m.b.v.vergelijking (11):

$$\|K_x^n\|^2 = K_x^n(x) = k^n(x\cdot x) = k^n(1) = \lambda_n P_n(1) = \lambda_n \ \forall x$$

$$\|K_p^n\|^2 = \|\lambda_n p_n\|^2 = \lambda_n^2 \|P_n\|^2$$

Maar over Legendrepolynomen is bekend dat $\|P_n\|^2_{L^2([-1,1])} = \frac{2}{2n+1}$ (zie bijvoorbeeld [1, p.177]). Bij ons is de norm half zo groot, omdat we eisen dat $\|1\| = 1$. $\|P_n\|^2 = \frac{1}{2n+1}$

$$\lambda_n = \|K_p^n\|^2 = \lambda_n^2 \frac{1}{2n+1}$$

$$\lambda_n = 2n+1$$

De gevonden uitdrukking voor $K^n(x,y)$ vullen we in in vergelijking (10). Zo krijgen we

**Stelling 19 (projectie op $\mathcal{H}_n$)** *De projectie op $\mathcal{H}_n$ wordt gegeven door*

$$Q_n f(x) = (2n+1)\int_{S_2} f(y) P_n(x\cdot y) d\sigma(y)$$

Analoog aan vergelijking (9) hebben we hier voor dezelfde functie verschillende namen, afhankelijk van de manier waarop je hem bekijkt, namelijk $P_n \in L^2([-1,1])$, $p_n \in L^2(S_2)$. We definiëren $\omega_n \in L^2(H\backslash G/H)$ door

$$\omega_n(g) = p_n(gp) = P_n(gp\cdot p)$$

**Stelling 20** $\dim \mathcal{H}_n = 2n+1$

Bewijs:

$$\begin{aligned} K^n(x,x) &= \sum_{i=1}^{\dim \mathcal{H}_n} e_i^n(x)\overline{e_i^n(x)} \\ &= \sum_{i=1}^{\dim \mathcal{H}_n} 1 = \dim \mathcal{H}_n \end{aligned}$$

Maar $K^n(x,x) = k^n(x\cdot x) = (2n+1)P_n(1) = 2n+1$. □

**Stelling 21** *De invariante deelruimte $\mathcal{H}_n$ is irreducibel.*

Bewijs:
Stel $\mathcal{H}_{n1} \subset \mathcal{H}_n$ is een niet-triviale invariante deelruimte. Pas stelling 7 op pagina 8 toe. $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{n1} \oplus \mathcal{H}_{n2}$ en de bijbehorende projecties $Q_1$ en $Q_2$ commuteren met rotaties, wat betekent dat $\mathcal{H}_{n1}$ en $\mathcal{H}_{n2}$ rotatie-invariant zijn. Maar dan kunnen we, voor ieder van de projecties $Q_1$ en $Q_2$ op dezelfde manier als hierboven, een integraalformule construeren. Deze constructie levert twee zonale functies, $p_{n1} \in \mathcal{H}_{n1}$ en $p_{n2} \in \mathcal{H}_{n2}$, die dus loodrecht op elkaar moeten staan. Maar in $\mathcal{H}_n$ is de zonale functie tot op een factor na uniek, dus moet een van de twee $p_{ni}$ nul zijn. Dan is een van de twee projecties 0 en is de ontbinding triviaal. □ Tenslotte bewijzen we

**Stelling 22** $\quad L^2(S_2) = \sum_{n\geq 0}^{\oplus} \mathcal{H}_n$

Bewijs:
Dat de ruimtes $\mathcal{H}_n$ orthogonaal zijn, weten we al uit stelling 16. Kies nu een $f \in L^2(S_2)$ en stel dat $f \perp \mathcal{H}_n \ \forall n$. We kunnen $f$ identificeren met de functie $\varphi \in L^2(G/H)$, gedefinieerd door $\varphi(g) = f(gp)$. De operatie $\flat$ middelt functies op $G$ tot functies op $G/K$. (Zie vergelijking (7).) Voor functies $\varphi$ op $G/K$ definiëren we $\varphi^\flat$ op $H\backslash G/H$ door

$$\varphi^\flat(\ddot{g}) = \int_H \varphi(\dot{h}\dot{g})dh$$

We roteren $\varphi$ nu met een rotatie $\tilde{g}$, en middelen dan om de noord-zuid as. De functie die we zo krijgen is zonaal en staat loodrecht op $\omega_n$:

$$\begin{aligned}
((L(\tilde{g})\varphi)^\flat \mid \omega_n) &= \int_{G/H} (L(\tilde{g})\varphi)^\flat(\ddot{g})\, \omega_n(\ddot{g})d\dot{g} \\
&= \int_{G/H}\int_H (L(\tilde{g})\varphi)(\dot{h}\dot{g})dh\, \omega_n(\ddot{g})d\dot{g} \\
&= \int_H dh \int_{G/H} \varphi(\tilde{g}^{-\dot{1}}\dot{h}g)\, \omega_n(\ddot{g})d\dot{g} \\
&= \int_H dh \int_{G/H} \varphi(\dot{g})\, \omega_n(h^{-\ddot{1}}\tilde{g}\ddot{g})d\dot{g} \\
&= \int_H dh \int_{G/H} \varphi(\dot{g})\, \omega_n(\tilde{g}\ddot{g})d\dot{g} \\
&= \int_{G/H} \varphi(\dot{g})\, \omega_n(\tilde{g}\ddot{g})d\dot{g} \\
&= (\varphi | L(\tilde{g}^{-1})\omega_n) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Maar omdat de $P_n$ een basis vormen voor $L^2([-1,1])$, vormen ook de $\omega_n$ een basis voor $L^2(H\backslash G/H)$. Dus $(L(\tilde{g})\varphi)^\flat = 0$. Maar dan is ook $L(\tilde{g}^{-1})(L(\tilde{g})\varphi)^\flat = 0$. Dit is

$\varphi$, gemiddeld om as $\tilde{g}p$. Maar dit wil zeggen dat de integraal van $\varphi$ over willekeurige ronde kapjes nul moet zijn. (Deze integralen zijn immers ook uit te rekenen door eerst te middelen om de symmetrie-as van het kapje en dan te integreren over de hoek.) Maar dan moet $f = 0$. $\square$

# 5 De constructie van de wavelet

Op de reële rechte worden wavelets gevormd door translatie en schaling van een oorspronkelijke functie $\psi$. Om wavelets te kunnen vormen op de bol, moeten we ook op de bol kunnen transleren en schalen. Translatie is eenvoudig. Op de bol wordt dat rotatie. Nu zoeken we een geschikte schaling.

## 5.1 Het projectieve vlak

Bekijk de projectieve ruimte $\mathcal{P}_2$. Deze bestaat uit vectoren $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3_*$, onder de equivalentie-relatie

$$(x, y, z) \sim (x', y', z') \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}_* \text{ z.d.d. } (x', y', z') = \lambda(x, y, z)$$

De equivalentieklassen zijn dus punten op een lijn door de oorsprong. De punten $(x, y, z) \in \mathcal{P}_2$ met $z \neq 0$, zijn equivalent met een, per equivalentieklasse uniek, punt van de vorm $(x, y, 1)$. We snijden de niet-horizontale lijnen dus met het vlak $z = 1$. Op deze manier is het euclidische vlak ingebed in het projectieve vlak. De rest van de projectieve ruimte noemen we de 'lijn in oneindig'.

We kunnen $\mathcal{P}_2$ ook identificeren met de sfeer $S_2$, met tegenover elkaar liggende punten geïdentificeerd. Hiertoe identificeren we een lijn door de oorsprong met zijn twee snijpunten met de sfeer.

De groep SL(3, $\mathbb{R}$) van $3 \times 3$-matrices met determinant 1 werkt op $\mathcal{P}_2$, aangezien lijnen door de oorsprong door deze matrices worden afgebeeld op lijnen door de oorsprong.

Het is nu de bedoeling om deze actie op te vatten als een actie op de sfeer. Een functie op $\mathbb{R}$ wordt geschaald door te stellen dat $f_\epsilon(x) = f(\frac{x}{\epsilon})$. Een functie op de sfeer kun je nu kunnen schalen door te stellen dat $f_g(x) = f(\frac{g^{-1}x}{\|g^{-1}x\|})$, met $g \in$ SL(3). Merk op dat ook de rotatie al in deze definitie verwerkt zit. SO(3) is immers een ondergroep van SL(3).

## 5.2 De schaling

Ter vereenvoudiging gebruiken we voor de schaling slechts bepaalde elementen uit SL(3), die afhangen van één parameter $\epsilon$. De schaling wordt op deze manier rotatie-symmetrisch en zet bijvoorbeeld zonale functies om in zonale functies. Rotaties beschouwen we apart. Hiervoor gebruiken we natuurlijk wel de gehele SO(3).

De richting waarin we gaan schalen is nog vrij te kiezen, maar omdat we de noordpool $p$ in het voorafgaande als speciaal punt in de homogene ruimte hebben gekozen, is het logisch nu ook in die richting te gaan schalen. We definiëren daarom de volgende matrices:

**Definitie 20 ($A_\epsilon$)** *Voor $\epsilon > 0$ definiëren we*

$$A_\epsilon = \frac{1}{\sqrt[3]{\epsilon}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

Om een afbeelding van de sfeer naar zichzelf te krijgen, definiëren we

**Definitie 21 ($a_\epsilon$)** *$a_\epsilon : S_2 \to S_2$ wordt, voor $\epsilon > 0$, gedefinieerd door*

$$a_\epsilon x = \frac{A_\epsilon x}{\|A_\epsilon x\|}$$

We merken de volgende dingen op:

- De factor $\frac{1}{\sqrt[3]{\epsilon}}$ was alleen nodig om een element uit SL(3) te krijgen. Immers

  $$\frac{\lambda A_\epsilon x}{\|\lambda A_\epsilon x\|} = \frac{A_\epsilon x}{\|A_\epsilon x\|}$$

  We zullen hem in het vervolg weglaten.

- $a_{\epsilon_1} \circ a_{\epsilon_2} = a_{\epsilon_1 \epsilon_2}$
- $a_\epsilon{}^{-1} x = a_{1/\epsilon} x$.
- $a_\epsilon$ laat meridianen invariant.
- Als $x$ op de evenaar ligt, is $a_\epsilon(x) = x$.
- $a_\epsilon(x)$ ligt, voor $0 < \epsilon < 1$, dichter bij de evenaar dan $x$. Als $\epsilon > 1$, ligt $a_\epsilon(x)$ voor $x$ op het noordelijk halfrond dichter bij de noordpool dan $x$. Voor $x$ op het zuidelijk halfrond ligt $x$ dichter bij de zuidpool dan $x$.

## 5.3 De Jacobiaan van de schaling

Een probleem bij schaling is dat de norm van de geschaalde functie in het algemeen ongelijk is aan de norm van het origineel. Daarom gebruik je bij wavelets de schaling $\psi_\epsilon = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \psi(\frac{x}{\epsilon})$, zodat $\|\psi_\epsilon\|_2 = \|\psi\|_2$.

Omdat $a_\epsilon$ een diffeomorfisme is, bestaat er een Jacobiaan $J_{a_\epsilon}$ met

$$\int_{S_2} f(a_\epsilon x) J_{a_\epsilon}(x) d\sigma(x) = \int_{S_2} f(x) d\sigma(x)$$

Aangezien voor willekeurige $f$

$$\int_{S_2} f(x)d\sigma(x) = \int_{S_2} J_a(x)f(ax)d\sigma(x) = \int_{S_2} J_b(x)J_a(bx)f(abx)d\sigma(x)$$

maar ook

$$\int_{S_2} f(x)d\sigma(x) = \int_{S_2} J_{ab}(x)f(abx)d\sigma(x)$$

moet wel gelden dat (voor bijna alle $x$):

$$J_{ab}(x) = J_a(bx)J_b(x)$$

En in het bijzonder dat:

$$1 = J_{aa^{-1}} = J_a(a^{-1}x)J_{a^{-1}}(x)$$

Een functie $\psi$ op de bol kunnen we dus als volgt schalen:

**Definitie 22** $\psi_\epsilon := \sqrt{J_{a_\epsilon}(x)}\psi(a_\epsilon(x))$

**Definitie 23** $\psi_{\epsilon,r} := \psi_\epsilon(r^{-1}x)$

Merk op dat $U(t)$, gedefiniëerd door

$$U(t)f = f_{e^t}$$

nu een unitaire representatie van $\mathbb{R}$ is in $\mathrm{L}^2(S_2)$. De $e$-macht zorgt ervoor dat $U(t_1 + t_2) = U(t_1)U(t_2)$.

## 5.4 Approximatie van delta

De bekende schaling op $\mathbb{R}$ heeft de eigenschap dat voor integreerbare $f$, die positief is en integraal 1 heeft, de familie $\frac{1}{\epsilon}f(\frac{x}{\epsilon})$ een approximatie van delta vormt. We vragen ons af hoe dat zit met onze familie functies $f^\epsilon$[5]

$$f^\epsilon(x) = J_{a_\epsilon}(x)f(a_\epsilon x)$$

Deze familie functies vormt voor $\epsilon \downarrow 0$ een approximatie van $\delta$ in $p$ als $f$ aan de volgende voorwaarden voldoet:

- $$\int_{S_2} f(x)d\sigma(x) = 1 \tag{12}$$
- $$dr(f) \subset \{(x,y,z)|z > 0\} = S_2^+ \tag{13}$$

[5]Omdat we hier met $L^1$-functies werken nemen we niet de wortel van de Jacobiaan, zoals we dat later wel zullen doen

Immers:

$$\int_{S_2} f^\epsilon(x)d\sigma(x) = \int_{S_2} f(x)d\sigma(x) \overset{(12)}{=} 1$$

en omdat op $dr(f)$ geldt dat

$$\phi(a_{1/\epsilon}x) = \phi\left(\frac{\left(x, y, \frac{z}{\epsilon}\right)}{\sqrt{x^2 + y^2 + \left(\frac{z}{\epsilon}\right)^2}}\right) \underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} \phi\left(\frac{(0,0,z)}{\sqrt{z^2}}\right) \overset{(13)}{=} \phi(p) \tag{14}$$

is het duidelijk dat

$$\begin{aligned}
\langle f^\epsilon, \phi\rangle &= \int_{S_2} f^\epsilon(x)\phi(x)d\sigma(x) \\
&= \int_{S_2} J_{a_\epsilon}(x) f(a_\epsilon x)\phi(x)d\sigma(x) \\
&= \int_{S_2} J_{a_{1/\epsilon}}(x) J_{a_\epsilon}(a_{1/\epsilon}x) f(a_{1/\epsilon}a_\epsilon x)\phi(a_{1/\epsilon}x)d\sigma(x) \\
&= \int_{dr(f)} f(x)\phi(a_{1/\epsilon}x)d\sigma(x) \\
&\overset{(14)}{\underset{\epsilon\to 0}{\longrightarrow}} \phi(p)\int_{dr(f)} f(x)d\sigma(x) \overset{(12)}{=} \phi(p) \\
&= \langle \delta_p, \phi\rangle
\end{aligned}$$

## 5.5 Berekening van de Jacobiaan

We breiden het diffeomorfisme $a_\epsilon : S_2 \to S_2$, waarvoor geldt dat

$$a_\epsilon((x,y,z)) = \frac{(x,y,\epsilon z)}{|(x,y,\epsilon z)|}$$

uit tot een functie $\mathcal{A}_\epsilon : (\mathbb{R}^3)^* \to (\mathbb{R}^3)^*$, door te eisen dat, voor $r > 0$ en $\omega \in S_2$,

$$\mathcal{A}_\epsilon(r\omega) = r a_\epsilon(\omega)$$

Dat $\mathcal{A}_\epsilon$ ook een diffeomorfisme is, volgt uit het feit dat $\mathcal{A}_\epsilon^{-1}(r\omega) = r a_\epsilon^{-1}(\omega)$ Nu is

$$\mathcal{A}_\epsilon(r,\phi,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{r\sin\theta\cos\phi}{\sqrt{\sin^2\theta+\epsilon^2\cos^2\theta}} \\ \frac{r\sin\theta\sin\phi}{\sqrt{\sin^2\theta+\epsilon^2\cos^2\theta}} \\ \frac{r\epsilon\cos\theta}{\sqrt{\sin^2\theta+\epsilon^2\cos^2\theta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{r\sin\theta\cos\phi}{\sqrt{N_{\epsilon,\theta}}} \\ \frac{r\sin\theta\sin\phi}{\sqrt{N_{\epsilon,\theta}}} \\ \frac{r\epsilon\cos\theta}{\sqrt{N_{\epsilon,\theta}}} \end{pmatrix}$$

een parametrisering van $(\mathbb{R}^3)^* \setminus \{(x,y,z) | x = 0 \wedge y > 0\}$, voor $r > 0, \theta \in (0,\pi), \phi \in (0, 2\pi)$. Nu rekenen we de bij deze parametrisering behorende Jacobiaan uit:

$$J_{\mathcal{A}_\epsilon}(r,\theta,\phi) =$$

$$
\left|\det\begin{pmatrix}
\frac{\sin\theta\cos\phi}{\sqrt{N_{\epsilon,\theta}}} & r\cos\theta\cos\phi\left(\frac{1}{\sqrt{N_{\epsilon,\theta}}}-\frac{(1-\epsilon^2)\sin^2\theta}{N_{\epsilon,\theta}^{3/2}}\right) & \frac{-r\sin\theta\sin\phi}{\sqrt{N_{\epsilon,\theta}}}\\
\frac{\sin\theta\sin\phi}{\sqrt{N_{\epsilon,\theta}}} & r\cos\theta\sin\phi\left(\frac{1}{\sqrt{N_{\epsilon,\theta}}}-\frac{(1-\epsilon^2)\sin^2\theta}{N_{\epsilon,\theta}^{3/2}}\right) & \frac{r\sin\theta\cos\phi}{\sqrt{N_{\epsilon,\theta}}}\\
\frac{\epsilon\cos\theta}{\sqrt{N_{\epsilon,\theta}}} & \epsilon r\sin\theta\left(\frac{-1}{\sqrt{N_{\epsilon,\theta}}}-\frac{(1-\epsilon^2)\cos^2\theta}{N_{\epsilon,\theta}^{3/2}}\right) & 0
\end{pmatrix}\right|
$$

$$
= \left|\frac{\epsilon\cos\theta}{\sqrt{N_{\epsilon,\theta}}}\right| \begin{vmatrix}
r\cos\theta\cos\phi\left(\frac{1}{\sqrt{N_{\epsilon,\theta}}}-\frac{(1-\epsilon^2)\sin^2\theta}{N_{\epsilon,\theta}^{3/2}}\right) & \frac{-r\sin\theta\sin\phi}{\sqrt{N_{\epsilon,\theta}}}\\
r\cos\theta\sin\phi\left(\frac{1}{\sqrt{N_{\epsilon,\theta}}}-\frac{(1-\epsilon^2)\sin^2\theta}{N_{\epsilon,\theta}^{3/2}}\right) & \frac{r\sin\theta\cos\phi}{\sqrt{N_{\epsilon,\theta}}}
\end{vmatrix} \cdots
$$

$$
\cdots -\epsilon r\sin\theta\left(\frac{-1}{\sqrt{N_{\epsilon,\theta}}}-\frac{(1-\epsilon^2)\cos^2\theta}{N_{\epsilon,\theta}^{3/2}}\right)\begin{vmatrix}
\frac{\sin\theta\cos\phi}{\sqrt{N_{\epsilon,\theta}}} & \frac{-r\sin\theta\sin\phi}{\sqrt{N_{\epsilon,\theta}}}\\
\frac{\sin\theta\sin\phi}{\sqrt{N_{\epsilon,\theta}}} & \frac{r\sin\theta\sin\phi}{\sqrt{N_{\epsilon,\theta}}}
\end{vmatrix}\Bigg|
$$

$$
= \left|\frac{\epsilon\cos\theta}{\sqrt{N_{\epsilon,\theta}}}\left(r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\phi\left(\frac{1}{N_{\epsilon,\theta}}-\frac{(1-\epsilon^2)\sin^2\theta}{N_{\epsilon,\theta}^2}\right)\cdots\right.\right.
$$

$$
\left.\left.\cdots + r^2\sin\theta\cos\theta\sin^2\phi\left(\frac{1}{N_{\epsilon,\theta}}-\frac{(1-\epsilon^2)\sin^2\theta}{N_{\epsilon,\theta}^2}\right)\right)\cdots\right.
$$

$$
\left.\cdots -\epsilon r\sin\theta\left(\frac{-1}{\sqrt{N_{\epsilon,\theta}}}-\frac{(1-\epsilon^2)\cos^2\theta}{N_{\epsilon,\theta}^{3/2}}\right)\left(\frac{r\sin^2\theta\cos^2\phi+r\sin^2\theta\sin^2\phi}{N_{\epsilon,\theta}}\right)\right|
$$

$$
= \left|\epsilon r^2\sin\theta\cos^2\theta\left(\frac{1}{N_{\epsilon,\theta}^{3/2}}-\frac{1-\epsilon^2}{N_{\epsilon,\theta}^{5/2}}\left(\sin^2\theta\cos^2\phi+\sin^2\theta\sin^2\phi\right)\right)\cdots\right.
$$

$$
\left.\cdots -\epsilon r^2\sin^3\theta\left(\frac{-1}{N_{\epsilon,\theta}^{3/2}}-\frac{(1-\epsilon^2)\cos^2\theta}{N_{\epsilon,\theta}^{5/2}}\right)\right|
$$

$$
= \left|\epsilon r^2\sin\theta\left(\frac{1}{N_{\epsilon,\theta}^{3/2}}-\frac{1-\epsilon^2}{N_{\epsilon,\theta}^{5/2}}\left(-\cos^2\theta\sin^2\theta+\cos^2\theta\sin^2\theta\right)\right)\right|
$$

$$
= \left|\frac{\epsilon r^2\sin\theta}{N_{\epsilon,\theta}^{3/2}}\right| = r^2\sin\theta\frac{\epsilon}{(\sin^2\theta+\epsilon^2\cos^2\theta)^{3/2}}
$$

Aangezien de $r^2\sin\theta$ de Jacobiaan is, behorende bij de transformatie naar poolcoördinaten, doet dit vermoeden dat

$$
\mathrm{Jac}(\epsilon,\theta) := \frac{\epsilon}{(\sin^2\theta+\epsilon^2\cos^2\theta)^{3/2}}
$$

de Jacobiaan is, behorende bij de transformatie $\mathcal{A}_\epsilon$

**Stelling 23** *Voor alle integreerbare functies* $f : S_2 \to \mathbb{C}$ *geldt dat*

$$\int_{S_2} f(\omega)ds(\omega) = \int_{S_2} \mathrm{Jac}(\epsilon, \theta(\omega)) f(a_\epsilon(\omega))ds(\omega)$$

Een bewijs:
Kies een $f$ met $f(r \cdot \omega) = f_1(r)f_2(\omega), r > 0, \omega \in S_2$. Dan geldt:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} f(x)dx &= \int_{(\mathbb{R}^3)^* \setminus \{(x,y,z)|x=0 \wedge y>0\}} f(x)dx \\
&= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \ \mathrm{Jac}(\epsilon, \theta) f(\mathcal{A}_\epsilon(r \cdot \omega(\theta, \phi)))drd\theta d\phi \\
&= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \ \mathrm{Jac}(\epsilon, \theta) f(r \cdot a_\epsilon(\omega(\theta, \phi)))drd\theta d\phi \\
&= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \ \mathrm{Jac}(\epsilon, \theta) f_1(r) f_2(a_\epsilon(\omega(\theta, \phi)))drd\theta d\phi \\
&= \int_0^\infty r^2 f_1(r)dr \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta \ \mathrm{Jac}(\epsilon, \theta) f_2(a_\epsilon(\omega(\theta, \phi)))d\theta d\phi \\
&= \int_0^\infty r^2 f_1(r)dr \int_{S_2} \mathrm{Jac}(\epsilon, \theta(\omega)) f_2(a_\epsilon(\omega))ds(\omega)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^3} f(x)dx &= \int_0^\infty dr \int_{|x|=r} f(x)ds_r(x) \\
&= \int_0^\infty dr \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta f(r \cdot \omega(\theta, \phi))d\theta d\phi \\
&= \int_0^\infty r^2 f_1(r)dr \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\theta f_2(\omega(\theta, \phi))d\theta d\phi \\
&= \int_0^\infty r^2 f_1(r)dr \int_{S_2} f_2(\omega)ds(\omega)
\end{aligned}$$

Dus

$$\int_0^\infty r^2 f_1(r)dr \int_{S_2} f_2(\omega)ds(\omega) =$$

$$= \int_0^\infty r^2 f_1(r)dr \int_{S_2} \mathrm{Jac}(\epsilon, \theta(\omega)) f_2(a_\epsilon(\omega))ds(\omega)$$

Neem nu bijvoorbeeld $f_1(r) = 3 \cdot 1_{[0,1]}(r)$. Dan volgt dat

$$\int_{S_2} f_2(\omega)ds(\omega) = \int_{S_2} \mathrm{Jac}(\epsilon, \theta(\omega)) f_2(a_\epsilon(\omega))ds(\omega)$$

Voor alle integreerbare $f_2$.

□

Figuur 1: Het effect van $a_\epsilon$ op raakvectoren

### 5.5.1 Een andere manier

Een andere manier om een uitdrukking voor de Jacobiaan te vinden is om te kijken naar wat het diffeomorfisme $a_\epsilon$ doet met onafhankelijke raakvectoren aan de bol. We kiezen een vierkant met oppervlakte 1 in $T_{S_2}((x_0, y_0, z_0))$ (de raakruimte aan de bol in $(x_0, y_0, z_0)$). Nu berekenen we de oppervlakte van het gebied in $T_{S_2}(a_\epsilon(x_0, y_0, z_0))$ waar dat vierkant door $a_\epsilon$ in omgezet wordt. Dat is de Jacobiaan van $a_\epsilon$ in $(x_0, y_0, z_0)$. (Zie figuur 1.)

Omdat $a_\epsilon$ meridianen omzet in meridianen, is het duidelijk dat het horizontale raakvectoren om zal zetten in horizontale en vertikale raakvectoren in vertikale. Verder commuteert $a_\epsilon$ met rotaties om de noordpool, dus kunnen we zonder verlies van algemeenheid de Jacobiaan alleen uitrekenen voor een punt $(x_0, y_0, z_0)$ met $x_0 = 0$.

$$(x_0, y_0, z_0) = (0, \sin\theta, \cos\theta)$$

Eerst kijken we naar een horizontale raakvector met lengte 1.

$$v_h = (1, 0, 0)$$

We maken gebruik van de ontwikkeling

$$\sqrt{b + ch + dh^2} = \sqrt{b} + \frac{c}{2\sqrt{b}}h + o(h^2) \quad , b \neq 0$$

In een kleine omgeving van $(x_0, y_0, z_0)$ zijn de bol en de raakruimte aan de bol vrijwel gelijk, dus kijken we naar:

$$\lim_{h\to 0} \frac{a_\epsilon((x_0, y_0, z_0) + hv_h) - a_\epsilon((x_0, y_0, z_0))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{(h, \sin\theta, \epsilon\cos\theta)}{\sqrt{\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta + h^2}} - \frac{(0, \sin\theta, \epsilon\cos\theta)}{\sqrt{\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta}}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{\begin{pmatrix} h\sqrt{\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta} \\ \sin\theta\left(\sqrt{\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta} - \sqrt{\sin^2\theta + \epsilon\cos^2\theta + h^2}\right) \\ \epsilon\cos\theta\left(\sqrt{\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta} - \sqrt{\sin^2\theta + \epsilon\cos^2\theta + h^2}\right) \end{pmatrix}}{\sqrt{\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta + h^2}\sqrt{\sin^2\theta + \epsilon\cos^2\theta}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta}, \sin\theta\left(\frac{o(h^2)}{h}\right), \epsilon\cos\theta\left(\frac{o(h^2)}{h}\right)\right)}{\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta}$$

$$= \frac{(1,0,0)}{\sqrt{\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta}}$$

Dit is een horizontale vector met lengte $\frac{1}{\sqrt{\sin^2\theta+\epsilon^2\cos^2\theta}}$.

Nu kijken we naar een vertikale raakvector met lengte 1.

$$v_v = (0, -\cos\theta, \sin\theta)$$

We rekenen verder, analoog aan de horizontale raakvector.

$$\lim_{h\to 0} \frac{a_\epsilon((x_0,y_0,z_0) + hv_v) - a_\epsilon((x_0,y_0,z_0))}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{(0, \sin\theta - h\cos\theta, \epsilon(\cos\theta) + h\sin\theta)}{\sqrt{\sin^2\theta - 2h\sin\theta\cos\theta + h^2\cos^2\theta + \epsilon^2(\cos^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta + h^2\sin^2\theta)}} - \right.$$

$$\left.\frac{(0, \sin\theta, \epsilon\cos\theta)}{\sqrt{\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta}}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{(0, \sin\theta - h\cos\theta, \epsilon(\cos\theta) + h\sin\theta)}{\sqrt{\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta + (2(\epsilon^2-1)\sin\theta\cos\theta)h + (\cos^2\theta + \epsilon^2\sin^2\theta)h^2}} - \right.$$

$$\left.\frac{(0, \sin\theta, \epsilon\cos\theta)}{\sqrt{\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta}}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{\begin{pmatrix} 0 \\ (\sin\theta - h\cos\theta)\sqrt{\sin^2\theta} + \epsilon^2\cos^2\theta - \\ \sin\theta\sqrt{\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta + (2(\epsilon^2-1)\sin\theta\cos\theta)h + (\cos^2\theta + \epsilon^2\sin^2\theta)h^2} \\ (\epsilon\cos\theta + \epsilon h\sin\theta)\sqrt{\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta} - \\ \epsilon\cos\theta\sqrt{\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta + (2(\epsilon^2-1)\sin\theta\cos\theta)h + (\cos^2\theta + \epsilon^2\sin^2\theta)h^2} \end{pmatrix}}{\sqrt{(\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta)(\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta + (2(\epsilon^2-1)\sin\theta\cos\theta)h + (\cos^2\theta + \epsilon^2\sin^2\theta)h^2)}}\right)$$

$$= \frac{\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 + \left( -\cos\theta\sqrt{\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta} - \sin\theta \frac{2(\epsilon^2-1)\sin\theta\cos\theta}{2\sqrt{\sin^2\theta+\epsilon^2\cos^2\theta}} \right) h + o(h^2) \\ 0 + \left( \epsilon\sin\theta\sqrt{\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta} - \epsilon\cos\theta \frac{2(\epsilon^2-1)\sin\theta\cos\theta}{2\sqrt{\sin^2\theta+\epsilon^2\cos^2\theta}} \right) h + o(h^2) \end{pmatrix}}{sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -\cos\theta(\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta) - (\epsilon^2-1)\sin^2\theta\cos\theta \\ \epsilon\sin\theta(\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta) - \epsilon((\epsilon^2-1)\sin\theta\cos^2\theta) \end{pmatrix}}{(sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta)^{3/2}}$$

- $2^e$ coëfficiënt teller:

$$-\cos\theta(\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta) - (\epsilon^2-1)\sin^2\theta\cos\theta$$

$$= -\sin^2\theta\cos\theta - (\epsilon^2\cos^2\theta + \epsilon^2\sin^2\theta\cos\theta) + \sin^2\theta\cos\theta$$

$$= \epsilon^2\cos\theta$$

- $3^e$ coëfficiënt teller:

$$\epsilon\sin\theta(\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta) - \epsilon((\epsilon^2-1)\sin\theta\cos^2\theta)$$

$$= \epsilon\sin\theta + \epsilon^3\sin\theta\cos^2\theta - \epsilon^3\sin\theta\cos^2\theta$$

$$= \epsilon\sin\theta$$

$$.. = \frac{(0, \epsilon^2\cos\theta, \epsilon\sin\theta)}{(\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta)^{3/2}}$$

Dit is een verticale raakvector met lengte

$$\sqrt{\frac{\epsilon^4\cos^2\theta + \epsilon^2\sin^2\theta}{(\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta)^3}}$$

$$= \sqrt{\frac{\epsilon^2}{(\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta)^2}}$$

$$= \frac{\epsilon}{\sin^2\theta + \epsilon^2\cos^2\theta}$$

Het product van deze twee lengtes $\frac{1}{\sqrt{\sin^2\theta+\epsilon^2\cos^2\theta}}$ en $\frac{\epsilon}{\sin^2\theta+\epsilon^2\cos^2\theta}$ geeft de Jacobiaan

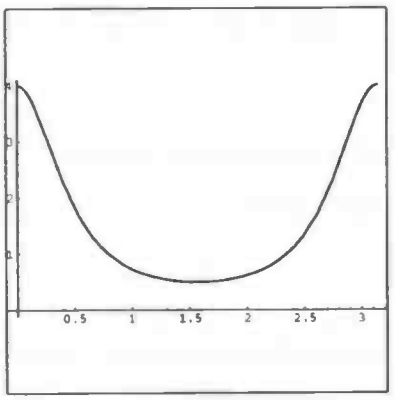
$$\mathrm{Jac}(\epsilon,\theta) = \frac{\epsilon}{(\sin^2\theta+\epsilon^2\cos^2\theta)^{3/2}}$$

Figuur 2 geeft een indruk van hoe deze Jacobiaan eruit ziet. In het algemeen is

$$\mathrm{Jac}(\epsilon,0) = \frac{1}{\epsilon^2}$$

en

$$\mathrm{Jac}(\epsilon,\frac{\pi}{2}) = \epsilon$$




Figuur 2: $\mathrm{Jac}(\frac{1}{2},\theta),\ 0 \leq \theta \leq \pi$

# 6 De stelling van Wiener voor de sfeer

**Stelling 24** *De rotaties van een familie* $(f_i)_{i\in I}$ *spannen* $L^2(S)$ *op* $\Longleftrightarrow \forall n \in N\ \exists i \in I$ *met* $Q_n f_i \neq 0$ *(in* $L^2$*-zin).*

Bewijs:

($\Longrightarrow$) Uit het ongerijmde: Stel de rotaties van $(f_i)$ spannen $L^2(S)$ op maar $\exists n$ met $Q_n f_i = 0\ \forall i \in I$ Dan staan de rotaties van alle $f_i$ dus loodrecht op $\mathcal{H}_n$. Dus kun je elementen uit $\mathcal{H}_n$ niet benaderen.

($\Longleftarrow$) De afsluiting van het opspansel van de rotaties van de familie $(f_i)$ is een rotatie-invariante deelruimte van $L^2(S)$. Hij is dus te schrijven als $\sum^{\oplus}_{n\in A}\mathcal{H}_n$ Maar $\forall n \in N\ \exists i \in I$ met $Q_n f_i \neq 0$ dus $A = N$.

# 7 Resolutie van de identiteit?

We zouden graag een analogon vinden voor de resolutie van de identiteit voor wavelets op de reële rechte. Bekijk daarom

$$B(f,g) = \int_0^\infty \int_G (f|\psi_{\epsilon,r})(\psi_{\epsilon,r}|g) d\rho(\epsilon) dr \tag{15}$$

waarin $\rho$ een later te specificeren maat is, en $dr$ de Haarmaat op $G = SO(3)$. Als $B(f,f)$ voor alle $f \in L^2(S_2)$ eindig is, zoals bijvoorbeeld wanneer $\rho$ een eindige maat is, moet (volgens de stelling van Cauchy-Schwarz) $B(f,g)$ ook eindig zijn voor alle $f, g \in L^2(S_2)$. We kunnen zelfs bewijzen dat $B$ dan continu is.

In deze gevallen geldt de volgende stelling:

**Stelling 25**

- *Er bestaat een zelfgeadjungeerde operator $W$, met $B(f,g) = (Wf,g)$.*
- *$W$ commuteert met rotaties.*

Bewijs:
De existentie van $W$ volgt met behulp van de Riesz representatiestelling uit het feit dat $B(f,g)$ een begrensde sesquilineaire vorm is in $f$ en $g$.

$W$ commuteert met rotaties aangezien

$$\begin{aligned}
(WL(r_1)f|g) &= \int_0^\infty \int_G (L(r_1)f|\psi_{\epsilon,r})(\psi_{\epsilon,r}|g) d\rho(\epsilon) dr \\
&= \int_0^\infty \int_G (f|L(r_1^{-1})\psi_{\epsilon,r})(\psi_{\epsilon,r}|g) d\rho(\epsilon) dr \\
&= \int_0^\infty \int_G (f|\psi_{\epsilon,r_1^{-1}r})(\psi_{\epsilon,r}|g) d\rho(\epsilon) dr \\
&= \int_0^\infty \int_G (f|\psi_{\epsilon,r})(\psi_{\epsilon,r_1 r}|g) d\rho(\epsilon) dr \\
&= \int_0^\infty \int_G (f|\psi_{\epsilon,r})(L(r_1)\psi_{\epsilon,r}|g) d\rho(\epsilon) dr \\
&= \int_0^\infty \int_G (f|\psi_{\epsilon,r})(\psi_{\epsilon,r}|L(r_1^{-1})g) d\rho(\epsilon) dr \\
&= (Wf|L(r_1^{-1})g) \\
&= (L(r_1)Wf|g)
\end{aligned}$$

□

## 7.1 Het probleem

**Probleem 1 (Resolutie van de identiteit)** *Bestaan er een maat $\rho$ en een functie $\psi$, zodanig dat $W = cId$?*

We passen stelling 11 toe en zien in dat

$$Wp_n = \lambda_n p_n$$

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \lambda_n(2n+1)(p_n|p_n) \\
&= (2n+1)(p_n|Wp_n) \\
&= (2n+1)\int_0^\infty \int_G (p_n|\psi_{\epsilon,r})(\psi_{\epsilon,r}|p_n)d\rho(\epsilon)dr \\
&= \int_0^\infty \left( (2n+1)\int_G |(p_n|\psi_{\epsilon,r})|^2 dr \right) d\rho(\epsilon) \\
&= \int_0^\infty \Phi_n(\epsilon)d\rho(\epsilon)
\end{aligned}$$

Als

$$\begin{aligned}
\Phi_n(\epsilon) &:= (2n+1)\int_G |(p_n|\psi_{\epsilon,r})|^2 dr \\
&= \int_G |(e_n|\psi_{\epsilon,r})|^2 dr
\end{aligned}$$

(waarin $e_n$ de genormaliseerde $p_n$ is). Voor $(p_n|\psi_{\epsilon,r})$ kun je een andere uitdrukking vinden:

$$\begin{aligned}
(p_n|\psi_{\epsilon,r}) &= \int_{S^2} p_n(y)\psi_{\epsilon,r}(y)d\sigma(y) \\
&= \int_{S^2} p_n(y\cdot p)\psi_\epsilon(r^{-1}y)d\sigma(y) \\
&= \int_{S^2} p_n(ry\cdot p)\psi_\epsilon(y)d\sigma(y) \\
&= \int_{S^2} p_n(y\cdot r^{-1}p)\psi_\epsilon(y)d\sigma(y) \\
&= \int_{S^2} p_n(r^{-1}p\cdot y)\psi_\epsilon(y)d\sigma(y) \\
&= \frac{1}{2n+1}Q_n\psi_\epsilon(r^{-1}p)
\end{aligned}$$

Dit invullen in de formule voor $\Phi_n(\epsilon)$ geeft:

$$\Phi_n(\epsilon) = \frac{1}{2n+1}\int_G |Q_n\psi_\epsilon(r^{-1}p)|^2 dr$$

$$= \frac{1}{2n+1}\int_G |Q_n\psi_\epsilon(rp)|^2 dr$$
$$= \frac{1}{2n+1}\int_{S^2} |Q_n\psi_\epsilon(y)|^2 d\sigma(y)$$
$$= \frac{1}{2n+1}\|Q_n\psi_\epsilon\|^2$$

Waarmee de uitdrukking voor $\lambda_n$ de volgende wordt:

$$\lambda_n = \int_0^\infty \Phi_n(\epsilon)d\rho(\epsilon)$$
$$= \frac{1}{2n+1}\int_0^\infty \|Q_n\psi_\epsilon\|^2 d\rho(\epsilon)$$

### 7.1.1 $\rho$ moet oneindige maat hebben

Voor eindige maat $\rho$ is nu

$$\lambda_n = \frac{1}{2n+1}\int_0^\infty \|Q_n\psi_\epsilon\|^2 d\rho(\epsilon)$$
$$\leq \frac{1}{2n+1}\int_0^\infty d\rho(\epsilon)\|\psi\|^2$$
$$= \frac{1}{2n+1}\int_0^\infty d\rho(\epsilon)$$

Wat betekent dat $\lambda_n \to 0$, als $n \to \infty$. $\rho$ moet dus oneindige maat hebben, wil de resolutie van de identiteit gelden

### 7.1.2 $\psi$ moet een even en een oneven deel hebben

De Legendre-polynomen $P_n$ zijn even voor even $n$ en oneven voor oneven $n$. Als we op de sfeer even functies definiëren door

$$f_{\text{even}}(x) = f_{\text{even}}(-x)\ \forall x \in S_2$$

en oneven functies door

$$f_{\text{oneven}}(x) = -f_{\text{oneven}}(-x)\ \forall x \in S_2$$

dan zijn de functies $p_n$ even voor even $n$ en oneven voor oneven $n$. We zien dat, omdat 'even of oneven zijn' een rotatie-invariante eigenschap is, de $\mathcal{H}_n$ voor even $n$ alleen even functies bevatten en voor oneven $n$ alleen oneven functies. $a_\epsilon$ werkt op precies dezelfde manier op het noordelijk halfrond als op het zuidelijk halfrond en zet even functies dus om in even functies en oneven functies om in oneven functies. Dit betekent het volgende:

- Voor $\psi$ even is $\Phi_n(\epsilon) = 0\ \forall n$ oneven, $\forall \epsilon > 0$ en dus $\lambda_n = 0\ \forall n$ oneven.

- Voor $\psi$ oneven is $\Phi_n(\epsilon) = 0\ \forall n$ even, $\forall \epsilon > 0$ en dus $\lambda_n = 0\ \forall n$ even.

Dan kan $W$ niet de identiteit zijn, dus moet $\psi$ een even en een oneven deel hebben, om de resolutie van de identiteit te kunnen laten gelden.

## 7.2 Vermoeden

Een voor de resolutie van de identiteit noodzakelijke voorwaarde is dat $\lambda_n > 0\ \forall n$. Voor verder onderzoek ligt het daarom voor de hand, het volgende vermoeden te controleren:

**Vermoeden 1**

1. $\forall n\ \exists\ \epsilon > 0 \quad \Phi_n(\epsilon) > 0$
2. $\rho \neq 0 \Rightarrow\ \forall n\ \lambda_n = \int_0^\infty \Phi_n(\epsilon) d\rho(\epsilon) > 0$

# Referenties


[1] Tom M. Apostol. *Calculus*, volume 2. John Wiley & Sons, second edition, 1969.

[2] Ingrid Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets.* Siam, 1992.

[3] H. Dym and H.P. McKean. *Fourier Series and Integrals.* Academic Press, Inc., 1972.

[4] Michael Reed and Barry Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*, volume 1. Academic Press, Inc., 1980.

[5] E. Thomas. Representaties van groepen. dictaat, 1985.

[6] Antoni Wawrzyńczyk. *Group Representations and Special Functions.* D.Reidel Pub. Comp., 1984.

[7] A. Weil. *l' Intégration dans les groupes topologiques.* Hermann, Paris, 1965.

# Het probleem van wavelets op de sfeer

Fleur Kelpin

Rijksuniversiteit Groningen
Bibliotheek
Wiskunde / Informatica / Rekencentrum
Landleven 5
Postbus 800
9700 AV Groningen

Vakgroep
Wiskunde

RuG

WORDT
NIET UITGELEEND