

WORDT
NIET UITGELEEND

Separatrix-passage en gevangen zijn in resonantie

Hendrikjan Schaap

9 juni 2000

6 JUN 2000

Rijksuniversiteit Groningen
Bibliotheek
Wiskunde / Informatica / Rekencentrum
Landelven 5
Postbus 800
9700 AV Groningen

Separatrix-passage en gevangen zijn in resonantie

Hendrikjan Schaap

9 juni 2000

Inhoudsopgave

1	Inleiding	3
2	Inleidende theorie	5
2.1	Algemene dynamische systemen	5
2.2	Hamiltoniaanse systemen	6
2.2.1	Hamiltonvergelijkingen	6
2.2.2	Energiebehoud	6
2.2.3	Faseportret	7
2.2.4	Scheiding tussen instabiel en stabiel	7
2.3	Gestoorte Hamiltoniaanse systemen	8
2.3.1	Invoering storing	8
2.3.2	Bevroren systemen	9
2.3.3	Gedrag oplossingskromme benaderen	9
2.4	Middeling	10
2.4.1	Algemene tijdmiddeling	10
2.4.2	Middeling op gestoorde Hamiltonsystemen	11
2.4.3	Ruimtemiddeling	12
2.4.4	Beperkingen middeling	13
2.5	Actiehoek-variabelen	14
2.5.1	Theorie van Liouville	14
2.5.2	Zoeken naar een geschikte coördinatentransformatie	15
2.5.3	Omzetting van bewegingsvergelijkingen van carthetische naar actiehoek-variabelen	16
2.5.4	Beperkingen actiehoek-variabelen	18
3	Separatrix-passage in 1-vrijheidsgraad	19
3.1	Precisering van separatrix-passage	19
3.1.1	Bespreking voorbeeldsysteem	20
3.1.2	Karakterverandering oplossingskromme	22
3.1.3	Wat er precies gebeurt	23
3.2	Kansberekening	24
3.3	Benadering Hamiltoniaan oplossingskromme	27
3.4	Numerieke bevestiging	28

3.4.1	Bevestiging begrip kans	28
3.4.2	Bevestiging mogelijkheid tijdmiddeling	28
3.4.3	Beperking en kracht middeling	29
3.5	Gedrag oplossingskrommen bij equivalente systemen	30
3.5.1	Effect van wrijving of expansie	31
3.6	Separatrix-passage bij algemenere systemen	31
3.6.1	Algemene uitdrukking verandering Hamiltoniaan	32
3.6.2	Voordelen 1-dimensionale storingsparameter	33
3.7	Een gekoppeld numeriek dubbelsysteem	33
4	Uitbreiding naar twee invarianten	37
4.1	Inleiding	37
4.2	Resonantie	38
4.2.1	Frequentieverhoudingen	38
4.2.2	Gedrag nabij een resonantiekromme	42
4.3	Middeling nabij resonantiekromme	43
4.3.1	Ongestoord als eerste benadering	44
4.3.2	Invloed van de storingstermen	45
4.3.3	Het gedrag van de resonantiecomponent	45
4.3.4	Plaktheorie	46
4.4	Voorbeeld van gevangen worden in resonantie	46
4.4.1	1 : 1 resonantie	46
4.4.2	$p : q$ resonantie	48
4.5	Resonantie in de praktijk	49
A	Middelingsstellingen	50
A.1	Schets bewijs stelling A.1: tijd=ruimtemiddeling	52
A.2	Schets bewijs stelling A.2: ruimtemiddeling	53
A.2.1	Nauwkeuriger afschatting	54
A.3	Bewijs stelling A.3: tijdmiddeling	55
B	Bewijs mogelijkheid benadering Hamiltoniaan door middeling	58
B.1	Beweging in buitengebied	59
B.2	Beweging in binnengebieden	61
B.3	Aantonen dat de plakmethode werkt	62
B.4	Bewijs 2) van stelling 3.3	62
B.5	Overgebleven details	64
B.6	Middeling buiten separatrices	68
	Bibliografie	69

Hoofdstuk 1

Inleiding

In de natuur is constantheid van grootheden een zeldzaamheid. Wel komt het veel voor dat grootheden constant lijken, maar zeer langzaam veranderen in de tijd. Kijk bijvoorbeeld naar een slinger waarvan de lengte l langzaam varieert in de tijd: $l(t) = l_0 + \epsilon t$. Voor ϵ klein, neem $\epsilon \ll 1$, blijkt te gelden dat de verhouding tussen de energie H en de frequentie van de slinger ω nauwelijks verandert in de tijd, zie §2.5.3. Hierbij kunnen H en ω energie echter wel veel veranderen in de tijd. De functie $I = H/\omega$ heet ook wel een adiabatische invariant. Dat houdt in dat voor een tijdsinterval van lengte $1/\epsilon$ de totale verandering van I slechts van orde 1 is.

Kijk naar een systeem van één vrijheidsgraad met behouden grootte I . Het aantal vrijheidsgraden is de helft van de dimensie van de faseruimte van het systeem. Verstoor vervolgens dit systeem met behulp van een langzaam variërende variabele. Als je een oplossing in de tijd bekijkt van een dergelijk systeem, dan gedraagt de waarde van I daarop zich als een adiabatische invariant. Het gedrag van de oplossing verandert adiabatisch langzaam mee. Maar het kan voorkomen dat in een zeer korte tijd de oplossing zich compleet anders gaat gedragen, hoewel I dat niet doet. De variabele I heeft dan een cruciale waarde gepasseerd. Vanaf dit tijdstip kan de oplossing weer adiabatisch langzaam gaan veranderen. Dit verschijnsel is algemeen en doet zich ook voor in meerdere vrijheidsgraden. Het geval van één vrijheidsgraad wordt in hoofdstuk 3 besproken.

Dit verschijnsel van een plotselinge verandering in een adiabatisch invariante toestand komen we ook in ons dagelijkse leven tegen. Denk bijvoorbeeld aan de zon. Deze zal pas over 5,5 miljard jaar gaan sterven. Maar de lengte van het moment van sterven is slechts in de orde van een miljoen jaar. Daarna blijven de restanten voor vrijwel eeuwig achter. Of denk aan een satelliet die heel langzaam steeds dichter rond de aarde cirkelt tot het moment dat hij ineens op de aarde stort.

Bij meerdere vrijheidsgraden kan ook een ander verschijnsel optreden. Dan wordt een oplossing opeens gevangen in een zogenaamd resonant oppervlak. Daar geldt $\langle k, \omega(I) \rangle = 0$, voor een zekere geheeltallige vector k . De vector $\omega(I)$ wordt gevormd door de frequenties die bij het systeem van de oplossing horen. De oplossing zal in de buurt van dat oppervlak een tijd gaan rondhangen. De adiabatische invariantie van I gaat dan niet op. Vervolgens kan de oplossing de omgeving verlaten, waarna I weer adiabatisch invariant wordt. Dit verschijnsel zie je uitgelegd in hoofdstuk 4.

Voordat je met deze eigenschappen gaat bezighouden is het verstandig om kennis te hebben van enige basiskennis en benaderingstechnieken. Middeling is zo'n techniek. Hiermee kun je het gedrag van een oplossing voor zeer lange tijd bekijken zonder dat de korte termijn verschijnselen hierbij storen. Hiervoor is het inleidende hoofdstuk 2.

Er is veel onderzoek gedaan naar de zojuist besproken eigenschappen. Veel literatuur hier over is echter zeer specialistisch. Met dit artikel hoop ik een brug te slaan voor de mensen wie weliswaar enige wiskundige vaardigheden bezitten, maar nog niet de benodigde kennis om de specialistische literatuur over de zojuist besproken eigenschappen te begrijpen. Hierbij ga je voornamelijk systemen zien met 1 dan wel 2 vrijheidsgraden. Deze beperking is nodig, vanwege de omvang van deze onderwerpen. Onderzoek naar deze gebieden is nooit af. Gelukkig maar, er valt nog veel moois te ontdekken.

Dit voorwoord zou niet af zijn zonder een dankbetuiging. Hierbij wil ik graag mijn afstudeerdocent Henk Broer bedanken voor de vele moeite en het vele geduld dat hij hierin gestoken heeft. Zonder zijn begeleiding en vele adviezen zou deze scriptie nooit tot stand gekomen zijn.

Hoofdstuk 2

Inleidende theorie

Om de in de inleiding beschreven fenomenen te begrijpen, is het nodig om kennis van enige begrippen te hebben. Die benodigde kennis staat in dit hoofdstuk. Het soort systemen waar de fenomenen over gaan bijvoorbeeld. Storing is hierbij een belangrijk begrip. Ook benaderingstheorieën worden besproken om het gedrag van oplossingen van die systemen gemakkelijker te bepalen. Tijdmiddeling is hierbij een sleutelwoord. Tenslotte zie je een speciale coördinatentransformatie die sommige systemen er veel gemakkelijker uit laat zien. Een andere vorm van benadering, namelijk ruimtemiddeling, komt hieruit voort.

2.1 Algemene dynamische systemen

We zullen ons bezig houden met dynamische systemen. Dat zijn oplossingen van een differentiaalvergelijking. Deze differentiaalvergelijking kan ook meerdimensionaal zijn. Bijvoorbeeld de vergelijking:

$$\ddot{x} + x = 0, \text{ de Harmonische oscillator.} \quad (2.1)$$

De orde van de afgeleiden in de vergelijking kunnen van hogere orde zijn. Zo is in de voorafgaande vergelijking (2.1) orde twee aanwezig. Als de hoge orde afgeleide termen lineair zijn, dan kun je het systeem eenvoudig omschrijven naar een eerste orde systeem. Het enige nadeel is dat de dimensie van je systeem toeneemt. Passen we dit toe op de voorafgaande vergelijking, dan verkrijgen we het volgende 1-vrijheidsgraad systeem:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x. \end{cases} \quad (2.2)$$

In het algemene geval zul je met indices werken in plaats van met x en y . Dit zal er als volgt uitzien:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n). \end{cases} \quad (2.3)$$

Dergelijke systemen zijn veel te algemeen. De meeste van deze systemen zijn analytisch onoplosbaar. We zullen ons beperken tot een klasse van systemen die weliswaar analytisch meestal niet goed oplosbaar zijn, maar waar je wel veel over kunt zeggen. Dit is de klasse van Hamiltonsystemen. Ook zullen we systemen bestuderen die daar erg op gaan lijken. Om precies te zijn Hamiltonsystemen met een kleine storing.

2.2 Hamiltoniaanse systemen

2.2.1 Hamiltonvergelijkingen

Een Hamiltonsysteem is een systeem die ontstaat uit een energiefunctie, de Hamiltoniaan. De bewegingsvergelijkingen van het systeem moeten voldoen aan zogenaamde Hamilton voorwaarden. Bij één vrijheidsgraad ziet het er uit als volgt:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{cases} \quad (2.4)$$

waarbij $H(x, y)$ de Hamiltoniaan is die van x en y afhangt. Neem hierbij aan dat $y = \dot{x}$, dan is $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + V(x)$. Systeem (2.2) is ook Hamiltoniaans. Dit zie je gemakkelijk in, als je beseft dat de Hamilton gelijk is aan: $H = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2$, dus dat $V(x) = \frac{1}{2}x^2$. Noem $g_H^t(x, y)$ de oplossingsflow van (2.4). Dit betekent dat $t \rightarrow g_H^t(x, y)$ de integraalkromme is bij $(x, y) = g_H^0(x, y)$.

2.2.2 Energiebehoud

Een belangrijk kenmerk van een Hamiltoniaans systeem is energiebehoud. Dit betekent dat als een oplossing start met een bepaalde waarde van de Hamiltoniaan, dat de Hamiltoniaan op de oplossingskromme altijd deze waarde houdt. Dit kun je gemakkelijk inzien door de afgeleide van de Hamiltoniaan naar de tijd te nemen:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y}.$$

Nu vul je voor $\dot{x}$ en $\dot{y}$ je systeemvergelijkingen (2.4) in:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x} = 0. \quad (2.5)$$

Let op: deze afleiding gaat alleen op als H niet t -afhankelijk is.

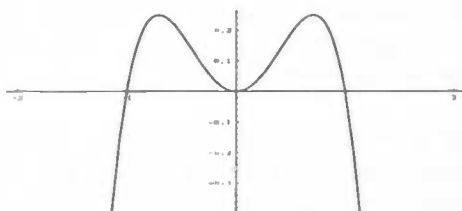
2.2.3 Faseportret

Een faseportret tekenen van een Hamiltoniaans systeem met energiebehoud wordt nu veel gemakkelijker, want je hoeft de oplossingen $x(t)$ en $y(t)$ niet expliciet uit te rekenen als functie van t . Je hoeft slechts de niveaukrommen van de functie H te kennen.

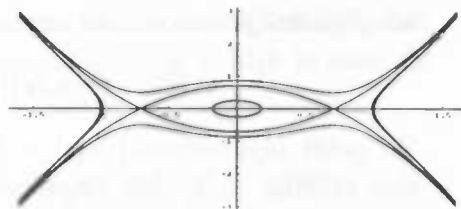
We zullen dit toepassen op het volgende systeem:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2x - 4x^3 \end{cases} \quad (2.6)$$

1. $H = \frac{1}{2}y^2 + x^4 - x^2$, dus $V(x) = x^4 - x^2$.
2. $V'(x) = 0$ levert een minimum voor $x = 0$ en maxima voor $x = -1$ en $x = 1$.
3. Dit betekent een stabiel evenwichtspunt in de oorsprong en twee instabiele evenwichtspunten op de y -as: $(-1/\sqrt{2}, 0)$ en $(1/\sqrt{2}, 0)$. Het faseportret ziet er uit als figuur 2.2. Voor meer achtergrond zie [2], [4].



Figuur 2.1: $V(x) = x^2 - x^4$



Figuur 2.2: faseplot bij $H = \frac{1}{2}y^2 + x^4 - x^2$

2.2.4 Scheiding tussen instabiel en stabiel

Een zadelpunt z geeft twee verzamelingen: $W^u(z)$ en $W^s(z)$, waarbij u instabiele en s stabiele oplossingskrommen zijn. Deze verzamelingen zijn hier krommen die twee gebieden van elkaar scheiden, separeren. De meest interessante krommen zijn diegene die gebieden separeren waarvan een of beide begrensd zijn. In faseportret 2.2 zijn dat van de krommen die in het zadelpunt uitkomen, de twee krommen die het dichtste bij de oorsprong zijn. Deze krommen samen vormen een separatrix.

2.3 Gestoorde Hamiltoniaanse systemen

Het is nuttig om een kleine generalisatie in te voeren. We voeren een storing in, klein ten op zichte van de bewegingsvergelijkingen van het systeem. Het is handig om dit op een speciale manier te doen. Met een storingsparameter ϵ en een langzaam variërende parameter λ die daar lineair in de tijd van afhangt: $\lambda(t) = \lambda_0 + \epsilon t$.

2.3.1 Invoering storing

Als storingsparameter nemen we ϵ en als langzaam variërende parameter de functie $\lambda = \epsilon t$. Kijk je naar de verandering van λ in de tijd ten opzichte van een variabele $x(t)$, dan zie je dat voor $\epsilon < \epsilon_0 \ll 1$ de parameter λ ten opzichte van $x(t)$ nauwelijks verandert. De verandering is van een andere orde, een andere tijdschaal.

Definitie 2.1 Stel $\delta(\epsilon)$ is een ordefunctie van ϵ die positief is in $(0, \epsilon_0]$ en waar $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(\epsilon) < \infty$. $x_\epsilon(t) = O(\delta(\epsilon))$ als geldt in deze limiet: $|x_\epsilon(t)| \leq k\delta(\epsilon)$, met k constant.

Definitie 2.2 Als geldt $x_\epsilon(t) = O(\delta(\epsilon))$ voor $\epsilon \rightarrow 0$ voor $0 \leq \delta(\epsilon)t \leq \epsilon_0$, met ϵ_0 onafhankelijk van ϵ , dan zeggen we:

$$x_\epsilon(t) = O(\delta_0(\epsilon)) \text{ voor } \epsilon \rightarrow 0 \text{ op de tijdschaal } 1/\delta(\epsilon).$$

Zo geldt bijvoorbeeld $\lambda(t) - \lambda_0 = O(\epsilon)$ voor $\epsilon \rightarrow 0$ op tijdschaal $1/\epsilon$. Voer nu een storing in in het ongestoorde Hamiltonsysteem (2.4), met $H = H_0$. Het nieuwe systeem zijn de Hamiltonvergelijkingen die horen bij de Hamiltoniaan $H_0(x, y) + \lambda H_1(x, y, \lambda)$. Het is gestoorde Hamiltonsysteem dat wordt gegeven door:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H(x, y, \lambda)}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H(x, y, \lambda)}{\partial x} \\ \dot{\lambda} = \epsilon. \end{cases} \quad (2.7)$$

N.B. Elke $H(x, y, \lambda)$ is van de vorm $H_0(x, y) + \lambda H_1(x, y, \lambda)$, zolang de functie $H(x=\text{constant}, y=\text{constant}, \lambda)$ maar van de vorm is $H = \sum_{i=0}^n a_i \lambda^i$, met a_i constant.

Omdat Hamiltoniaan nu t -afhankelijk is, blijft deze niet meer behouden op een oplossingskromme. Dit zien we als volgt:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \dot{\lambda} = \epsilon \frac{\partial H}{\partial \lambda},$$

de eerste twee termen van $\frac{dH}{dt}$ zijn immers 0, zie (2.5).

2.3.2 Bevroren systemen

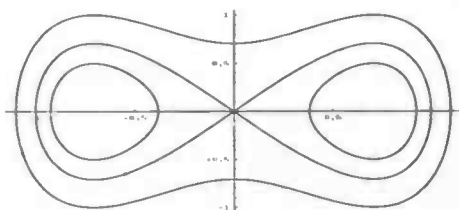
Als een systeem tijdsafhankelijk is door λ dan kun je het gedrag van het systeem benaderen door λ constant te houden. Het zo verkregen systeem is autonoom en daarvan kun je gemakkelijk het faseportret bepalen. Dit systeem heet ook wel een bevroren systeem. Parameter λ bevries je als het ware en je kijkt naar de niveaukrommen die horen bij de Hamiltoniaan met de bevroren λ waarde.

2.3.3 Gedrag oplossingskromme benaderen

Zoals gezegd is het voldoende om in een autonoom Hamiltonsysteem met één vrijheidsgraad voor het gedrag van de oplossingskrommen te kijken naar de niveaukrommen van H . In het gestoorde Hamiltonsysteem geldt ook iets dergelijks. Een goed idee geeft de verandering van H . Immers, het gedrag van de oplossing in het begin kun je benaderen door het systeem voor de beginwaarde van λ te bevroren. Voor het eindgedrag van de oplossing bevries je weer het systeem, met $\lambda = \lambda|_{t_1}$.

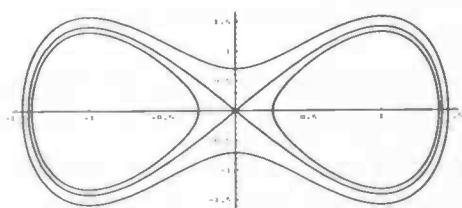
De beginwaarde van de oplossing geeft een beginwaarde H_0 van H . Als je de verandering van H kent, dan weet je ook de H -waarde H_1 bij $t = t_1$. De bijbehorende niveaukromme benadert dan het gedrag van de oplossing rondom het tijdstip $t = t_1$. Voor het gedrag voor een tussenliggend tijdstip t_i kijk je naar de niveaukromme $H = H|_{t=t_i}$.

Een waarschuwing is hier op zijn plaats. Want als je naar een oplossing afzonderlijk wilt kijken, is het meestal niet genoeg om alleen het beginpunt van die oplossing te weten. Je hebt dan ook het eindpunt van die oplossing nodig. Dit komt omdat er vaak meerdere niveaukrommen bij eenzelfde H -waarde zijn. Zo zijn in het systeem van figuur 2.3 twee niveaukrommen bij $H = 1/4$.

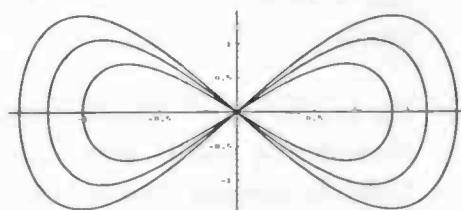


Een idee van wat er met een systeem in de tijd gebeuren kan, geven figuren 2.3 t/m 2.6. Gekozen is voor de waarden $\lambda = 0$, $\lambda = 1/2$ en $\lambda = 1$. Het bijbehorende systeem is het systeem met Hamiltoniaan $H = \frac{1}{2}y^2 - (1 + \lambda)x^2 + x^4$. Figuur 2.6 laat de verwijding van de separatrices zien: de acht wordt steeds groter. De getekende niveaukrommen zijn: de separatrix $H = 0$ en de krommen behorende bij $H = 1/4$ en $H = -1/4$.

De H hangt niet alleen van de langzaam variërende parameter λ af, maar ook van x en y die van t en indirect van λ afhangen. Als we kijken hoe de H ten opzichte van λ verandert, is het verwarrend om x en y mee te nemen. Deze variabelen zitten namelijk in een andere tijdschaal dan λ . Immers voor $\epsilon \rightarrow 0$ zit λ in tijdschaal $1/\epsilon$ en x en y zitten in tijdschaal 1. Gewensd is om onze blik alleen op λ te focussen en een benadering voor H te vinden die alleen maar van λ afhangt. Dit kan door middeling.



Figuur 2.5: faseportret bij $\lambda = 1$



Figuur 2.6: verwijding van de separatrices: $\lambda = 0, \frac{1}{2}, 1$

2.4 Middeling

Als je een periodieke oplossingskromme neemt die van x , t en λ afhangt en daarvan het gemiddelde over t berekent, dan krijg je een oplossingskromme die een goede benadering levert van je periodieke oplossingskromme. Als je dit voor alle oplossingskrommen in je systeem doet, dan ben je aan het tijdmiddelen.

2.4.1 Algemene tijdmiddeling

Maar hoe middel je nou precies? De tijdmiddeling werkt als volgt: je neemt aan dat je systeem in de volgende vorm staat:

$$\dot{x} = \epsilon f(t, x) + \epsilon^2 g(t, x, \epsilon), \quad x(t_0) = x_0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

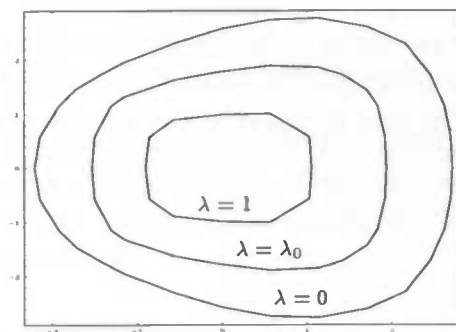
Om het in deze vorm te krijgen, kun je de methode van variatie van constanten gebruiken, zie [10]. Vervolgens neem je aan dat f T -periodiek is in t . Deze T hangt niet van ϵ af (meestal wel van x_0). Kijk nu naar het bijbehorende gemiddelde systeem:

$$\dot{y} = \epsilon \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt, \quad y(t_0) = x_0, \quad y \in R^n, \quad t \in R.$$

De functie f haal je uit de bewegingsvergelijkingen van je systeem. Onder bepaalde voorwaarden geldt voor $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ dat $\|x(t) - y(t)\| = O(\epsilon)$ voor $\epsilon \rightarrow 0$ op de tijdschaal $1/\epsilon$ (dus voor $t < c/\epsilon$). Zie ook Appendix A, stelling A.3. Het gemiddelde systeem levert dus een goede benadering voor je systeem over lange tijd.

2.4.2 Middeling op gestoorde Hamiltonsystemen

Nu gaan we middeling toepassen op gestoorde Hamiltonsystemen (2.7). Beschouw een oplossingskromme van dat systeem. Op parameterwaarde $\lambda = \lambda_0$ hoort er een periodieke niveaukromme $\gamma(t, \lambda_0)$ bij die het gedrag van de oplossing op dat moment benadert, zie ook figuur 2.7. De bijbehorende periode $T(\lambda_0)$ is constant. Een goede benadering van de Hamiltoniaan rond parameterwaarde $\lambda = \lambda_0$ is dan de constante $H(x(t, \lambda_0), y(t, \lambda_0), \lambda_0) = H(\gamma(t, \lambda_0), \lambda_0)$.



Figuur 2.7: benaderende niveaukrommen bij oplossingskromme $\gamma(t, \lambda)$

Maar wat je graag wilt is een goede benadering van de Hamiltoniaan voor de totale oplossingskromme. De functie $h(\lambda)$ die de oplossing is van de volgende differentiaalvergelijking met beginwaarde $h(\lambda_s) = H(x(t_s, \lambda_s), y(t_s, \lambda_s), \lambda_s)$ is zo'n benadering:

$$\dot{h} = \frac{\epsilon}{T(\lambda)} \int_0^{T(\lambda)} \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\gamma(\lambda, t), \lambda) dt.$$

Waarom dat geldt, staat in bijlage B.6. Tijdens het berekenen van de integraal beschouw je λ als een constante parameter. De variabele niveaukromme $\gamma(t, \lambda)$ waarover je integreert, voldoet aan de parametrisatie $(x(t, \lambda), y(t, \lambda))$. Omdat de argumenten van de functie onder het integraalteken gemiddeld over de tijd uitsluitend functies in λ opleveren, hangt h alleen nog maar van λ af. De differentiaalvergelijking waar $h(\lambda)$ aan moet voldoen, kun je ook zo opschrijven:

$$\frac{dh}{d\lambda} = \frac{1}{T(\lambda)} \int_0^{T(\lambda)} \frac{\partial H}{\partial \lambda}(\gamma(t, \lambda), \lambda) dt.$$

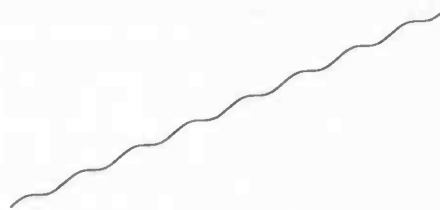
Nu zie je meteen dat $h(\lambda)$ alleen van λ afhangt. N.B.: in sommige literatuur hierover hebben de x en y alleen maar argument t en dus niet λ . Dit is om te benadrukken dat de verandering van x en y op tijdschaal 1 plaatsvindt. Om verwarring te voorkomen en omdat het karakter van de oplossing $x(t, \lambda)$ op tijdschaal $1/\epsilon$ verandert geef ik als tweede argument λ mee.

2.4.3 Ruimtemiddeling

Beschouw een systeem omgezet in poolcoördinaten in de volgende vorm:

$$\begin{cases} \dot{r} = \epsilon \sin \phi + \lambda \\ \dot{\phi} = \omega \\ \dot{\lambda} = \epsilon. \end{cases} \quad (2.8)$$

De frequentie van de oscillatie is de constante $\omega \neq 0$ en $\lambda = \epsilon t$. Als je (2.8) gaat middelen over ϕ dan verdwijnt de oscillatieterm $\sin \phi$. Het gemiddelde systeem dat je nu krijgt is (2.8) met de term $\lambda = \epsilon t$ in plaats van de term $\epsilon(\sin \phi + t)$.



Figuur 2.8: $\epsilon \sin \phi + \lambda$

Je hebt nu over ϕ gemiddeld in plaats van over t . Als je beseft dat $\phi = \phi_0 + \omega t$

dan is het niet moeilijk om in te zien dat middeling over t hetzelfde gemiddelde systeem oplevert. In het algemene geval is er sprake van meerdere hoeken $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$. Als je nu daarover middelt dan doe je dat over een gehele n -dimensionale ruimte. Daarom heet deze benaderingsmethode ruimtemiddeling. Het is vaak equivalent aan tijdmiddeling, zie Appendix A, stelling A.1.

Voordat je gaat middelen neem je aan dat de verandering van het systeem in tijdschaal $1/\epsilon$, op te delen is in twee componenten. Deze zijn: een oscillatie van orde ϵ die uitsluitend afhankelijk is van snelle variabelen van tijdschaal 1 en een systematische evolutie die uitsluitend afhangt van langzaam variënde variabelen. Vergelijk figuur 2.8.

Algemener

Algemener werkt de ruimtemiddeling als volgt. Beschouw het systeem:

$$\dot{\phi} = \omega(I) + \epsilon f(I, \phi), \quad \dot{I} = \epsilon g(I, \phi), \quad I(t_0) = I_0,$$

$I \in R^l$, $\phi \in R^k \bmod 2\pi$, met $k + l = 2n$. Hierbij neem je aan dat f en g 2π periodiek zijn in ϕ . Kijk nu weer naar het bijbehorende gemiddelde systeem:

$$\dot{J} = \epsilon \bar{g}, \quad \bar{g} = (2\pi)^{-k} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} g(J, \phi) d\phi_1 \dots d\phi_k, \quad J(t_0) = I_0.$$

Er geldt onder bepaalde voorwaarden met $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ en $\phi \in R \bmod 2\pi$ dat

$$|I(t) - J(t)| < c\epsilon, \quad \forall t, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{\epsilon}, \quad \text{waarbij } c \text{ een constante is.}$$

Als je de middeling neemt volgens de ruimtemiddeling houdt je alleen de trendlijn, ook wel de seculiere verstoring genoemd, over. Vergelijk figuur 2.8, waar na middeling een rechte lijn overblijft. Voor een meerdimensionale ϕ gelden analoge afschattingen. Zie ook Appendix A.

2.4.4 Beperkingen middeling

De beperking van de middeling zit in de aanname dat in de bewegingsvergelijkingen de functies periodiek moeten zijn in t of ϕ . Als een oplossingskromme nabij een separatrix komt, gaat de bijbehorende periode naar ∞ . Bovendien is de oscillatie (zie ruimtemiddeling) niet meer van tijdschaal 1, maar van tijdschaal $1/\epsilon$. In een omgeving rond die separatrix mag je de middelingstheorie dan ook niet toepassen. Maar soms blijkt je toch een oplossing te kunnen middelen die door een separatrix loopt. Je moet dan wel een kleine aanpassing maken. Want van te voren is niet altijd duidelijk waar de oplossingskromme terechtkomt na een separatrix-passage. Je kunt het gedrag van de oplossingskromme uitleggen aan de hand van een kansanalyse. Hierover meer in het volgende hoofdstuk.

2.5 Actiehoek-variabelen

Het is vaak zo dat door een geschikte coördinatentransformatie, vergelijkbaar met poolcoördinaten, het systeem er veel eenvoudiger uit gaat zien. In die coördinaten is het systeem makkelijker op te lossen. Volgens de Liouville-theorie kan dit als de niveaukrommen van de Hamiltoniaan een compacte en samenhangende ruimte vormen, zie §2.5.1. Voor een Hamiltoniaan met één vrijheidsgraad betekent dit dat de niveaukrommen gesloten moeten zijn. Een speciale vorm van zo'n coördinatentransformatie is transformatie naar actie-hoek variabelen.

2.5.1 Theorie van Liouville

In een systeem kunnen, onder bepaalde voorwaarden, behouden grootheden in de tijd optreden. Bijvoorbeeld is in een Hamiltoniaans systeem de Hamiltoniaan een behouden grootheid. Zo'n behouden grootheid wordt ook wel een eerste integraal genoemd. Indien de hoeveelheid behouden grootheden even groot is als het aantal vrijheidsgraden, dan heet het systeem integreerbaar. Dit houdt in dat na een geschikte coördinatentransformatie je de oplossingen van het systeem zo op kunt schrijven. Dit alles werkt alleen als de behouden grootheden onafhankelijk van elkaar zijn en voldoen aan nog een bepaalde voorwaarde. Tijdens het transformeren krijg je vaak nog wel te maken met elliptische (of ergere) integralen. De bepaalde voorwaarde heeft te maken met het volgende begrip:

Definitie 2.3 *De Poissonhaak (F, H) van twee functies F en H is gelijk aan de afgeleide van de functie F in de richting van de faseflow van het systeem met Hamiltoniaan H (zie §2.2.1):*

$$(F, H)(x) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} F(g_H^t(x)).$$

De volgende stelling is handig bij het berekenen van die eerste integralen:

Stelling 2.1 *De Poissonhaak van twee eerste integralen F_1, F_2 van een systeem met Hamiltoniaan H is weer een eerste integraal.*

Als je een eerste integraal buiten H weet, dan kun je soms de overige met behulp van deze stelling bepalen. Nu hebben we genoeg ingrediënten voor de theorie van Liouville. Voor meer achtergrond zie [2].

Stelling 2.2 Liouville-Arnold: *Stel er is een n vrijheidsgraad systeem met Hamiltoniaan H met n eerste integralen $F_1, \dots, F_n$, waarvoor geldt $(F_i, F_j) \equiv 0, \forall i, j = 1, \dots, n$. Neem $F_1 = H$. Beschouw vervolgens de niveauverzameling van de functies F_i :*

$$M_f = \{x : F_i(x) = f_i, i = 1, \dots, n\}$$

Neem aan dat de gradiënten $D_x F_i$ onafhankelijk van elkaar zijn op M_f . Dan geldt:

1. M_f is een gladde variëteit, invariant onder de faseflow behorende bij Hamiltoniaan $H = F_1$.
2. Indien M_f compact en samenhangend is, dan is deze diffeomorf met een n -dimensionale torus:

$$T^n = \{(\phi_1, \dots, \phi_n) \bmod 2\pi\}.$$

3. De faseflow behorende bij Hamiltoniaan H beschrijft een conditioneel periodieke beweging op M_f , dat wil zeggen in hoekcoördinaten $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ geldt:

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega(f).$$

Voor het bewijs van de theorie zie [2, §49].

2.5.2 Zoeken naar een geschikte coördinatentransformatie

Harmonische oscillator

Dit alles gaan we toepassen op het volgende systeem met als Hamiltoniaan $H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2$ en bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x. \end{cases}$$

De oplossingskrommen $H(x, y) = c$ zijn cirkels. De straal is dus een behouden grootheid. Transformeren naar poolcoördinaten levert:

$$\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ \dot{\phi} = -1. \end{cases}$$

Nu is er geen sprake van volumebehoud, want:

$$dx \wedge dy \neq dr \wedge d\phi.$$

Voer nu in: $I = \frac{1}{2}r^2$ en transformeer r naar I dan geldt wel:

$$\Omega = dx \wedge dy = dI \wedge d\phi. \quad (2.9)$$

Een transformatie $(x, y) \rightarrow (I, \phi)$ die de 2-vorm Ω behoudt, heet canoniek. Het grote voordeel hiervan is dat I en ϕ voldoen aan de Hamiltongelijkheden van $H(I, \phi)$. Voor uitleg over 2-vormen zie [3], voor meer achtergrond over canonieke transformaties zie [2].

Algemener

In het algemeen heb je een systeem met Hamiltoniaan H en n vrijheidsgraden. Tevens heb je n eerste integralen $F = (F_1, \dots, F_n)$. De theorie van Liouville levert de hoek-variabelen $(\phi_1, \dots, \phi_n)$. Met deze hoek-variabelen kun je de n -dimensionale variëteit behorende bij F parametriseren. Met F erbij heb je een complete parametrisatie van je systeem. Als je de coördinatentransformatie $(x, y) \rightarrow (F, \phi)$ op de bewegingsvergelijkingen toepast, gaan ze in de nieuwe coördinaten er veel gemakkelijker uitzien:

$$\begin{cases} \dot{F}_i = 0 \\ \dot{\phi}_i = \omega_i(F). \end{cases}$$

Meestal behoudt deze transformatie de 2-vorm $\Omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$ niet. Er blijken echter functies te zijn van F , die we $I(F)$ noemen, waarbij de transformatie $(x, y) \rightarrow (I, \phi)$ wel canoniek is. De Hamiltoniaan $H = F_1$ is ook een functie van I . Nu zien de bewegingsvergelijkingen er zo uit:

$$\begin{cases} \dot{I}_i = 0 \\ \dot{\phi}_i = \omega_i(I). \end{cases}$$

Dit zijn de actiehoek-variabelen. De actie-variabelen zijn I en de hoek-variabelen ϕ , zie ook [2, §50]. In de volgende paragraaf gaan we met behulp van een algemener voorbeeld laten zien hoe je deze transformatie in de praktijk uitvoert.

2.5.3 Omzetting van bewegingsvergelijkingen van carthetische naar actiehoek-variabelen

Omzetting voor ongekoppeld systeem

Neem een Hamiltoniaans systeem met één vrijheidsgraad. Het is het bekende systeem (2.4) met Hamiltoniaan H :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \end{cases} \quad (2.10)$$

Nu zetten we de bewegingsvergelijkingen hiervan om in actiehoek-variabelen (I, ϕ) . Neem voor I de functie van het oppervlak $A(h)$ dat een niveaукromme van H insluit gedeeld door 2π . Hierin is h de waarde die de Hamiltoniaan aanneemt op die niveaукromme. Voor ϕ neem je:

$$\phi = \frac{2\pi}{T(h)} t.$$

Hierin is $T(h) = \frac{dA}{dh}$, de periode van ϕ . Dit betekent:

$$\begin{cases} I = \frac{1}{2\pi} A(h) \\ \phi = \frac{2\pi}{T(h)} t. \end{cases}$$

Zie ook [3]. Neem hierbij aan dat de afbeelding $I \rightarrow h(I)$ een diffeomorfisme is. Het heeft wel wat weg van poolcoördinaten. Immers ϕ is de hoek die een oplossingskromme doorlopen heeft op het tijdstip t . Uit I kun je afleiden op welke niveaукrommen de oplossingskromme zich kan bevinden. Pas nu de transformatie toe van (x, y) naar (I, ϕ) . Om een uitdrukking te krijgen voor (I, ϕ) zul je de integralen voor I en ϕ moeten uitrekenen. Je krijgt dan de volgende uitdrukking voor je systeem:

$$\begin{cases} \dot{I} = 0 \\ \dot{\phi} = \frac{2\pi}{T(h)} = \omega. \end{cases}$$

Zoals gebruikelijk is ω de frequentie $\omega(I) = \frac{2\pi}{T(h)}$ met $h = h(I)$. Als ongekoppeld systeem met n vrijheidsgraden neem je het systeem opgebouwd uit n componenten als (2.10).

Omzetting voor gestoord gekoppeld systeem

Nu de storing er bij. Neem H_0 voor de Hamiltoniaan van het ongestoord gekoppelde systeem. We tellen bij H_0 een functie $\epsilon H_1(x, y)$ op van orde ϵ die de systemen aan elkaar koppelt. Vergelijk §2.3.1, daar echter is er sprake van toevoeging van een langzaam variërende parameter. Van het systeem dat je nu krijgt ziet een component er zo uit:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= \frac{\partial H(x, y, \epsilon)}{\partial x_i} \\ \dot{y}_i &= -\frac{\partial H(x, y, \epsilon)}{\partial y_i} \\ \dot{\lambda} &= \epsilon. \end{aligned}$$

Het lijkt veel op het gestoorde Hamiltonsysteem (2.7). De Hamiltoniaan H is gelijk aan $H = H_0 + \epsilon H_1(x, y)$. Als coördinaten is het handig om de actiehoekvariabelen van het ongestoorde systeem te nemen. Een component van het gestoorde systeem ziet er dan als volgt uit:

$$\begin{cases} \dot{I}_i = -\epsilon \frac{\partial H_1}{\partial \phi_i}(I, \phi) \\ \dot{\phi}_i = \frac{\partial H_0}{\partial I_i}(I) + \epsilon \frac{\partial H_1}{\partial I_i}(I, \phi) \end{cases} \quad (2.11)$$

Met als Hamiltoniaan:

$$H = H_0(I_1, I_2) + \epsilon H_1(I_1, I_2, \phi_1, \phi_2).$$

Zie voor meer achtergrond [2].

Dit soort storingsproblemen gaan we algemener bekijken. In plaats van een partiële afgeleide van een Hamiltoniaan neem je een willekeurige functie. Het systeem ziet er dan als volgt uit in afgekorte schrijfwijze:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{I}} = \epsilon \mathbf{g}(\mathbf{I}, \phi) \\ \dot{\phi} = \omega(\mathbf{I}) + \epsilon \mathbf{f}(\mathbf{I}, \phi) \end{cases}$$

Met dit soort systemen werken we straks in hoofdstuk 4.

Gestoorte Harmonische oscillator

Wat betekent dit alles voor de gestoorde Harmonische oscillator: $H(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}(1+\lambda)x^2$? Omzetten in poolcoördinaten levert een Hamiltoniaan $H(r, \phi, \lambda) = \frac{1}{2}r^2(1 + \lambda \cos^2 \phi)$. Dit zijn nog geen actiehoek-variabelen, want er is geen sprake van volumebehoud. Immers $dx \wedge dy = r dr \wedge d\phi$. Als je neemt $I = \frac{1}{2}r^2$ dan is er sprake van actiehoek-variabelen. Wat echter makkelijker werkt is om als I het 2π -de deel van de oppervlakte van de niveaукromme van het bevroren systeem te nemen. Dan:

$$I = \frac{1}{2\pi} \pi \sqrt{2h} \frac{\sqrt{2h}}{1+\lambda} = \frac{h}{1+\lambda} = \frac{h}{\omega}, \text{ met } \omega = 1 + \lambda.$$

Tevens is I adiabatisch invariant, want

$$\frac{dH}{dt} = \epsilon \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \frac{\epsilon}{2} r^2 \cos^2 \phi.$$

Dit zie je in als volgt:

$$\frac{dI}{dt} = h \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\omega} \right) + \frac{1}{\omega} \frac{dh}{dt} = O(\epsilon).$$

2.5.4 Beperkingen actiehoek-variabelen

De actiehoek-variabelen zijn slechts op een beperkt gebied gedefinieerd. Volgens de theorie van Liouville alleen daar waar de energieniveaукrommen compact zijn. Als ze na het passeren van een separatrix onbegrensd worden kun je ze niet meer gebruiken. Meteen kunnen we een link leggen naar ruimtemiddeling, die werkt immers ook met hoeken. De ruimtemiddeling kun je derhalve alleen maar gebruiken in de gedeeltes van Hamiltoniaanse systemen waar je actiehoek-variabelen kunt definiëren. Daar is het gelijk aan de tijdsmiddeling.

Hoofdstuk 3

Separatrix-passage in 1-vrijheidsgraad

In dit hoofdstuk kijken we naar oplossingskrommen van gestoord stabiele Hamiltonsystemen. In het bijzonder beschouwen we een klasse gestoord stabiele Hamiltonsystemen, waarbij de separatrices een begrend gebied insluiten. Deze separatrices scheiden drie gebieden: twee binnengebieden en een buitengebied. Je ziet hoe de oplossingskrommen van het buitengebied zich gedragen als de tijd gaat lopen. Om inzicht te verkrijgen in het globale gedrag van de oplossingskrommen gaan we de Hamiltoniaan middelen. Hierbij is het nodig om de middelingstheorie enigszins aan te passen, omdat je ook op en nabij de separatrices wilt middelen. Wat een oplossingskromme doet nadat hij separatrix heeft gepasseerd, zullen we beschrijven in termen van kansen. Dit alles wordt door numerieke voorbeelden bevestigd. Tenslotte is er ruimte voor enige generalisatie.

3.1 Precisering van separatrix-passage

Stabiele Hamiltonsystemen zijn Hamiltonsystemen, waarbij de norm van alle oplossingskrommen begrensd blijft. Wanneer je deze systemen stoort met behulp van een langzaam variërende parameter $\lambda = \epsilon t$, dan spreek je over de klasse van gestoord stabiele Hamiltonsystemen. Bevriezing van λ levert een stabiel Hamiltonsysteem op.

Het faseportret van deze klasse van systemen ziet er uit als figuur 3.1. De theorie over het gedrag van oplossingskrommen hiervan is zodanig, dat het handiger en begrijpelijker werkt om deze uit te leggen aan de hand van een voorbeeldsysteem. De systemen die horen bij de klasse van gestoord stabiele Hamiltonsystemen hebben volledig analoge theorieën. De afschattingen zijn hooguit iets anders.

3.1.1 Bespreking voorbeeldsysteem

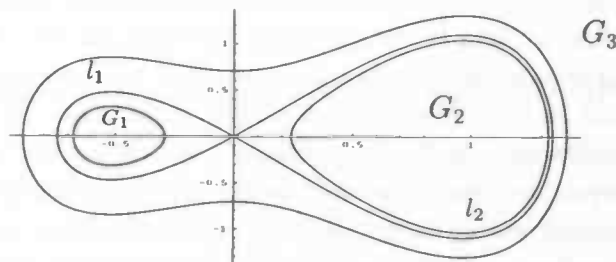
Het systeem dat we bekijken heeft als Hamiltoniaan:

$$H(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}y^2 + x^4 - (1 + \lambda)x^2 - \frac{1}{5}x^3. \quad (3.1)$$

De ongestoorde component daarvan is $H_0 = \frac{1}{2}y^2 + x^4 - x^2 - \frac{1}{5}x^3$. De bewegingsvergelijkingen die hierbij horen zijn:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2x - 4x^3 + \frac{3}{5}x^2. \end{cases} \quad (3.2)$$

En voor het bijbehorende faseportret zie figuur 3.1.

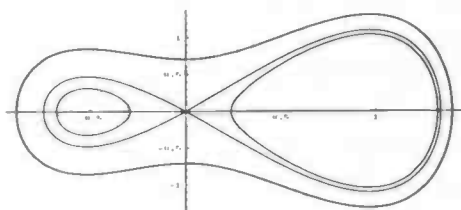


Figuur 3.1: faseportret voor $\lambda = 0$

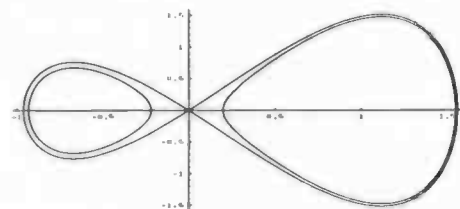
Het buitengebied noemen we G_3 , het linkergebied G_1 en het overgebleven gebied G_2 . De separatrix om gebied G_1 heet l_1 en de andere separatrix l_2 . Het faseportret is gemakkelijk op te maken uit de grafiek van de potentiaalfunctie van de Hamiltoniaan. Vergelijk hierbij §2.2.3. De potentiaalterm $-\frac{1}{5}x^3$ zorgt ervoor dat het gebied G_1 niet spiegelsymmetrisch is met gebied G_2 .

Uiteraard heeft het systeem ook een storing. We gebruiken hierbij een langzaam variërende parameter λ , met $\lambda = \epsilon t$, zie ook §2.3.1. De storingsterm die we bij de ongestoorde Hamiltoniaan tellen is $-\lambda x^2$. Zo verkrijgen we de volledige Hamiltoniaan H (3.1). Hierbij behoort het volgende systeem:

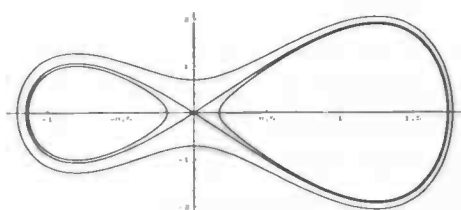
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2(1 + \lambda)x - 4x^3 + \frac{3}{5}x^2 \\ \dot{\lambda} = \epsilon. \end{cases} \quad (3.3)$$



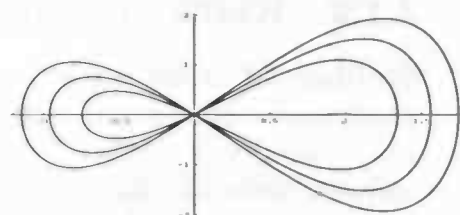
Figuur 3.2: faseportret bij $\lambda = 0$



Figuur 3.3: faseportret bij $\lambda = \frac{1}{2}$



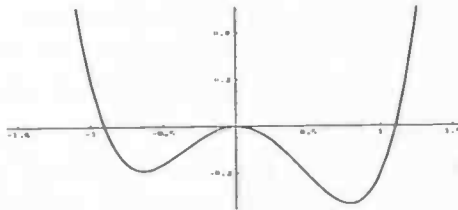
Figuur 3.4: faseportret bij $\lambda = 1$



Figuur 3.5: verwijding van de separatrices: $\lambda = 0, \frac{1}{2}, 1$

De storingsterm in de Hamiltoniaan zorgt ervoor dat de minima van $V(x)$ steeds negatiever worden en dat de snijpunten met de x -as (met uitzondering van de oorsprong) steeds verder van de oorsprong komen te liggen. Dit alles heeft tot effect dat de separatrices l_1 en l_2 uitdijen en dat de gebieden die ze insluiten steeds groter worden. Dit is ook te zien in figuur 3.5, kijk hierbij ook naar figuur 3.6. Het gedrag van het systeem is zichtbaar in de figuren 3.2 t/m 3.4. De niveaulijnen horen bij H -waarden $H = -1/16$, $H = 0$ en $H = 1/4$. Een oplossingskromme die zich eerst buiten de separatrices bevindt, kan na verloop van tijd op een separatrix terecht komen. We spreken dan van separatrix-passage.

Wil dit gebeuren dan moet de Hamiltoniaan in de tijd op de oplossingskromme afnemen. Het is nu nuttig om dit alles wiskundig preciezer te gaan bekijken.



Figuur 3.6: $V(x) = x^4 - \frac{1}{5}x^3 - x^2$

3.1.2 Karakterverandering oplossingskromme

Stelling 3.1 *Neem een willekeurig punt (x_0, y_0) in buitengebied G_3 . Een oplossingskromme die door dit punt loopt kruist op een tijdstip $T < \infty$ de separatrix l_1 of l_2 , met $0 < T \leq T_0/\epsilon$. Voor een punt in binnengebied G_1 of G_2 geldt dat de oplossingskromme daar blijft en oscilleert rond het evenwichtspunt in dat gebied. Het evenwichtspunt beweegt hierbij in de tijd van de oorsprong af.*

Bewijs: De Hamiltoniaan verandert op een oplossingskromme als volgt:

$$\frac{dH}{dt} = \epsilon \frac{\partial H}{\partial \lambda} = -\epsilon x^2. \quad (3.4)$$

1. Gedrag voor oplossingskromme in binnengebieden

Hieruit volgt meteen dat een oplossingskromme door een punt in het binnengebied G_1 of G_2 daar blijft, aangezien de afgeleide nooit groter dan nul wordt. Omdat de Hamiltoniaan steeds negatiever wordt, moet de oplossing ergens rond oscilleren aangezien G_1 en G_2 begrensd zijn. Dit kan niet anders als rond het evenwichtspunt in de desbetreffende regio. Het evenwichtspunt staat overigens niet stil. Doordat de minima van de potentiaal steeds lager worden, is de Hamiltoniaan in de evenwichtspunten ook dalende. Vanwege de verwijding van de separatries gaat het evenwichtspunt automatisch mee in het gedrag en dus bewegen ze langzaam van de oorsprong af.

2. Gedrag voor oplossingskromme in buitengebied

Voor een oplossingskromme door een punt in het buitengebied G_3 zien we dat $\frac{\partial H}{\partial \lambda} < 0$ is behalve op de y -as, daar $\frac{\partial H}{\partial \lambda} = 0$. Aangezien $\dot{x} = y$, kan een oplossing de y -as niet raken. De uitzondering op de regel vormt de triviale oplossing $x(t) = 0$, $y(t) = 0$. Op de y -as geldt bovendien ook nog eens $\dot{y} = 0$ zodat alle oplossingskrommen de y -as loodrecht snijden. Dit geldt ook voor de x -as. Dit haal je uit de bewegingsvergelijkingen (3.3) en uit (3.4).

Als we poolcoördinaten invoeren, dan zie je in het faseportret dat de afgeleide van de hoek in de tijd niet nul is. Daardoor loopt een oplossingskromme in G_3 steeds rond de rand van G_3 . De oplossing doorloopt een aantal keren een volledige hoek van 360 graden, alvorens hij een separatrix snijdt. Dit aantal kan ook nul zijn. Dit is afhankelijk van het beginpunt.

3. Tijdstip van separatrix-passage

Tijdens zo'n rondgang geldt er voor een tijdsinterval: $\frac{1}{2} \leq |x| \leq a_0$, $a_0 > \frac{4}{5}$. Dit is gemakkelijk af te leiden uit het faseportret. De a_0 is de x -coördinaat van het snijpunt met de x -as van de oplossingskromme. De oplossing zit dan immers nog buiten de separatrix. Noem ΔH de afname van de Hamiltoniaan in de tijd. Er geldt dan volgens (3.4) voor ΔH :

$$\Delta H > \epsilon \left(\frac{1}{2}\right)^2 t_1 = \frac{1}{4} t_1 \epsilon,$$

waarbij t_1 de tijdsduur van de eerste rondgang is. Dan gaat de oplossing door de y -as en komt het weer terug in de $\frac{1}{2} \leq x \leq a_0$, $a_0 > \frac{4}{5}$ -zone. Tussentijds is $\Delta H \geq 0$. Voor ΔH na n rondgangen geldt:

$$\Delta H > \frac{n}{4} \sum_{i=1}^n t_i \epsilon.$$

Aangezien steeds geldt $t_i > 0$, wordt op een gegeven moment $\Delta H > H_0$. De oplossing is dan tussentijds de separatrix gepasseerd. Op moment van passage geldt: $H = 0$. Indien de t_1 bijdrage al voldoende is om $\Delta H > H_0$ te krijgen zal de oplossing niet meer een gehele rondgang nodig hebben, maar nog slechts een klein stukje. Neem $T = t_{nl_i} + \sum_{i=1}^{n-1} t_i$. Constante t_{nl_i} is de tijd die de oplossing zich tijdens de n -de rondgang nog buiten de separatrix bevindt. Dan geldt het gestelde: $T < \infty$ en T is van orde $1/\epsilon$. Na de separatrix-passage gaat de oplossing in G_1 of G_2 oscilleren rond het evenwichtspunt aldaar, zoals bepaald. $\square$

3.1.3 Wat er precies gebeurt

Stel een oplossingskromme bevindt zich in G_3 , dus buiten de separatrix. In het gestoorde systeem (3.3) is de Hamiltoniaan H dalende in de tijd. Beschouw nu

het systeem op een bevroren tijdstip. Dit levert een ongestoord systeem, waar H wel constant is. Zo kun je over het karakter van een oplossing spreken.

Kijk nu naar het gestoorde systeem veranderend in de tijd. Op een gegeven moment geldt $H = 0$, dus dat de oplossing op de separatrix is. Vanwege de storingsterm $-\epsilon x^2$ ligt de oplossing verder in de tijd voorbij de separatrix. Dit komt, omdat de separatrixverwijding sneller gaat dan de variatie van de oplossing. Je zou kunnen zeggen dat de separatrix zich naar de oplossing verplaatst. In welk binnengebied de oplossing terecht komt, is willekeurig. Dit komt, omdat vlak voor het moment van separatrix-passage de oplossing zich zowel in de ϵ -omgeving van l_1 als l_2 bevindt. Het begrip kans is voor beschrijving hiervan essentieel. Bedenk hierbij dat er alleen echte willekeurigheid is voor de limiet $\epsilon \rightarrow 0$.

Je kunt je dit alles nog het beste als volgt voorstellen. Neem het punt (x, y) en kijk naar de fasekromme die daar bij hoort voor de desbetreffende λ die je dan bevest. Laat de tijd lopen. De separatrix gaat steeds dichterbij het punt (x, y) liggen. Dan ligt de separatrix er voorbij en de fasekrommen die vanaf nu door (x, y) lopen, zijn compleet anders van karakter.

3.2 Kansberekening

We zullen vanaf nu uitgaan dat de oplossingskromme in buitengebied G_3 begint. Bij het bekijken van een oplossingskromme zie je dat deze uiteindelijk in een binnengebied terecht komt. Dan is de oplossing "gevangen" in dat gebied. De waarde van λ op het moment van separatrix-passage noemen we λ_s . Het is handig om het begrip "gevangen zijn in" wiskundig te omschrijven:

Definitie 3.1 *Gevangen zijn in G_i wil zeggen: Na het tijdstip $\lambda = \lambda_s$ van separatrix-passage bevindt de oplossing zich nog minstens $t = \frac{1}{\epsilon}$ in G_i , dat wil zeggen voor parameterwaarde $\lambda = \lambda_s + 1$.*

Neem een beginwaarde $B = (x_0, y_0)$ van een oplossingskromme, dus ook met $\lambda = 0$. We willen een waarschijnlijkheid aangeven dat de oplossingskromme gevangen wordt in gebied G_i met $i = 1$ of $i = 2$. Neem een δ omgeving U om het beginpunt B .

Definitie 3.2 *De kans om gevangen te worden in regio G_i is:*

$$Q(B) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\text{oppervlakte } U_i}{\text{oppervlakte } U}$$

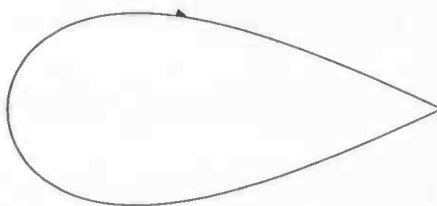
Een equivalente definitie $P(\lambda)$, die handiger blijkt te zijn, is de volgende:

Definitie 3.3

$$P(\lambda) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I_i}{I_1 + I_2},$$

$$\text{waarbij } I_i = - \oint_{l_i} \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} \right) dt.$$

Zie ook figuur 3.7. Het minteken is omdat de separatrix negatief georiënteerd is. l_i is separatrix l_i op het tijdstip $\lambda = \lambda_0$. Zoals we al gezien hebben in §2.7 geldt $\frac{dH}{dt} = \epsilon \frac{\partial H}{\partial \lambda}$. Maar dan is I_i gelijk aan de totale flux door l_i op $\lambda = \lambda_0$. Dit is natuurlijk bewust zo gekozen. Bereken je $P(\lambda_s)$, dan is I_i gelijk aan de totale flux door l_i op het tijdstip van separatrix-passage. $P(\lambda_s)$ is dus de verhouding van de flux door separatrix l_1 tot de flux door alle separatrices (l_1 en l_2).



Figuur 3.7: Integratiecontour van I_i

Intuitief is wel aan te voelen dat dit equivalent is met $Q(B)$. Immers van alle oplossingskrommen in G_3 die op $\lambda = \lambda_s$ de separatrix passeren, bevindt zich slechts een verzameling van de maat I_1 op dat moment op l_1 . De rest, een verzameling met maat I_2 , zit op l_2 . De kans dat oplossingskromme met separatrixpassagemoment $\lambda = \lambda_s$ in G_1 komt is precies $P(\lambda_s)$. Aangezien $Q(B)$ precies hetzelfde behoort te definiëren, moet hij dus wel equivalent zijn aan $P(\lambda_s)$. Nu wiskundig deze stelling nog hardmaken:

Stelling 3.2 $P(\lambda)$ is equivalent met $Q(B)$ als je P uitrekent voor de waarde die λ aanneemt op de separatrix-passage van een oplossingskromme beginnend in B , dus $Q(B) \equiv P(\lambda_s)$

Om deze stelling te bewijzen is het nodig om nog een ander begrip van kans in te voeren en wel het volgende:

Definitie 3.4

$$R(\lambda) = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta V_i}{\Delta V}.$$

Dit is de kans gedefinieerd in termen van faseoppervlakte. ΔV is de totale toename van de oppervlakte van G_1 en G_2 samen in het interval $[\lambda, \lambda + \Delta\lambda]$. ΔV_i het deel van de punten van die toename die gevangen worden in binnengebied G_i . Deze punten zaten voor die toename nog in buitengebied G_3 . In het ongestoorde geval $\lambda = \text{constant}$ is deze toename uiteraard nul. Er geldt voor $R(\lambda_s)$:

Lemma 3.2.1 $R(\lambda_s) \equiv P(\lambda_s)$.

Bewijs lemma: De stelling van Stokes luidt:

$$\int_{\partial c} \omega = \int_c d\omega.$$

Stokes toepassen op I_i met $\omega = Hdt$ levert:

$$-\frac{\partial}{\partial \lambda} \oint_{I_i} Hdt = \frac{\partial}{\partial \lambda} \iint dHdt.$$

Het verdwijnen van het minteken komt doordat de integraal over de separatrix negatief georiënteerd is. De integraal over het omsloten oppervlak is echter positief georiënteerd en dit scheelt een minteken. Noem $S_i(\lambda) = \text{maat } G_i$ ($i = 1, 2$), dan geldt wegens het voorafgaande: $I_i = \frac{\partial S_i}{\partial \lambda}$. Dan kunnen we afleiden:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Delta V_i = S_i(\lambda_s + \Delta\lambda) - S_i(\lambda_s),$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Delta V = \sum_{i=1}^2 S_i(\lambda_s + \Delta\lambda) - S_i(\lambda_s) \Rightarrow$$

$$R(\lambda_s) = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{S_i(\lambda_s + \Delta\lambda) - S_i(\lambda_s)}{\sum_{i=1}^2 S_i(\lambda_s + \Delta\lambda) - S_i(\lambda_s)} =$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{dS_i/d\lambda}{dS_1/d\lambda + dS_2/d\lambda} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{I_1}{I_1 + I_2} = P(\lambda_s). \quad \square$$

Deel van bewijs stelling 3.2: Het is voldoende om aan te tonen dat $Q(B) \equiv R(\lambda_s)$. Dan is de stelling bewezen, omdat daadwerkelijk dan geldt $Q(B) \equiv R(\lambda_s) \equiv P(\lambda_s)$. Om dat te doen, moet je het karakter van alle oplossingskrommen kennen die beginnen in een δ -omgeving van B (zie de definitie van $Q(B)$). De manier om dat te doen is om het gedrag van de Hamiltoniaan van oplossingskrommen te benaderen. Het sleutelwoord is hierbij middeling. Voor de rest van het bewijs: zie de volgende paragraaf. $\square$

3.3 Benadering Hamiltoniaan oplossingskromme

Bekijk een oplossing van het systeem beginnend in het buitengebied G_3 met als Hamiltoniaan H . Gewenst is een benadering die een afschatting van het verloop van H oplevert. Deze afschatting moet zo in elkaar zitten dat de benadering gelijk is aan het daadwerkelijke verloop van H als $\epsilon \rightarrow 0$.

Als benadering van H gebruiken we tijdmiddeling. Wanneer een oplossing zich op een afstand van een separatrix bevindt kun je deze benaderen met behulp van de gebruikelijke middelingstheorie (zie §2.4.2) door de functie $h_3(\lambda)$. Dit levert de afschatting:

$$|H(x, y, \lambda) - h_3(\lambda)| < k_2\epsilon, \text{ zolang } h_3(\lambda) > k_1. \quad (3.5)$$

Zo kun je ook voor een oplossingskromme in een binnengebied de middelingstheorie toepassen, als deze kromme zich maar steeds voldoende ver van de separatrices zich bevindt. Die levert de functies $h_1(\lambda)$ en $h_2(\lambda)$ met dezelfde afschatting (3.5). De afgeleiden $\frac{dh_i}{d\lambda}$ voldoen aan de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{dh_i}{d\lambda} = \frac{1}{T(\lambda)} \oint \frac{\partial H}{\partial \lambda} dt.$$

De integraal bereken je als in §2.4.2. Voor $h_3(\lambda)$ geldt de eis $h_3(\lambda_0) = H(x_0, y_0, \lambda_0)$, met λ_0 de beginwaarde van λ .

De oplossing die wij bekijken gaat door de separatrix heen. Daar kun je deze middelingstheorie dus niet op toepassen. Als we enige aanpassingen maken op de theorie dan blijken we met middelen toch een goede benadering te hebben. Als je namelijk weet in welk gebied de oplossingskromme terecht komt, mag je $h_3(\lambda)$ gebruiken tot aan de separatrix-passage van de benaderende oplossingskromme. Vanaf de separatrix-passage mag je de desbetreffende $h_i(\lambda)$ gebruiken, met beginwaarde $h_i(\Lambda) = 0$. Noem deze samengestelde functie $h(\lambda)$. Om het punt $h(\lambda_s)$ goed te definiëren stellen we daar $\frac{dh}{d\lambda} = 0$. De functie $h(\lambda)$ is nu continu, maar niet overal differentieerbaar. De benaderingsfout met $H(x, y, \lambda)$ gaat naar 0 voor $\epsilon \rightarrow 0$. Dit alles is samen te vatten in de volgende stelling:

Stelling 3.3 1) Voor een oplossing die begint in G_3 , met $h_3(\Lambda) = 0$ en eindigt in G_1 of G_2 , beschrijft de formule

$$h(\lambda) = \begin{cases} h_3(\lambda), & \lambda \leq \Lambda \\ h_i(\lambda), & \lambda > \Lambda \end{cases}$$

de variatie van H met een fout van orde $\epsilon |\ln \epsilon|$ voor t van orde $1/\epsilon$.

2) De kans dat de oplossing in G_1 komt is: $P(\Lambda) = I_1(\Lambda)/(I_1(\Lambda) + I_2(\Lambda))$. Om in G_2 te komen, is de kans $1 - P(\Lambda)$.

Bewijs 1) en 2): Zie bijlage B. $\square$

3.4 Numerieke bevestiging

Nu is het leuk te kijken of onze theorie klopt voor ons voorbeeldsysteem (3.3). Dit gaat numeriek gebeuren. Besef dat het geen bewijs is voor de theorie, hooguit een bevestiging. Het is handig om het programma Mathematica hiervoor te gebruiken, omdat je hier de oplossingskrommen mooi kunt volgen even als het gedrag van de Hamiltoniaan. De limiet $\epsilon \rightarrow 0$ is numeriek niet haalbaar, maar als we $\epsilon = 1/1000$ nemen, is dat een stap in de goede richting. Hierbij geldt: $\lambda = 1/1000t$. Het systeem (3.3) stop je in Mathematica door het volgende commando:

```
NDSolve[{x'[t]==y[t],y'[t]==2(1+1/1000t)x[t]  
+3/5x[t]^2-4x[t]^3,x[0]==0,y[0]==0.2},  
{x[t],y[t]},{t,0,125},MaxSteps->2000]
```

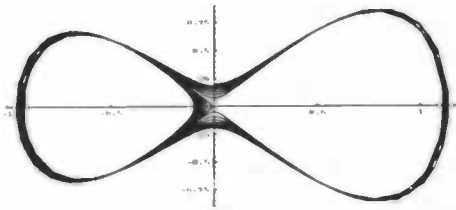
De beginwaarde van de oplossing is zodanig gekozen dat de oplossing vrij dicht bij de separatrix begint. Zo kun je in een redelijk korte tijd ($t = 0$ tot $t = 125$) het gedrag goed bepalen. Zie figuur 3.8 voor het resultaat. Duidelijk is te zien dat het gedrag na de separatrixcrossing van de oplossing volledig anders is als het gedrag ervoor. Nemen we de oplossing wat verder in de tijd, dan zie je dat de oplossing inderdaad blijft cirkelen rond het evenwichtspunt. Zie figuur 3.10, hier is voor de duidelijkheid $\epsilon = 1/100$ genomen in plaats van $\epsilon = 1/1000$. De tijd loopt hier van $t = 5$ naar $t = 100$. Dit bevestigt stelling (3.1) daarover.

3.4.1 Bevestiging begrip kans

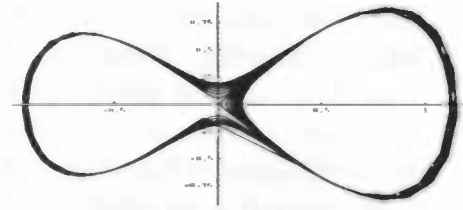
Vervolgens laat figuur 3.9 het gedrag van een oplossing zien met in plaats van $bg_1 = (0, .2)$ de beginwaarde $bg_2 = (0, -.2)$. De oplossingskromme komt na een halve rondgang orde ϵ nabij bg_1 . Dit punt ligt maar orde ϵ bij bg_1 vandaan. Toch zie je dat de oplossingskromme in een andere binnengebied eindigt als de oplossingskromme door bg_1 . Dit bevestigt het willekeurige karakter van het gevangen worden in een gebied als je kijkt naar begincondities. Als je de limiet neemt van $\epsilon \rightarrow 0$, is er sprake van toeval.

3.4.2 Bevestiging mogelijkheid tijdmiddeling

Figuur 3.11 van de gestoorde Hamiltoniaan H laat zien dat je deze gerust mag middelen in de tijd met functie $h(\lambda)$. Je ziet dat de seculiere storing, de storing ten opzichte van de haast lineaire afname, van orde $\epsilon = 1/1000$ is. Het verloop van H in de tijd is afgebeeld voor de twee oplossingskrommen met de beginwaarden bg_1 en bg_2 . Voor het moment van separatrixpassage is H van beide oplossingskrommen nagenoeg gelijk. Daarna lopen ze ver uit een. Vergelijk ook figuur 3.12, waar $x(t)$ tegen de tijd is geplot voor een oplossingskromme met bg_1 als beginwaarde. Op het moment dat $H = 0$, is ook de separatrix-passage. Op dat tijdstip verandert

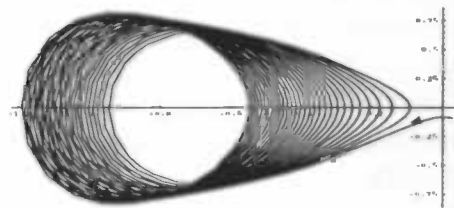


Figuur 3.8: *oplossingskromme met beginwaarde $bg_1 = (0, .2)$*



Figuur 3.9: *oplossingskromme met beginwaarde $bg_2 = (0, -.2)$*

het gedrag van $x(t)$ drastisch, waarbij de x nooit meer nul wordt. De helling van H na dit tijdstip is afhankelijk van de oppervlakte van het binnengebied. Dit zie je, omdat je een niet symmetrische potentiaalfunctie hebt gekozen.



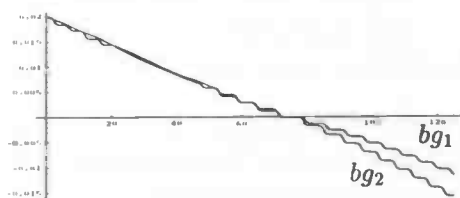
Figuur 3.10: *Oplossingskromme met beginwaarde $(0, .2)$ verder in tijd*

3.4.3 Beperking en kracht middeling

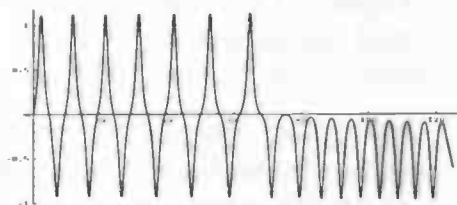
De beperking van middeling is dat de berekeningen groot zijn en niet analytisch. Je moet ze dus numeriek benaderen, maar als de fout daarin van orde ϵ^2 of kleiner is, dan is dat geen probleem. Nog een beperking is dat om de Hamiltoniaansverandering $h(\lambda)$ te berekenen van een oplossingskromme heb je die oplossingskromme zelf nodig.

De kracht van de middeling is, dat als je $h(\lambda)$ eenmaal hebt, je daarmee het gedrag

van meer oplossingskrommen kunt bepalen. Neem de oplossingskromme die loopt door het punt (x_0, y_0) voor $\lambda = \lambda_0$, met $h_{(x_0, y_0)}(\lambda)$ de bijbehorende Hamiltoniaansverandering. Neem γ voor de niveaукromme $H(\lambda_0)$ in het bevroren systeem voor $\lambda = \lambda_0$, dan geldt: $h_\gamma(\lambda) = h_{(x_0, y_0)}(\lambda)$. Met andere woorden $h_{(x_0, y_0)}(\lambda)$ is gelijk aan de Hamiltoniaansverandering voor alle oplossingskrommen die door de niveaукromme γ lopen voor $\lambda = \lambda_0$. En aangezien je het gedrag van een oplossingskromme op elk tijdstip kunt benaderen met een periodieke oplossingskromme als je waarde van H voor dat tijdstip weet, heb je het gedrag van deze oplossingskrommen bepaald. Dit alles geldt ook voor een omgeving U_δ van γ in het (x, y, λ_0) -vlak mits $\delta \ll \epsilon$.



Figuur 3.11: H -verandering op oplossingskrommen met beginwaarden $(0, .2)$ en $(0, -.2)$



Figuur 3.12: $x(t)$ -waarden van oplossingskromme met beginwaarde $(0, .2)$

3.5 Gedrag oplossingskrommen bij equivalente systemen

Tot nu toe hebben we steeds naar een systeem gekeken met potentiaal $V(x) = x^4 - \frac{1}{5}x^3 - x^2$ en als storing van H de term $-\lambda x^2$. De potentiaal heeft twee minima en een maximum in de oorsprong. Systemen met een potentiaal met dezelfde kenmerken zijn volledig equivalent qua karakter.

Het is handig om in deze systemen de Hamiltoniaan F zo te transleren dat deze op de separatrix nul wordt. Het werkt als volgt: neem het zadelpunt z waar de separatrices in uitkomen. Bepaal $F(z)$, waarbij je kijkt naar het bevroren systeem. Dit is gelijk aan de F -waarde op de separatrices. Neem voor H :

$$H = F(x, y, \lambda) - F(x_z, y_z, \lambda).$$

De oplossingskromme passeert nu precies op waarde $H = 0$ de separatrix. Wanneer de F al nul is op de separatrices, zoals in ons voorbeeldsysteem, dan hoeft je uiteraard niet te transformeren. Voor een ander soort systemen dat hieraan equivalent blijkt te zijn zie [6]. De benaderingsfout is nu van orde $\epsilon \ln \epsilon$.

Bij het kijken naar equivalente systemen is het is wel handig deze zo te kiezen dat de binnengebieden niet van gelijke oppervlakte zijn, omdat je anders niet aan de Hamiltoniaansverandering op een oplossingskromme kunt zien in welk binnengebied deze gevangen wordt. Zorg er tevens voor dat de integraal I_i die de totale flux op een separatrix berekent positief is. Anders heb je geen separatrix-passage wanneer je oplossing zich in het buitengebied bevindt. Je kunt dan voorafgaande theorie niet daarop toepassen. Wat wel gebeurt, is interessant voor nader onderzoek.

Voor een potentiaal met meer maxima en minima heeft de functie $h(\lambda)$ meer componenten voor na de separatrix passage. Het karakter van de functie en de eigenschappen daarvan zijn hetzelfde als in ons voorbeeldsysteem. Zorg er echter wel voor dat $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$.

Als je een stabiel gestoord systeem terug in de tijd gaat beschouwen dan verkrijg je het systeem met de vreemde eigenschap dat twee ver van elkaar liggende punten (in twee afzonderlijke binnengebieden) opeens heel dicht (orde ϵ) bij elkaar komen te liggen. Zie figuur 3.11, maar dan terug in de tijd. Nu heeft benaderingsfunctie van de Hamiltoniaan $h(\lambda)$ nog maar een component voor na de separatrix-passage. De benaderingsformules blijven echter hetzelfde als voorheen.

3.5.1 Effect van wrijving of expansie

Tot nu toe hebben we stabiele gestoorde systemen beschouwd zonder wrijving. Natuurlijk kun je ook wrijving inbouwen en daarmee een dissipatief stabiel gestoord systeem maken. Deze wrijving zal het tijdstip van separatrix passage alleen maar bespoedigen. De beschreven fenomenen voor een stabiel gestoord systeem zonder wrijving vinden dus ook plaats als er wrijving in het spel is, wel is er enig verschil in de uitdrukkingen voor kans.

Het tegenovergestelde van wrijving kun je ook inbouwen. Dan moet je een dissipatief stabiel gestoord systeem met omgekeerde tijd nemen.

3.6 Separatrix-passage bij algemenere systemen

Het is niet nodig om een storing te beperken tot een 1-dimensionale parameter λ . Deze parameter kun je bijvoorbeeld m -dimensionaal maken. Vervolgens kun

je rechtstreeks in de bewegingsvergelijkingen storingen aanleggen. In het algemeen is het bevroren systeem voor $\lambda = \text{constant}$ dan niet meer Hamiltoniaans. De bewegingsvergelijkingen voor een algemener gestoord systeem zien er als volgt uit:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{\partial H}{\partial y}(x, y, \lambda) + \epsilon f(x, y, \lambda, \epsilon) \\ \dot{y} &= \frac{\partial H}{\partial x}(x, y, \lambda) + \epsilon g(x, y, \lambda, \epsilon) \\ \dot{\lambda} &= \epsilon k(x, y, \lambda, \epsilon), \\ 0 < \epsilon \ll 1, (x, y) \in R^2, \lambda \in R^m.\end{aligned}\tag{3.6}$$

De afgeleiden naar x en y hebben nu ook een storing. Bovendien is λ zelf algemener. In plaats van $\dot{\lambda} = \epsilon$ is er nu de functie k bijgekomen.

3.6.1 Algemene uitdrukking verandering Hamiltoniaan

Neem aan dat het systeem zonder de rechtstreekse storingen in de bewegingsvergelijkingen een stabiel gestoord Hamiltoniaans systeem is. De waarden van H (noem ze h) veranderen onder invloed van de storing. Deze verandering kun je nog steeds door een functie $h(\lambda)$ benaderen, dankzij de genomen aannames. De functie verkrijg je weer door tijdmiddeling. De verandering van H in de tijd is gelijk aan:

$$\dot{h} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \oint \dot{h}|_{\epsilon=0} dt.$$

De integraal neem je over de niveaукromme $H = h$ van het bevroren systeem behorende bij $\lambda = \text{constant}$. Neem verder $\epsilon = 0$. Zo beperk je de storing tot de langzaam variërende parameter λ en neem je de overige storing gelijk aan nul. De integraalterm is de afgeleide van H naar de tijd van het gestoorde systeem voor $\epsilon = 0$. Beschouw λ hierbij als een bevroren parameter. Volgens middelings-theorie ligt de oplossing van deze differentiaalvergelijking in orde ϵ nabij de echte verandering van H liggen. Zie bijlage A. Voor de uitdrukking onder het integraalteken geldt het volgende:

$$\begin{aligned}\dot{h}|_{\epsilon=0} &= \frac{\partial}{\partial t} H(x, y, \lambda)|_{\epsilon=0} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \dot{\lambda} = \\ &= \frac{\partial H}{\partial x} \left(-\frac{\partial H}{\partial y} + \epsilon f|_{\epsilon=0} \right) + \frac{\partial H}{\partial y} \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \epsilon g|_{\epsilon=0} \right) + \frac{\partial H}{\partial \lambda} \epsilon k|_{\epsilon=0} = \\ &= \epsilon \left(\frac{\partial H}{\partial x} f|_{\epsilon=0} + \frac{\partial H}{\partial y} g|_{\epsilon=0} + \frac{\partial H}{\partial \lambda} k|_{\epsilon=0} \right) = \epsilon (\nabla H \cdot (f, g, k)(x, y, \lambda, 0)).\end{aligned}$$

Dus dit gegeven geldt voor $\dot{h}$:

$$\dot{h} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\epsilon}{T} \oint \nabla H \cdot (f, g, k)(x, y, \lambda, 0) dt$$

Het blijkt straks handig te zijn om in plaats van de afgeleide naar de tijd, de afgeleide naar λ te nemen:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial h}{\partial \lambda} \Rightarrow \frac{\partial h}{\partial \lambda} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \oint \nabla H \cdot (f, g, k)(x, y, \lambda, 0) dt.$$

Voor meer informatie zie bijvoorbeeld [9].

3.6.2 Voordelen 1-dimensionale storingsparameter

Het soort systemen waar we hiervoor over hebben gesproken, is een speciaal geval van deze systemen. Namelijk systeem (3.6) met daarin ingevuld $f = g = 0$ en $k = m = 1$. Zo kun je goed de bijdrage van λ in het systeem aanschouwen, daar nu de storing uitsluitend van λ afhangt en bovendien op een duidelijke manier, want $\dot{\lambda} = \epsilon$. In het algemene geval is $h(\lambda)$ veel moeilijker te interpreteren vanwege de meerdimensionaliteit van λ en de ingewikkeldere afgeleide. De keuze om eerst de dimensie van λ te beperken tot 1 en $\dot{\lambda}$ constant te houden, is dus didactisch gezien juist geweest.

3.7 Een gekoppeld numeriek dubbelsysteem

We hebben hiervoor steeds naar een ongestoord systeem van één vrijheidsgraad gekeken dat verstoord werd door een 1-dimensionale parameter. Toen hebben we enige generalisatie toegepast op de storing, maar nog steeds had het ongestoorde systeem maar één vrijheidsgraad. In het algemene geval is het niet nodig om je daartoe te beperken.

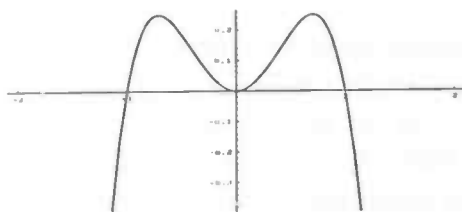
Laten we eens naar een gestoord systeem van twee vrijheidsgraden kijken, door de storing wordt het aantal vrijheidsgraden $2\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = y_1 \\ \dot{y}_1 = -2x_1 + 4x_1^3 + \lambda(-x_1 + x_2) \\ \dot{x}_2 = y_2 \\ \dot{y}_2 = -2x_2 + 4x_2^3 - \lambda(-x_1 + x_2) \\ \dot{\lambda} = \epsilon. \end{cases}$$

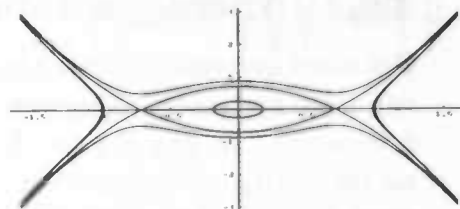
Dit systeem is opgebouwd uit twee systemen die in het ongestoorde geval ongekoppeld zijn. Voor algemenere systemen zie het volgende hoofdstuk. De 1-dimensionale parameter λ met $\lambda(t) = \epsilon t$ zorgt voor inbreng van koppeling. De ongestoorde faseruimte is 4-dimensionaal. De separatrices vormen daarin een 2-dimensionaal oppervlak dat een soort ellipsoïde is. De storing maakt het probleem 5-dimensionaal.

Het gedrag van het systeem kun je weer bekijken door het systeem op een gewenste λ -waarde te bevriezen. Voor een goed beeld daarvan beschouw je de projecties

van de niveaukrommen van H op de fasevlakken (x_1, y_1) en (x_2, y_2) . De geprojecteerde separatrices vormen nu een gesloten kromme. Een van de fasevlakken (met $\lambda = 0$) zie je in figuur 3.14. Weergegeven zijn de niveaukrommen $H = 0$ (door $(-1,0)$ en $(1,0)$), $H = \frac{1}{4}$ (de separatrix), $H = \frac{3}{8}$ en $H = \frac{1}{32}$. Er geldt $H > 0$ buiten de niveaukromme $H = 0$. Tussen de separatrix en deze kromme is $H < 0$ en binnen de separatrix geldt weer $H > 0$. Het gebied binnen de separatrices is



Figuur 3.13: $V(x) = x^2 - x^4$



Figuur 3.14: faseportret bij $H = \frac{1}{2}y^2 + x^2 - x^4$

stabiël en het gebied er buiten instabiël. Je kunt alleen goed middeling toepassen in het stabiele gebied. Bovendien gaat een oplossing in het instabiele deel zo snel naar ∞ , dat je het gedrag ook zonder middeling wel kunt zien.

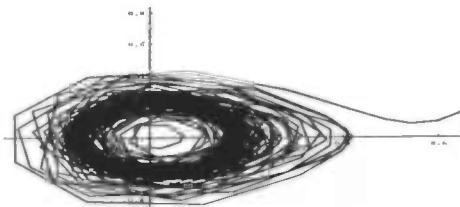
We nemen een oplossing in het stabiele gedeelte redelijk dicht bij het separatrixoppervlak. Op een gegeven moment raakt de oplossing buiten dat oppervlak en snellen beide componenten naar oneindig. Laten we eens de oplossingkromme in Mathematica numeriek bepalen:

```
NDSolve[{x1'[t]==y1[t], y1'[t]==-2x1[t]+4x1[t]^3
+(1/1000) t(-x1[t]+x2[t])^2, x2'[t]==y2[t],
y2'[t]==-2x2[t]+4x2[t]^3-(1/1000)t(-x1[t]+x2[t])^2,
x1[0]==0.1, y1[0]==0.2, x2[0]==0.3, y2[0]==0.4}, {x1[t], y1[t],
x2[t], y2[t]}, {t, 0, 1000}, MaxSteps->20000]
```

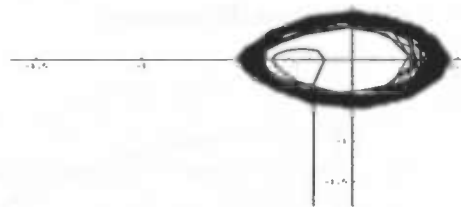
Als storingsparameter nemen we k die van $k = 0$ langzaam ($o(\frac{1}{1000}t)$) naar $k = 1$ gaat. Het beginpunt is $(0.1, 0.2, 0.3, 0.4)$. De Hamiltoniaan die er bij hoort is de volgende:

$$H(x_1, y_1, x_2, y_2, t) = \frac{1}{2}y_1^2 + x_1^2 - x_1^4 + \frac{1}{2}y_2^2 + x_2^2 - x_2^4 + \frac{t}{3000}(x_2 - x_1)^3.$$

De oplossing ziet er uit in het fasevlak van de eerste component als figuur 3.15. En in het fasevlak van de tweede component als figuur 3.16.



Figuur 3.15: *component oplossingskromme in (x_1, y_1) -vlak*



Figuur 3.16: *component oplossingskromme in (x_2, y_2) -vlak*

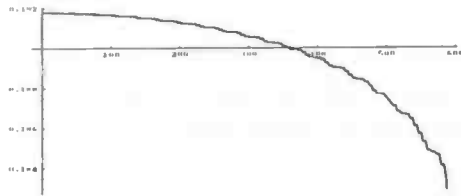
De tijd is genomen van $t = 0$ naar $t = 587$. Deze tijdsduur is lang vergeleken met de tijdsduur van een volledige omwenteling (in orde van $t = 5$). Het plotselinge en willekeurige karakter van de verandering van de oplossing na de separatrix-passage valt meteen op.

Voor deze systemen bestaat ook een tijdsmiddelingtheorie. Ook hier valt de Hamiltoniaansverandering te benaderen door een 1-dimensionale functie $h(\lambda)$. Kijk naar de Hamiltoniaansverandering in de tijd in figuur 3.17. De tijd varieert van $t = 0$ naar $t = 587$. Je ziet dat je gerust mag middelen. Het figuur laat namelijk een kromme zien met een zeer kleine storingsband.

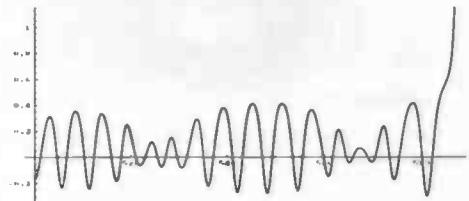
In figuur 3.18 staat de verandering van de x -coördinaat van de eerste component van de oplossingskromme en in figuur 3.19 de verandering van de x -coördinaat van de tweede. Voor de duidelijkheid is in plaats van beginwaarde $t = 0$ de waarde $t = 500$ genomen. Voor het tijdstip $t = 500$ is de oplossing aan het oscilleren.

Vergelijk het tijdstip $t = 587$ van separatrix-passage met de waarde van Hamiltoniaan op dat tijdstip. Daar kun je niets aan afleiden, omdat de waarde van de Hamiltoniaan niet constant blijft op de separatrix. Dit hangt samen met de vorm van de potentiaal. Om toch te begrijpen wat er gebeurt, kun je naar de projectie van de potentiaal kijken op het vlak $x_2 = -0.15$. Het punt van separatrix-passage is namelijk $(x_1, x_2) = (0.6, -0.15)$. Dit haal je uit figuur 3.18 en figuur 3.19. In dat punt is de potentiaal ongeveer 0.17. Kijk nu naar figuur 3.20 die de geprojecteerde potentiaal $V_p = x_1^2 - x_1^4 + (-0.15)^2 - (-0.15)^4 + \frac{587}{3000}(-0.15 - x_1)^3$ op het moment van separatrix-passage weergeeft. De lijn geeft het niveau aan waarop de oplossingskromme naar rechts kan. Dit niveau is precies 0.17. De oplossing van de eerste component kan op het moment van separatrix-passage voor het eerst oneindig ver naar rechts lopen in de grafiek. Dit begint precies bij

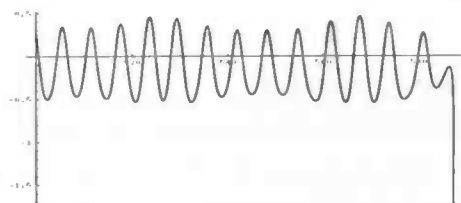
het maximum van de geprojecteerde potentiaal voor $x_1 = 0.6$, de x_1 -coördinaat van separatrix-passage.



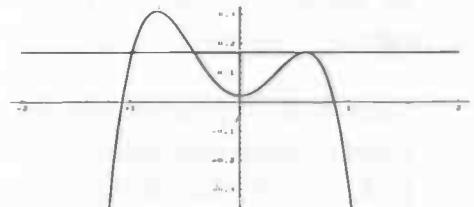
Figuur 3.17: *totale verandering H voor $0 \leq t \leq 587$*



Figuur 3.18: *x_1 tegen de tijd voor $500 \leq t \leq 587$*



Figuur 3.19: *x_2 tegen de tijd voor $500 \leq t \leq 587$*



Figuur 3.20: *geprojecteerde potentiaal V_p in vlak $x_2 = -0.15$ tegen x_1*

Hoofdstuk 4

Uitbreiding naar twee invarianten

Tot nu toe hebben we alleen maar naar stabiel gestoorde systemen gekeken met één adiabatisch invariante grootheid, de Hamiltoniaan. Dit kan algemener en vanaf nu beschouwen we systemen met twee adiabatische invarianten, waarvan één de Hamiltoniaan is. Met behulp van actiehoek-variabelen van het inleidende hoofdstuk gaan we deze systemen bekijken. De verschijnselen in het vorige hoofdstuk, hingen samen met separatrices. Deze separatrices vormen nu een oppervlak en sluiten een gebied in. Van oplossingen die dit oppervlak passeren, verandert het karakter na de passage. Maar er zijn nu meer oppervlakken, waarop dit kan gebeuren. Dit zijn de zogenaamde resonantie oppervlakken. Deze worden gevormd door de punten waarvan de hoek-snelheden in een rationale verhouding tot elkaar staan. Het kan voorkomen dat oplossingskrommen gedurende een lange tijd ($o(\sqrt{\epsilon})$) gedwongen worden zich in de buurt van zo'n oppervlak te bevinden. Gedurende deze tijd kun je geen ruimtemiddeling gebruiken om de oplossing te benaderen. Bij deze ruimtemiddeling moeten namelijk de hoek-snelheden onafhankelijk van elkaar zijn en dat zijn ze nu niet. Ook nu weer passen we de middelingstheorie enigszins aan om het gedrag van oplossingen te bepalen. Tenslotte passen we de zojuist verworven theorie toe op een voorbeeld.

4.1 Inleiding

We kijken naar een stabiel systeem met Hamiltoniaan H en twee vrijheidsgraden. De coördinaten in dit systeem zijn van de vorm (x_1, y_1, x_2, y_2) . Van dit systeem ken je nog een behouden grootheid die onafhankelijk van de Hamiltoniaan is. Noem deze grootheid F_2 . Het bestaan van deze tweede integraal is essentieel, vanwege de Liouvilletheorie, zie §2.2. Zonder deze integraal kun je niet transformeren naar actiehoek-variabelen. De stabiliteit is gedefinieerd analoog aan de stabiliteit in het vorige hoofdstuk. Nu is de voorwaarde dat de niveauoppervlakken $M_f = \{x : F_i = f_i, i = 1, 2\}$ compact zijn. Pas nu transformatie naar actie-hoek variabelen toe, zie ook §2.5.3. Vanwege de stabiliteit van het systeem

mag dit volgens de theorie van Liouville (stelling 2.2). Dit levert je een systeem dat er als volgt uit ziet:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \omega(I) \\ \dot{I} = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

De hoek-variabelen zijn $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ en de actie-variabelen $I = (I_1, I_2)$. De afgeleiden van ϕ naar de tijd heten ook wel frequenties $\omega = (\omega_1, \omega_2)$. Dit systeem is gemakkelijk oplosbaar. Je kunt zo de bewegingsvergelijkingen integreren.

Nu gaan we kijken naar systemen die in de buurt hiervan liggen. Dit zijn systemen van vorm (4.1) met een kleine storing. Ze zien er als volgt uit:

$$\begin{cases} \dot{\phi} = \omega(I) + \epsilon f(I, \phi) \\ \dot{I} = \epsilon g(I, \phi) \end{cases} \quad (4.2)$$

Hierbij gaan we alleen analytische systemen beschouwen. Neem dus aan dat de functies f en g reëel analytisch zijn. Ook hier kun je middeling toepassen om het gedrag van I te verkrijgen. Het gemiddelde systeem

$$\dot{I} = \epsilon G(I, \phi) \quad (4.3)$$

geeft een goede benadering voor de waarden van I op de oplossingskrommen van (4.2). De functie G is de uitkomst van de volgende integraal:

$$G(I) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} g(I, \phi) d\phi_1 d\phi_2.$$

In het vorige hoofdstuk hebben we iets dergelijks gedaan. Daar hadden we maar één I -variabele en één frequentie en de Hamiltoniaan, die we gemiddeld hebben over de 1-dimensionale ϕ . Om te weten wanneer je wel of niet mag middelen, is het nodig om enige eigenschappen van je oplossing te kennen. Wanneer je niet mag middelen, kunnen er juist interessante dingen gebeuren. Maar eerst eens kijken wanneer je precies wel en wanneer je niet mag middelen.

4.2 Resonantie

4.2.1 Frequentieverhoudingen

De frequenties zijn afhankelijk van elkaar als $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$ voor een zekere $k_i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Aangezien ω_1 en ω_2 functies van de actie-variabelen zijn, vormen de actie-variabelen waarvoor deze afhankelijkheid geldt voor een $k \in \mathbb{Z}^2$ een kromme in het (I_1, I_2) vlak. Deze kromme heet een resonantiekromme. In de gehele $(I_1, I_2, \phi_1, \phi_2)$ -ruimte vormt het een 3-dimensionaal hypervlak. Vanaf nu hebben we het over een resonantiekromme ook als we het 3-dimensionale hypervlak bedoelen. Wanneer de frequenties in verhouding $a : b$ tot elkaar staan,

dan heet dat ook wel de $a : b$ resonantie. Als een oplossingskromme zich steeds op een resonantiekromme bevindt, dan vormen de hoek-variabelen ϕ niet een torus. De middelingstheorie mag je dan ook niet meer toepassen. De meeste oplossingskrommen verblijven echter maar een tijdsinterval of een tijdstip op een resonantiekromme. Het is nu niet vanzelfsprekend of je middelen nu wel of niet of slechts gedeeltelijk mag toepassen. Om uit deze impasse te komen is het handig te kijken naar de verandering van de frequentieverhouding langs de oplossingskrommen van (4.2):

$$\Delta_g = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) = \frac{1}{\omega_2} \frac{\partial \omega_1}{\partial I} - \frac{\omega_1}{\omega_2^2} \frac{\partial \omega_2}{\partial I} g.$$

Deze verhouding is altijd welgedefinieerd, omdat ω_1 en ω_2 positief zijn. Wanneer ze nul worden dan zit je op een separatrix. Daarna komt zo'n oplossing in een instabiele ruimte, waar je de actiehoek-variabelen niet meer kunt gebruiken. Separatrix-passage is een speciaal geval van resonantie. Immers als $\omega_1 = 0$ dan $k_1 \omega_1 + 0 \cdot \omega_2 = 0$. Bij $\omega_2 = 0$ geldt $0 \cdot \omega_1 + k_2 \omega_2 = 0$. Door vermenigvuldiging met een factor ziet de uitdrukking Δ_g er wat vriendelijker uit:

$$A = \omega_2^2 \Delta_g = \left(\omega_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial I} - \omega_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial I} \right) g.$$

Definitie 4.1 Aan voorwaarde 1 wordt voldaan als $|A| > 1/c_1$ voor alle oplossingskrommen. Voorwaarde $\bar{1}$ is de equivalente voorwaarde voor hetzelfde systeem, maar dan gemiddeld over ϕ . Dus dan geldt $|\bar{A}| > 1/c_1$ voor alle oplossingskrommen van het gemiddelde systeem. Hierbij is

$$\bar{A} = \left(\omega_2 \frac{\partial \omega_1}{\partial I} - \omega_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial I} \right) G.$$

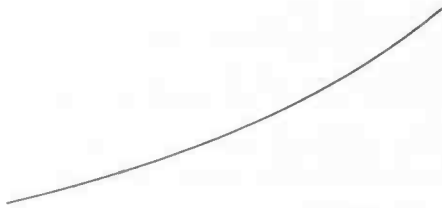
Betekenis van de voorwaarden

Als een oplossingskromme aan voorwaarde 1 voldoet, dan geldt er dat $|A| > 1/c_1$ is op de oplossingskromme. Dit betekent dat deze kromme:

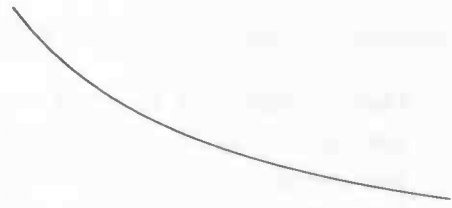
1. geen resonantiekromme raakt, ($\star$)
2. niet een interval op een resonantiekromme verblijft, ($\star$)
3. niet oscilleert rond een resonantiekromme. ($\star$)

Als de afgeleide 0 is voor een tijdsinterval dan geldt immers $\omega_1 = c\omega_2$ voor dat tijdsinterval, dus dat de oplossingskromme zich dan op een resonantiekromme bevindt. Wil een oplossingskromme een resonantiekromme meerdere malen passeren, dan moet de afgeleide ergens nul zijn, wegens de aanname van analyticiteit. Het zal geen verbazing wekken dat middeling een goede benadering levert voor de kromme.

Aangezien ω_1 en ω_2 altijd positief zijn en de afgeleiden ongelijk nul, is steeds $(\omega_1/\omega_2)(t) > 0$. Bovendien is de functie strict dalend of strict stijgend voor alle t . Hier worden alle t -waarden bedoeld, waarvoor je de actiehoek-variabelen mag gebruiken. Het verloop van ω_1/ω_2 in de tijd ziet er uit als figuur 4.1 of figuur 4.2.



Figuur 4.1: *Stijgend verloop van ω_1/ω_2 met horizontaal de t -as*



Figuur 4.2: *Dalend verloop van ω_1/ω_2*

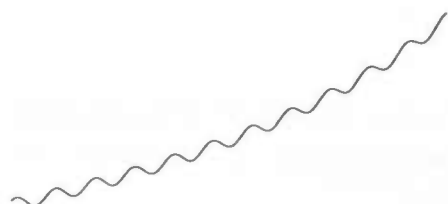
Wanneer voor een oplossingskromme $A = 0$ en de frequentieverhouding rationaal is op dat moment, dan bevindt de oplossingskromme zich voor een zekere tijd op een resonantievlak of raakt de oplossingskromme een resonantiekromme. Als de verhouding irrationaal is, dan bevindt het zich voor een zekere tijd in een δ -omgeving van een resonantiekromme. Dit komt omdat de verzameling van rationale getallen zich dicht in de verzameling van irrationale getallen bevindt. In beide gevallen is de mogelijkheid tot een langduriger bezoek van een δ -omgeving aanwezig. Het is nu ook mogelijk dat oscillaties gedurende een lange tijd rond een resonantievlak zijn.

Indien een oplossingskromme aan voorwaarde $\bar{I}$ voldoet, dan geldt $|\bar{A}| > 1/c_1$. De gevolgen (*) gelden nu voor de oplossingskrommen van het gemiddelde systeem. Voor de oplossingskrommen die tevens voldoen aan voorwaarde 1 mag je nog gewoon middeling gebruiken. De verandering van ω_1/ω_2 is nog steeds dalend of stijgend, maar nu met een kleine storingsband van hoogstens orde $\sqrt{\epsilon}$. Dit komt omdat fout die je maakt bij de benadering door middeling hier van dezelfde orde is. De grafiek van ω_1/ω_2 kan er uit zien als bijvoorbeeld figuur 4.3 of figuur 4.4. Dit komt overeen met oplossingen die geen verandering in gedrag hebben nabij een resonantiekromme.

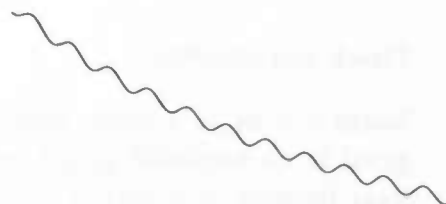
Maar er kunnen nu ook oplossingskrommen zijn die wel aan $\bar{I}$ voldoen, maar

niet aan 1. De voorwaarde $\bar{1}$ laat namelijk een oscillatie toe rond een resonantiekromme van orde $\sqrt{\epsilon}$. De verandering van ω_1/ω_2 verloopt dan niet meer volgens figuur 4.3 of figuur 4.4. De oplossingen blijven gedurende een tijd orde $1/\sqrt{\epsilon}$ in de δ -omgeving van een resonantiekromme. Dat gaan we straks nog zien. We zeggen ook wel dat de oplossing op dat moment gevangen is in een resonantie. De afstand van de resonantiekromme is tijdens deze gevangenschap hoogstens orde $\sqrt{\epsilon}$, omdat anders aan voorwaarde 1 niet meer voldaan wordt.

Voor deze oplossingskrommen neemt de benaderingsfout door middeling tijdens het gevangen zijn in resonantie sterk toe. Dit zie je in als volgt: als de oplossingskromme rond een resonantiekromme oscilleert, is de afgeleide van de frequentieverhouding van orde $\sqrt{\epsilon}$. Het middelen levert een oplossingskromme waarvoor voorwaarde $\bar{1}$ geldt. De afgeleide van de frequentieverhouding is daar minimaal $1/c_1$, van orde 1 dus.



Figuur 4.3: *Gestoorde stijging ω_1/ω_2 met horizontaal de t -as*



Figuur 4.4: *Gestoorde daling ω_1/ω_2*

Gevolgen van de voorwaarden

Als aan voorwaarde 1 en of voorwaarde $\bar{1}$ wordt voldaan, dan geldt het volgende:

Stelling 4.1 1. *Als een systeem (4.2) aan voorwaarde 1 voldoet, dan is de benaderingsfout door middeling van orde $\sqrt{\epsilon}$. Met andere woorden: $|I(t) - J(t)| = O(\sqrt{\epsilon})$, voor $0 \leq t \leq c/\epsilon$. Zie §4.1.*

2. *Als aan voorwaarde $\bar{1}$ wordt voldaan maar niet aan 1 en aan voorwaarde 2 die zo'n beetje altijd wel geldt, dan geldt voor alle oplossingen met startwaarden (I_0, ϕ_0) met uitzondering van een verzameling U_c (maat daarvan $< c\sqrt{\epsilon}$), dat de afwijking door middeling van orde $\sqrt{\epsilon} \ln \epsilon$ is.*

Die uitzonderingsverzameling U_c is de verzameling van beginpunten van de oplossingskrommen die gevangen worden in resonantie. Wanneer $\epsilon \rightarrow 0$ dan ligt deze verzameling dicht in de verzameling van alle begincondities. Je kunt dan over een random-gebeuren spreken en over de kans dat dit gebeurt. Zie ook [1, pag. 158, 159].

4.2.2 Gedrag nabij een resonantiekromme

Nu gaan we kijken naar een oplossing die zich in de buurt van een resonantiekromme bevindt die hoort bij de vergelijking:

$$\langle m, \omega(I) \rangle = m_1 \omega_1(I) + m_2 \omega_2(I) = 0.$$

Neem aan dat m_1, m_2 relatief priem zijn. Het is handig om nu enige coördinaten-transformaties in te voeren.

Hoek-variabelen

Neem $\gamma = m_1 \phi_1 + m_2 \phi_2$, met m_1, m_2 relatief priem als boven. In het ongestoorde geval is de afgeleide van γ nul op de resonantiekromme. De afgeleide van γ is daar immers: $\dot{\gamma} = m_1(\omega_1 + \epsilon f_1) + m_2(\omega_2 + \epsilon f_2)$.

Omdat γ een lineaire combinatie is van ϕ_1 en ϕ_2 kun je een coördinaat kiezen die daar onafhankelijk van is. Noem die δ . Samen vormen ze een basis voor de 2-torus die de hoek-variabelen beschrijven. Nu kun je (ϕ_1, ϕ_2) uitdrukken in (γ, δ) . δ is zodanig gekozen dat γ onafhankelijk van δ is. Het is belangrijk om te zorgen dat de determinant van de bijbehorende matrix 1 is. De transformatie is anders niet canoniek. Zie ook §2.5.2 en [2, pag. 239, 240]. Een manier om dat te doen is om de vectoren γ en δ te normeren.

Actie-variabelen

Nu hebben we de hoek-variabelen gehad. De actie-variabelen zijn nu aan de beurt. De $(I_1, I_2) = I$ waarvoor geldt dat $\langle m, \omega(I) \rangle = 0$ vormt een kromme in de ruimte die gevormd wordt door de actie-variabelen. Deze kromme noemen we σ .

Neem $\rho = m_1 \omega_1(I) + m_2 \omega_2(I)$, de resonantiefrequentie. De kromme σ is de kromme die hoort bij de vergelijking $\rho = 0$. Je kunt ρ zien als een soort afstandsmaat de resonantiekromme gezien in termen van I_1 en I_2 . σ vormt een parametrisatie van de resonantiekromme. Nu heb je met (ρ, σ) een parametrisatie van de (I_1, I_2) ruimte in handen.

Transformeren nabij resonantiekromme

Voer nu de transformatie $(I_1, I_2, \phi_1, \phi_2) \rightarrow (\delta, \gamma, \rho, \sigma)$ uit op je systeem (4.2). Als alles goed is gegaan ontstaat het volgende systeem:

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \alpha(\rho, \sigma) + \epsilon F_1(\delta, \gamma, \rho, \sigma; \epsilon) \\ \dot{\gamma} = \rho + \epsilon F_2(\delta, \gamma, \rho, \sigma; \epsilon) \\ \dot{\rho} = \epsilon F_3(\delta, \gamma, \rho, \sigma; \epsilon) \\ \dot{\sigma} = \epsilon F_4(\delta, \gamma, \rho, \sigma; \epsilon). \end{cases}$$

We zien nu dat (δ, γ) snel variërende variabelen zijn en (ρ, σ) langzaam variërende variabelen. Dit is in het algemene geval ook zo voor ρ groot genoeg. Dan is ρ van orde 1 en $\dot{\gamma}$ dus ook. Maar we kijken nu in de omgeving van het resonantie oppervlak $\rho = 0$. De omgeving waar vangst in resonantie plaatsvindt is van orde $\sqrt{\epsilon}$, zie §4.2.1 en [1, pag. 156, 157]. Dus ρ is van orde $\sqrt{\epsilon}$. Om dit gegeven te gebruiken, herschalen we ρ tot μ als volgt:

$$\rho = \mu\sqrt{\epsilon}.$$

Het systeem gaat nu over in:

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \alpha(\mu\sqrt{\epsilon}, \sigma) + \epsilon F_1(\delta, \gamma, \mu\sqrt{\epsilon}, \sigma; \epsilon) \\ \dot{\gamma} = \mu\sqrt{\epsilon} + \epsilon F_2(\delta, \gamma, \mu\sqrt{\epsilon}, \sigma; \epsilon) \\ \dot{\mu} = \sqrt{\epsilon} F_3(\delta, \gamma, \mu\sqrt{\epsilon}, \sigma; \epsilon) \\ \dot{\sigma} = \epsilon F_4(\delta, \gamma, \mu\sqrt{\epsilon}, \sigma; \epsilon). \end{cases}$$

Nu zien we dat γ ophoudt een snel variërende variabele te zijn, maar dat het ook geen langzaam variërende variabele wordt. De variabele ρ genereert een variabele μ die net zo snel verandert als γ . Kennelijk hebben we te maken met drie soorten variabelen. Snel variërende hoeksvariabelen (zoals ϕ_1 en ϕ_2), langzame variërende variabelen (zoals I_1 en I_2) en tussenliggende semi-snel variërende variabelen (γ en μ). Als we middelen over de snel variërende variabelen, mogen we ons systeem dus alleen middelen over δ maar niet over γ .

4.3 Middeling nabij resonantiekromme

We middelen nabij een resonantiekromme. Ook gaan we over op een andere tijdschaal $\tau = \sqrt{\epsilon}t$. Het volgende systeem ontstaat, waarin de G_i 's als argument $(\gamma, \sqrt{\epsilon}\mu, \sigma, \epsilon)$ hebben en 2π -periodiek zijn ten opzichte van γ :

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = \mu + \sqrt{\epsilon}G_2 \\ \dot{\mu} = G_3 \\ \dot{\sigma} = \sqrt{\epsilon}G_4. \end{cases} \quad (4.4)$$

4.3.1 Ongestoord als eerste benadering

Als een eerste benadering van (4.4) neem je $\epsilon = 0$. De vergelijkingen gaan dan over in:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = \mu \\ \dot{\mu} = G_3(\gamma, \sigma) \\ \dot{\sigma} = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Dit is een autonoom Hamilton-systeem. De bijbehorende Hamiltoniaan is $\tilde{H} = \frac{1}{2}\mu^2 + \Phi(\gamma, \sigma)$, met σ constant. De afgeleiden $\dot{\gamma}$ en $\dot{\mu}$ voldoen aan de Hamilton-vergelijkingen. De potentiaal Φ haal je uit $G_3 = -\frac{\partial \Phi(\gamma, \sigma)}{\partial \gamma}$. Omdat σ constant is, kun je Φ ook zo schrijven: $\Phi(\gamma, \sigma) = V(\gamma, \sigma) - \gamma L(\sigma) + \chi(\sigma)$. Transformeer nu:

$$H = \tilde{H} - \chi(\sigma),$$

dan krijg je de Hamiltoniaan H :

$$H = \frac{1}{2}\mu^2 + V(\gamma, \sigma) - \gamma L(\sigma). \quad (4.6)$$

Ook is er sprake van energiebehoud:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \mu \dot{\mu} + \left(\frac{\partial V}{\partial t} - L(\sigma) \right) \dot{\gamma} + \frac{\partial H}{\partial \sigma} \dot{\sigma} = 0.$$

Omdat $\chi(\sigma)$ constant is, zijn de bewegingsvergelijkingen behorende bij H gelijk aan die van (4.5). De vergelijkingen (4.5) zijn dus equivalent aan:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = \mu \\ \dot{\mu} = -\frac{\partial V(\gamma, \sigma)}{\partial \sigma} + L(\sigma) \\ \dot{\sigma} = 0. \end{cases}$$

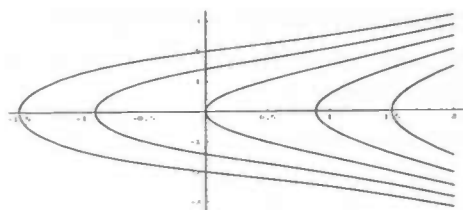
Zo komen we aan de vorm:

$$\ddot{\gamma} = -\frac{\partial V(\gamma, \sigma)}{\partial \sigma} + L(\sigma), \quad \dot{\sigma} = 0.$$

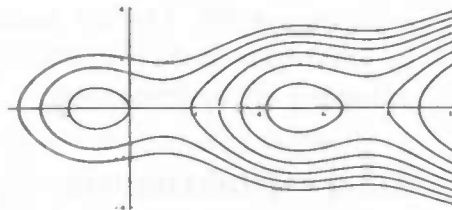
Het is nuttig om het faseportret hiervan te aanschouwen. De volgende mogelijkheden zijn er:

1. Het faseportret bevat geen stabiel evenwichtspunt,
2. Het faseportret bevat oscillatiedomeinen, want het heeft een stabiel evenwichtspunt.

Zie ook figuur 4.5 en figuur 4.6. De eerste mogelijkheid komt voor als de $L(\sigma)$ term te groot is voor de periodieke V term om nog enige invloed uit te oefenen. Is dit niet het geval dan hebben we te maken met de tweede mogelijkheid.



Figuur 4.5: *Faseportret (γ, μ) nabij resonantievlak $\mu = 0$ zonder stabiel evenwichtspunt*



Figuur 4.6: *Faseportret nabij resonantievlak met stabiele evenwichtspunten*

4.3.2 Invloed van de storingstermen

Bij de tweede mogelijkheid zorgen de storingstermen ervoor dat sommige oplossingen de separatrix passeren. Daarna komen ze in het oscillatiedomein. Daar zal de oplossing rond het resonantieoppervlak gaan oscilleren. Dit heet gevangen zijn in resonantie. Dit duurt net zolang totdat de oplossing opnieuw de separatrix passeert, dat heet ontsnappen uit resonantie.

Vergelijk het vorige hoofdstuk waar we ook dergelijke systemen hebben besproken. Hierbij is σ de langzaam variërende parameter. Het systeem (4.5) is het bevroren systeem dat hoort bij (4.4) met σ constant. De Hamiltoniaan die bij (4.4) hoort, is $H = H_{(4.6)} + H_1(\gamma, \sqrt{\mu}, \sigma, \epsilon)$, met H_1 van orde $\sqrt{\epsilon}$. Verandering van σ betekent verandering van faseportret en verandering separatrices. Aangezien σ een variabele is van tijdschaal $1/\epsilon$, is de tijd van gevangen zijn in resonantie dat ook.

4.3.3 Het gedrag van de resonantiecomponent

Als je de bewegingsvergelijkingen van H en σ (met differentiatie naar $\tau = \sqrt{\epsilon}t$) gaat middelen rond deze oscillatie (en dus gaat middelen over γ en μ) dan ontstaan de volgende bewegingvergelijkingen:

$$\begin{aligned} \dot{H} &= \sqrt{\epsilon}\beta_1(H, \sigma) \\ \dot{\sigma} &= \sqrt{\epsilon}\beta_2(H, \sigma). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Vergelijk §2.4, waar ongeveer hetzelfde gebeurt, maar dan met tijdmiddeling. Dit systeem wordt ook wel het interne gemiddelde systeem genoemd. Als op de

separatrix $H = 0$ geldt dan kun je precies bepalen wanneer een oplossing gevangen is in resonantie. Op het moment van het gevangen worden is de Hamiltoniaan 0. Vervolgens is de Hamiltoniaan < 0 voor een tijd van orde $\sqrt{\epsilon}$. Dan ontsnapt de oplossing uit de resonantie en is de Hamiltoniaan weer ≥ 0 .

4.3.4 Plaktheorie

In de lijn van de middelingstheorie van het vorige hoofdstuk gaan we een benadering voor de langzaam variërende variabelen I vinden. De benadering werkt als volgt voor een oplossing waarin gevangen zijn in resonantie optreedt. Neem als benadering voor de oplossing voor de periode van niet gevangen zijn in resonantie de middeling over ϕ van (4.2). Neem als benadering voor de overige beweging de σ -component van (4.7). De benadering van de gehele oplossing is dat je deze twee deeloplossingen aan elkaar plakt. De benaderingsfout is dan van orde $\sqrt{\epsilon} \ln \epsilon$, zie ook [7]. De kans om gevangen te worden in resonantie kun je bereken met dezelfde soort integralen als in het vorige hoofdstuk.

4.4 Voorbeeld van gevangen worden in resonantie

Beschouw het volgende systeem in actiehoek-variabelen:

$$\begin{cases} \dot{\phi}_1 = I_1 + \epsilon I_2 \\ \dot{\phi}_2 = I_2 - \epsilon I_1 \\ \dot{I}_1 = a\epsilon \\ \dot{I}_2 = \epsilon \cos(\phi_1 - \phi_2). \end{cases}$$

Dit systeem is ontleend aan een voorbeeldsysteem in [1, pag. 156, Example 2] op de storingstermen bij ϕ na en de $a\epsilon$ i.p.v. ϵ . We bekijken voorwaarde 1 respectievelijk $\bar{1}$:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\omega_1(I)}{\omega_2(I)} \right) = \epsilon \left(\frac{I_2 - I_1 \cos(\phi_1 - \phi_2)}{I_2^2} \right) \\ \bar{A} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\omega_1(J)}{\omega_2(J)} \right) = \frac{\epsilon}{J_2} \neq 0. \end{aligned}$$

Aangezien aan voorwaarde 1: $A \neq 0$ niet wordt voldaan, maar wel aan $\bar{1}$: $\bar{A} \neq 0$, kunnen oplossingen gevangen worden in resonantie. Nu passen we de coördinatentransformatie $(I_1, I_2, \phi_1, \phi_2) \rightarrow (\delta, \gamma, \rho, \sigma)$ toe. De nieuwe coördinaten zijn nu dus $(\delta, \gamma, \rho, \sigma)$.

4.4.1 1 : 1 resonantie

We kijken eerst naar de 1:1 resonantie. Een goede eerste gok voor de nieuwe coördinaten is:

$$(\tilde{\gamma}, \tilde{\delta}, \tilde{\rho}, \tilde{\sigma}) = (\phi_1 - \phi_2, \phi_1 + \phi_2, I_1 - I_2, I_1 + I_2).$$

Maar nu is de determinant van de transformatie geen 1. Normering van deze coördinaten levert de nieuwe coördinaten op:

$$(\tilde{\gamma}, \tilde{\delta}, \tilde{\rho}, \tilde{\sigma}) = \sqrt{2}(\gamma, \gamma, \rho, \sigma).$$

De bewegingsvergelijkingen voor de nieuwe coördinaten zien er dan zo uit:

$$\begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_1 \\ \dot{\phi}_2 \end{pmatrix}, \text{ dus}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 + \epsilon I_2 \\ I_2 - \epsilon I_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_1 - I_2 + \epsilon(I_1 + I_2) \\ I_1 + I_2 + \epsilon(I_2 - I_1) \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \rho + \epsilon\sigma \\ \sigma - \epsilon\rho \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\sigma} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\epsilon \\ \epsilon \cos(\phi_1 - \phi_2) \end{pmatrix} = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a - \cos(\phi_1 - \phi_2) \\ a + \cos(\phi_1 - \phi_2) \end{pmatrix} = \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a - \cos \gamma \\ a + \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Nu kijken we in de omgeving van de resonantiekromme. Daar is δ van orde $\sqrt{\epsilon}$. We mogen dus middelen over δ . Dat heeft geen effect voor γ , ρ en σ . We houden de volgende bewegingsvergelijkingen over:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = (\rho + \epsilon\sigma)/\sqrt{2} \\ \dot{\rho} = \epsilon(a - \cos \gamma)/\sqrt{2} \\ \dot{\sigma} = \epsilon(a + \cos \gamma)/\sqrt{2}. \end{cases}$$

Nu herschalen we $\rho = \sqrt{\epsilon}\mu$ en nemen we als tijdschaal $\tau = t\sqrt{\epsilon/2}$:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = (\mu + \sqrt{\epsilon})\sigma \\ \dot{\tau} = a - \cos \gamma \\ \dot{\sigma} = \sqrt{\epsilon}(a + \cos \gamma). \end{cases}$$

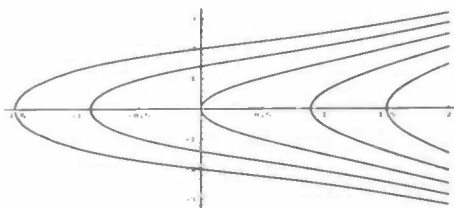
Neem als eerste benadering $\epsilon = 0$. Het systeem gaat dan over in een autonoom Hamiltoniaansysteem met energiebehoud:

$$\begin{cases} \dot{\gamma} = \mu \\ \dot{\mu} = a - \cos \gamma \\ \dot{\sigma} = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

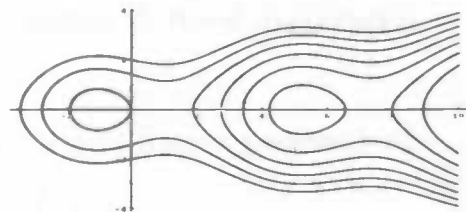
De Hamiltoniaan die hierbij hoort is:

$$H = \frac{1}{2}\mu^2 + (-a\gamma + \sin \gamma).$$

Het faseportret vertoont oscillatorische gebieden, indien de potentiaal minima vertoont. Dit is het geval indien $|a| < 1$, anders is de sinusterm te zwak voor enige wezenlijke invloed. Zie ook figuur 4.7 en 4.8. De weggelaten storingstermen van $o(\sqrt{\epsilon})$ kunnen er voor zorgen dat een oplossing die buiten de separatrix is, opeens binnen de separatrix komt: gevangen wordt in resonantie. Na verloop van voldoende tijd (orde ϵ) komt de oplossing weer buiten de separatrix door dezelfde storingsterm: ontsnapt uit resonantie.



Figuur 4.7: faseportret (γ, μ) van (4.8) met $a = 2$



Figuur 4.8: faseportret van (4.8) met $a = \frac{1}{2}$

4.4.2 $p : q$ resonantie

Er zijn natuurlijk meer resonanties mogelijk dan de $1 : 1$ resonantie. Maar bij welke resonanties kunnen oplossingen gevangen raken in resonantie? We gaan nu kijken naar het algemene geval, de $p : q$ resonantie, p, q uiteraard onderling priem. Als eerste gok voor de nieuwe coördinaten nemen we:

$$(\tilde{\gamma}, \tilde{\delta}, \tilde{\rho}, \tilde{\sigma}) = (p\phi_1 - q\phi_2, q\phi_1 + p\phi_2, pI_1 - qI_2, qI_1 + pI_2).$$

Ook nu is de determinant van de transformatie geen 1. Normering van deze coördinaten levert de nieuwe coördinaten op:

$$(\tilde{\gamma}, \tilde{\delta}, \tilde{\rho}, \tilde{\sigma}) = \sqrt{p^2 + q^2}(\gamma, \delta, \rho, \sigma).$$

Noem $R = \sqrt{p^2 + q^2}$. Het blijkt, na enig rekenen, dat geldt:

$$\begin{pmatrix} \dot{\gamma} \\ \dot{\delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} ((p^2 + pq) + \epsilon(pq - q^2))\rho + ((pq - p^2) + \epsilon(pq + q^2))\sigma \\ ((pq - q^2) - \epsilon(pq + p^2))\rho + ((q^2 + pq) + \epsilon(p^2 - pq))\sigma \end{pmatrix}.$$

Ter controle kun je kijken of $p = 1, q = 1$ de vergelijkingen voor $(\dot{\gamma}, \dot{\delta})$ van de vorige paragraaf opleveren. De uitdrukkingen voor $\dot{\rho}$ en $\dot{\sigma}$ zijn nu ook iets lastiger. Dit komt omdat de uitdrukking onder het cosinus teken, $\phi_1 + \phi_2$, nu niet meer simpel afhangt van γ , maar ook van δ . Er blijkt te gelden:

$$\begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \dot{\sigma} \end{pmatrix} = \frac{\epsilon}{R^2} \begin{pmatrix} pa - q \cos(\zeta(\gamma, \delta)) \\ qa + p \cos(\zeta(\gamma, \delta)) \end{pmatrix}, \quad \zeta(\gamma, \delta) = \frac{1}{R}((p + q)\gamma + (q - p)\delta).$$

Nu gaan we in de omgeving van de $p : q$ resonantiekromme kijken, dus herschaal $\rho = \sqrt{\epsilon}\mu$. De uitdrukking voor γ wordt dan:

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{R^2}((pq - p^2)\sigma + \sqrt{\epsilon}(p^2 + pq)\mu + \epsilon(pq + q^2)\sigma + \epsilon\sqrt{\epsilon}(pq - q^2)\mu).$$

Te zien is in de uitdrukking voor $\dot{\gamma}$ dat er alleen sprake kan zijn van gevangen zijn in resonantie als $pq = p^2$. Dan is γ namelijk geen snelvariërende variabele meer en wordt het een semi-snel variërende variabele. Maar dan geldt $p = q$ en hebben we de 1 : 1 resonantie. Dit geval hebben we al besproken. Berekeningen voor het algemene geval laten zien dat dat het enige geval is waar gevangen worden in resonantie kan optreden.

4.5 Resonantie in de praktijk

Ook in de praktijk komen resonantieverschijnselen voor. Bijvoorbeeld is er een verband tussen de afstanden van planeten tot de zon. Dit komt omdat de frequenties van de planeten onderling resonantie relaties hebben, zie [5]. Ook spelen resonantie verschijnselen een rol in de verdeling van de asteroïden in de asteroïdengordel tussen Mars en Jupiter. Er bevinden zich geen asteroïden op plaatsen waar Jupiter in resonantie daarmee staat. Een zo'n "gat" bevindt zich op de 3:1 resonantie en wordt verklaard in [11] en [12].

Bijlage A

Middelingsstellingen

In deze bijlage staan de definities van de gebruikte middelingen in dit artikel. Dit zijn de tijd- en ruimtemiddeling en het geval van equivalentie tussen beide. Tevens staan de belangrijkste stellingen hierover vermeld. Vervolgens komen de bewijzen, zodanig dat per paragraaf één stelling bewezen wordt.

Definitie A.1 *Het ruimtemiddelde van een functie f op de torus T^n is het getal:*

$$\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(\phi) d\phi_1 \cdots d\phi_n.$$

Beschouw de waarde van $f(\phi)$ op het traject $\phi(t) = \phi_0 + \omega t$. Dit is een functie van de tijd.

Definitie A.2 *Het tijdgemiddelde van een functie f op de torus T^n is de functie:*

$$f^*(\phi_0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\phi_0 + \omega t) dt$$

Stelling A.1 *Het ruimtemiddelde komt overeen met het tijdgemiddelde als f continu is en de frequenties ω_i onderling onafhankelijk zijn, dat wil zeggen $\forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\} : \langle k, \omega \rangle \neq 0$.*

Indien deze stelling opgaat, heeft het zin om het tijdgemiddelde te definiëren als f^* , dus zonder het argument ϕ_0 , omdat dit er dan niet meer toe doet.

De volgende theorie is de middelingstheorie voor het systeem:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \omega(I) + \epsilon f(I, \phi) \\ \dot{I} &= \epsilon g(I, \phi) \end{aligned} \tag{A.1}$$

Hierbij is I n -dimensionaal en ϕ slechts 1-dimensionaal. Voor ϕ hoger dimensionaal gelden analoge theorieën. Het gemiddelde systeem dat hier bij hoort, ziet er als volgt uit:

$$\dot{J} = \epsilon \bar{g}(J).$$

Stelling A.2 *Neem aan dat in (A.1):*

1. *De functies ω , f en g zijn gedefinieerd voor I in een begreind gebied G . Hier zijn ze begreind, evenals hun afgeleiden tot en met orde twee:*

$$\|\omega, f, g\|_{C^2(G \times S^1)} < c_1;$$

2. *In G geldt:*

$$|\omega(I)| > c > 0;$$

3. *Voor $0 \leq t \leq \frac{1}{\epsilon}$ ligt de omgeving met straal d van het punt $J(t)$ in G .*

Dan geldt voor ϵ voldoende klein ($0 < \epsilon < \epsilon_0$):

$$|I(t) - J(t)| < c_9 \epsilon, \quad \forall t, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{\epsilon},$$

waarbij de constanten niet van ϵ afhangen.

N.B.: Het equivalent voor meerdere frequenties laat zich raden. Aanname twee wordt nu $|< k, \omega(I) >| > c > 0 \forall k \in Z$. Dan zijn de frequenties dus onafhankelijk van elkaar. Voor twee frequenties geldt dat $|I(t) - J(t)| < c/\sqrt{\epsilon}$ voor ϵ voldoende klein, zie [1].

Het is niet handig om als maar in actiehoek-variabelen te werken. Dus vandaar de volgende equivalente definitie in carthetische variabelen:

Definitie A.3 *Het tijdgemiddelde voor y in R^n is:*

$$f^*(y) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, y) dt.$$

En het gemiddelde systeem dat daar bij hoort:

$$\dot{y} = \epsilon f^*(y).$$

De tijdmiddelingstelling die volgt, vereist de volgende definitie:

Definitie A.4 *f is Lipschitz continu in x met Lipschitz constante L als er in $[t_0, t_0 + T] \times D \times (0, \epsilon_0]$ geldt f continu en:*

$$\|f(t, x_1; \epsilon) - f(t, x_2; \epsilon)\| \leq L \|x_1 - x_2\|,$$

met $x_1, x_2 \in D \subset R^n$.

Als je je systeem in de volgende vorm transformeert met bijbehorend tijdgemiddeld systeem:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \epsilon f(t, x) + \epsilon^2 g(t, x, \epsilon), \quad x(t_0) = x_0 \\ \dot{y} &= \epsilon f^*(y),\end{aligned}$$

dan geldt de volgende stelling voor $x, y, x_0 \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \leq \infty$, $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ (vergelijk stelling A.2):

Stelling A.3 *Neem aan dat:*

1. f, g en ∇f zijn gedefinieerd, continu en begrensd door een constante M onafhankelijk van ϵ in het interval $[t_0, \infty) \times D$;
2. g is Lipschitz-continu met betrekking tot $x \in G$;
3. f is T -periodiek in t met T constant onafhankelijk van ϵ ;
4. $y(t) \in G - d$ op de tijdschaal $1/\epsilon$;

dan geldt er $\|x(t) - y(t)\| = O(\epsilon)$ voor $\epsilon \rightarrow 0$ op tijdschaal $1/\epsilon$.

A.1 Schets bewijs stelling A.1: tijd=ruimtemiddeling

Het gehele bewijs is terug te vinden in [2, pag. 287-289]. Het volgend bewijs gaat er van uit dat er sprake is van één vrijheidsgraad.

Het is gemakkelijk om het volgende lemma te bewijzen:

Lemma A.1.1 *Stelling A.1 is geldig voor $f = e^{i\langle k, \phi \rangle}$. Omdat het tijds- en ruimtemiddelde beiden lineair van f afhangen, is deze stelling ook geldig voor $f = \sum_{|k| < N} f_k e^{i\langle k, \phi \rangle}$, een complexe fourierreeks.*

Hieruit valt dit aan te tonen:

Lemma A.1.2 *f reëel en continu (of stapsgewijs continu). Voor elke $\epsilon > 0$ bestaan er twee Fourierreksen P_1 en P_2 zodat $P_1 < f < P_2$ en $\bar{g} \leq \epsilon$, $g = P_2 - P_1$.*

Bewijs lemma A.1.2: Volgens het Fourierbeginsel kun je elk reëel continue (of stapsgewijs continue) benaderen door een (reële) Fourierreks. Neem eerst aan dat f continu is. f valt te benaderen door een Fourierreks P waarvoor geldt $|f - P| < \frac{1}{2}\epsilon$. Neem $P_1 = P - \frac{1}{2}\epsilon$ en $P_2 = P + \frac{1}{2}\epsilon$.

Als f Riemann integreerbaar is, maar niet continu dan zijn er twee functies f_1 en f_2 zodat $f_1 < f < f_2$ en $\bar{g} = (2\pi)^{-n} \int g d\phi < \frac{1}{3}\epsilon$, met $g = f_2 - f_1$. Benader f_1 en f_2 met Fourierreksen P_1 en P_2 , zodanig dat $P_1 < f_1 < f < f_2 < P_2$. Beschouw $\bar{g}$ met $g = P_2 - f_2$ en $g = f_1 - P_1$. Hieruit volgt het gestelde. $\square$

Bewijs stelling A.1: Neem $\epsilon > 0$. Met behulp van lemma A.1.1, A.1.2 geldt het volgende voor $P_1 < f < P_2$ met $T > T_0$:

$$|\bar{P}_i - P_i^*| < \epsilon, \quad (i = 1, 2).$$

Maar $\bar{P}_1 < \bar{f} < \bar{P}_2$ en $\bar{P}_2 - \bar{P}_1 < \epsilon$. Hieruit volgt het gestelde. $\square$

A.2 Schets bewijs stelling A.2: ruimtemiddel- ing

Het gehele bewijs is terug te vinden in [2, pag. 294-297].

Het basisidee van het bewijs is om een zodanige transformatie in variabelen te nemen dat de storingsterm verdwijnt. Neem in plaats van I de nieuwe variabelen P :

$$P = I + \epsilon k(I, \phi),$$

waarbij k 2π periodiek is in ϕ . k kiezen we zo dat P aan een simpelere differentiaalvergelijking voldoet dan I . Ter herinnering:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \epsilon g(I, \phi) \\ \dot{\phi} &= \omega(I) + \epsilon f(I, \phi). \end{aligned}$$

Dan geldt voor P derhalve:

$$\dot{P} = \dot{I} + \epsilon \left(\frac{\partial k}{\partial I} \dot{I} + \frac{\partial k}{\partial \phi} \dot{\phi} \right) = \epsilon \left(g + \omega(I) \frac{\partial k}{\partial \phi} \right) + \epsilon^2 \left(\frac{\partial k}{\partial I} g + \frac{\partial k}{\partial \phi} f \right).$$

Er valt te bewijzen dat de transformatie van I naar P inverteerbaar is. Om precies te zijn geldt het volgende lemma:

Lemma A.2.1 *Voor ϵ klein genoeg is de afbeelding $I \rightarrow I + \epsilon k$, met $|k|_{C^2(G)} < c_3$ (voor elke vaste ϕ) beperkt tot $G - \alpha$, $\alpha > 0$ een diffeomorfisme. Bij de inverse afbeelding hiervan in de regio $G - 2\alpha$ voldoet $\|h\|_{C^2} < c_4$, $c_4(\alpha, c_3) > 0$.*

Voor bewijs zie [2]. Dan kun je I dus in P uitdrukken:

$$I = P + \epsilon h(P, \phi, \epsilon), \quad \text{met } h \text{ } 2\pi\text{-periodiek in } \phi.$$

$$\dot{P} = \epsilon \left(g(P, \phi) + \omega(P) \frac{\partial k}{\partial \phi} \right) + R,$$

met $|R| < c_2 \epsilon^2$ als $\|\omega\|_{C^2} < c_1$, $\|f\|_{C^2} < c_1$, $\|k\|_{C^2} < c_3$, $\|h\|_{C^2} < c_4$. Volgens voorafgaand lemma A.2.1 en met behulp van aanname 1 geldt de afschatting

voor $|R|$ als geldt $\|k\|_{C^2} < c_3$. Nu proberen we k zo te kiezen dat ϵ -term in de uitdrukking voor $\dot{P}$ gelijk wordt aan nul. Dan moet k aan de volgende vergelijking voldoen:

$$\frac{\partial k}{\partial \phi} = -\frac{1}{\omega} g.$$

In het algemeen zal deze vergelijking voor een periodieke k geen oplossingen hebben. De gemiddelde waarde van de linkerkant van de vergelijking is namelijk altijd 0, terwijl de gemiddelde waarde van de rechterkant ongelijk kan zijn aan 0. Daarom kunnen we k niet zo kiezen dat de gehele ϵ term nul wordt. Wel kunnen we k zodanig kiezen dat het periodieke deel van g verdwijnt:

$$\tilde{g}(P, \phi) = g(P, \phi) - \bar{g}(P)$$

$$k(P, \phi) = - \int_0^\phi \frac{\tilde{g}(P, \phi)}{\omega(P)} d\phi.$$

Nu geldt vanwege aannames 1 en 2 dat $\|k\|_{C^2} < c_3$. Immers $\omega(I) \neq 0$ en $\|g\|_{C^2} < c_1$. Maar dan geldt ook $|R| < c_2 \epsilon^2$. Er geldt nu voor P :

$$\dot{P} = \epsilon \left(g(P, \phi) + \frac{\tilde{g}(P, \phi)}{\omega(P)} \omega(P) \right) + R = \epsilon \bar{g}(P) + R.$$

Als je dit systeem vergelijkt met het systeem

$$\dot{J} = \epsilon \bar{g}(J),$$

dan is het verschil tussen de rechterkant van de vergelijkingen van minimaal orde ϵ^2 . Dan is $|P - J|$ dus van orde ϵ voor $t \leq 1/\epsilon$. Ook geldt er $|I - P| = \epsilon |k| \leq \epsilon$. Dus voor $t \leq 1/\epsilon$ is het verschil $|I - J|$ minimaal van orde ϵ .

A.2.1 Nauwkeuriger afschatting

De afschatting $|I - J|$ die we nu hebben is nog niet precies genoeg. Een nauwkeuriger afschatting is nodig. Hiervoor gaan we kijken naar:

$$z(t) = P(t) - J(t)$$

Dan geldt:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \epsilon \bar{g}(P) + R - \epsilon \bar{g}(J) = \epsilon (\bar{g}(P) - \bar{g}(J)) + R = \\ &= \epsilon \left(\frac{\bar{g}(P) - \bar{g}(J)}{P - J} \right) (P - J) = \epsilon \left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial P} z + \tilde{R} \right) + R \Rightarrow \\ | \dot{z} | &< c_6 \epsilon |z| + c_2 \epsilon^2 + c_5 \epsilon |z| = c_7 \epsilon |z| + c_2 \epsilon^2 \\ |z(0)| &< c_3 \epsilon, \end{aligned}$$

als we aannemen dat het interval (G, J) in het interval $G + \alpha$ ligt. Met behulp van het volgende lemma kunnen we $z(t)$ afschatten:

Lemma A.2.2 Gronwall I: Als $|\dot{z}| \leq a|z| + b$ en $|z(0)| < d$ voor $a, b, d, t > 0$, dan $|z(t)| \leq (d + bt)e^{at}$.

Bewijs lemma A.2.2: Het lemma valt te bewijzen met de gedachte dat $|z(t)|$ niet groter wordt dan de oplossing $y(t)$ van de vergelijking $\dot{y} = ay + b$, $y(0) = d$. De oplossing is dan van de vorm $y = C(t)e^{at}$. Vervangen we C door de eerste twee termen van de Taylorontwikkeling rond $t = 0$ van C dan is de rechterkant van de vergelijking gelijk aan $(d + bt)e^{at}$. Het is eenvoudig aan te tonen dat geldt $C(t) < (d + bt)$, voor $t > 0$. $\square$

Bewijs stelling A.2: Passen we dit lemma toe op onze verworven afschatting van $|\dot{z}|$ dan kunnen we z als volgt afschatten:

$$|z(t)| < (c_3\epsilon + c_2\epsilon^2 t)e^{c_7\epsilon t}.$$

Voor $0 \leq t \leq 1/\epsilon$ geldt dan:

$$|z(t)| < c_8\epsilon, \quad c_8 = (c_3 + c_2)e^{c_6}$$

Als we $\alpha = d/3$ nemen (de d van aanname 3, dus $J(t) \in G - d$) dan geldt voor voldoende kleine ϵ (ϵ_0 zodanig dat dan geldt voor ϵ $0 < \epsilon < \epsilon_0$) dat het interval $(P - J)$ in $G - \alpha$ ligt. Dit kun je als volgt zien. Volgens lemma A.2.1 geldt dan $P \in G - 2\alpha$, anders is de afbeelding $P \rightarrow I$ niet goed gedefinieerd. $J(t) \in G - 3\alpha$. Voor het segment $\Delta J + (1 - \Delta J)P$, $0 \leq \Delta \leq 1$ geldt dan dat het binnen $G - \alpha$ moet liggen voor $0 \leq t \leq 1/\epsilon$. Dit is precies wat we aangenomen hebben in onze verworven afschatting van $z(t)$. Hierbij is het nog wel nodig om aan te nemen dat de rand van G zo gedefinieerd is dat voor elk punt p van $G - \alpha$ de bol $B_\epsilon(p)$ in G zit. Nu kunnen we stellen:

$$|P(t) - J(t)| < c_8\epsilon, \quad \forall 0 \leq t \leq 1/\epsilon$$

Maar $|P(t) - I(t)| < |\epsilon k| < c_3\epsilon$, wegens $\|k\|_{C^2} < c_3$. Dan geldt er $\forall 0 \leq t \leq 1/\epsilon$:

$$|I(t) - J(t)| < c_9\epsilon, \quad c_9 = c_8 + c_3 > 0. \quad \square$$

A.3 Bewijs stelling A.3: tijdsmiddeling

Het bewijs van deze stelling is ook terug te vinden in [10, pag. 21-23].

Voor dat bewijs is het volgende lemma nodig. Vergelijk lemma A.2.2. De aanname daarvoor is de afgeleide van de aanname hier.

Lemma A.3.1 Gronwall II: Neem aan dat voor $t_0 \leq t \leq t_0 + T$:

$$z(t) \leq a(t - t_0) + b \int_{t_0}^t z(s) ds + d,$$

met $z(t)$ continu en $z(t) \geq 0$ voor $t_0 \leq t \leq t_0 + T$ en $a \geq 0$, $b > 0$, $d \geq 0$ en constant dan geldt:

$$z(t) \leq \left(\frac{a}{b} + d\right) e^{b(t-t_0)} - \frac{a}{b},$$

voor $t_0 \leq t \leq t_0 + T$.

Bewijs lemma A.3.1: neem $z(t) = \zeta(t) - \frac{a}{b}$. Dan wordt de ongelijkheid:

$$\zeta(t) \leq b \int_{t_0}^t \zeta(s) ds + d,$$

let op de ζ in plaats van de z naast het integraal teken. Voor $b = d = 0$ is het lemma triviaal, want dan is $\phi(t) = 0$ voor $t_0 \leq t \leq t_0 + T$. Sluit deze mogelijkheid uit. Deel de ongelijkheid aan beide kanten door de rechterkant er van en vermenigvuldig vervolgens met b . Integreren levert de volgende afchatting (na het nemen van de e-macht):

$$b \int_{t_0}^t \zeta(s) ds + d \leq \left(\frac{a}{b} + d\right) e^{b(t-t_0)} \Rightarrow$$

$$\zeta(t) \leq \left(\frac{a}{b} + d\right) e^{b(t-t_0)}.$$

Transformeer weer terug naar $z(t)$ en het $z(t)$ voldoet aan het lemma. Zie ook [10, pag. 3,4]. $\square$

Bewijs stelling A.3: Aannames 1 en 2 leveren de uniekheid en het bestaan van de oplossingen van de vergelijkingen voor $x(t)$ en $y(t)$ op met de bijbehorende beginvoorwaarden. Schalen we de vergelijking in $y(t)$ naar $\lambda = \epsilon t$ dan bestaan de oplossing van de vergelijking voor $y(t)$ in de tijdschaal 1, dus voor t in tijdschaal $1/\epsilon$. Definieer:

$$u(t, y) = \int_{t_0}^t [f(s, y) - f^*(y)] ds.$$

$$\|f(t, y)\| \leq M, \|f^*\| \leq M, \text{ want } f^* \leq \frac{1}{T} TM = M \Rightarrow \|u(t, y)\| \leq 2MT.$$

Dit volgt uit aanname 3: de periodiciteit van f en uit continuïteit en begrensdsheid van f , aanname 1. Neem $z(t) = y(t) + \epsilon u(t, y(t))$. Nu kunnen we afschatten, want $y(t) \in D \forall t \geq t_0$ volgens aanname 4:

$$\begin{aligned} \|x(t) - y(t)\| &\leq \|x(t) - z(t)\| + \|z(t) - y(t)\| \\ &\leq \|x(t) - y(t)\| + \epsilon \|u(t, y(t))\| \leq \|x(t) - z(t)\| + 2\epsilon MT. \end{aligned}$$

Nu gaan we $\|x(t) - z(t)\|$ afschatten.

$$x(t) - z(t) = \int_{t_0}^t (\dot{x} - \dot{z}) ds.$$

$$\begin{aligned}\dot{x} - \dot{z} &= \epsilon f(t, x(t)) + \epsilon^2 g(t, x(t), \epsilon) - \epsilon f^*(y(t)) - \\ &\epsilon f(t, y) + f^*(y(t)) + \epsilon^2 \frac{\partial u}{\partial y} f^*(y(t)) + \epsilon f(t, z(t)) - \epsilon f(t, z(t)) = \\ &\epsilon(f(t, x(t)) - f(t, z(t))) + R. \\ R &= \epsilon(f(t, z(t)) - f(t, y(t))) + \epsilon^2 \left(g(t, x, \epsilon) + \frac{\partial u}{\partial y} f^*(y(t)) \right).\end{aligned}$$

Volgens aanname 2 is f Lipschitz continu, met constante L dus:

$$\|f(t, z(t)) - f(t, y(t))\| \leq L\|z(t) - y(t)\| \leq \epsilon L\|u(t, y(t))\| \leq 2\epsilon LMT.$$

Bovendien $\|g\| \leq M$, $\|f^*\| \leq M$ en $\|\frac{\partial u}{\partial y}\| \leq 2MT$. Dit laatste zie je als volgt:

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\| &= \left\| \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial y} [f(s, y) - f^*] ds \right\| = \\ &\left\| \int_{t_0}^t \left[\frac{\partial f}{\partial y}(s, y) - \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f}{\partial y}(t, y) dt \right] ds \right\| \leq 2MT.\end{aligned}$$

Nu volgt dat er een constante k bestaat zodat $\|R\| \leq k\epsilon^2$. Hiermee we de volgende afschatting (na het nemen van de norm):

$$\|\dot{x} - \dot{z}\| \leq \epsilon\|(f(t, x(t)) - f(t, z(t)))\| + k\epsilon^2.$$

Nog een keer Lipschitz continuïteit gebruiken levert:

$$\|\dot{x} - \dot{z}\| \leq \epsilon L\|x(t) - z(t)\| + k\epsilon^2.$$

Nu kunnen we echt $\|x(t) - z(t)\|$ afschatten:

$$\begin{aligned}\|x(t) - z(t)\| &\leq \int_{t_0}^t \|\dot{x} - \dot{z}\| ds \\ &\leq \epsilon \int_{t_0}^t \|x(s) - z(s)\| ds + k\epsilon^2(t - t_0).\end{aligned}$$

Hierop passen wij lemma A.3.1 toe, met $a = k\epsilon^2$, $b = \epsilon L$ en $d = 0$. Dit levert voor $\|x(t) - z(t)\|$:

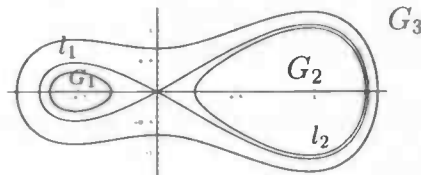
$$\begin{aligned}\|x(t) - z(t)\| &\leq \epsilon \left(\frac{k}{L} e^{\epsilon L(t-t_0)} - \frac{k}{L} \right) \Rightarrow \\ \|x(t) - y(t)\| &\leq \epsilon \left(\frac{k}{L} e^{\epsilon L(t-t_0)} - \frac{k}{L} + 2MT \right).\end{aligned}$$

Als $\epsilon L(t - t_0)$ begrensd is door een constante onafhankelijk van ϵ dan geldt: $x(t) = y(t) + O(\epsilon)$. Als t van $O(1/\epsilon)$, dus van tijdschaal $1/\epsilon$, dan is dit het geval. Hiermee is stelling A.3 bewezen. $\square$

Bijlage B

Bewijs mogelijkheid benadering Hamiltoniaan door middeling

Eerst zie je het bewijs van stelling 3.3 1), oftewel de mogelijkheid tot benadering van de Hamiltoniaan H op een oplossingskromme door middeling in een ϵ -omgeving van een separatrix. Om de verhaallijn hiervan niet te storen staan in bijlage B.5 enige weggelaten details. Vervolgens zie je in bijlage B.4 het bewijs van 2) van stelling 3.3. Tenslotte wordt in bijlage B.6 het bewijs gegeven voor de mogelijk tot benadering van H buiten een ϵ -omgeving van een separatrix.



Figuur B.1: faseportret bij systeem (B.1) met $\lambda = 0$

Als uitgangspunt nemen we het systeem van hoofdstuk 3:

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = 2(1 + \lambda)x - 4x^3 + \frac{3}{5}x^2 \\ \dot{\lambda} = \epsilon, \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

met Hamiltoniaan $H = \frac{1}{2}y^2 + x^4 - \frac{1}{5}x^3 - (1 + \lambda)x^2$ en met binnengebieden G_1 , G_2 en buitengebied G_3 , zie §3.1.1 en figuur B.1. Voor het bewijs met een analoog

systeem zie [6]. Als beginwaarde nemen we hier $\lambda_0 = 0$. Wanneer de beginwaarde van λ verschillend is van nul dan geeft de vervanging $\lambda = 0$ ofwel $\lambda > 0$ door $\lambda = \lambda_0$ en $\lambda > \lambda_0$ hetzelfde resultaat.

Definitie B.1 $J(h, \lambda)$ is gelijk aan het oppervlak binnen de oplossing met $H = h$ van het ongestoorde probleem (dus met $\lambda = \text{constant}$).

Je kunt Λ , het tijdstip van separatrix-passage berekenen met de vergelijking $J_0 = J(h_0, \lambda_0) = (S_1 + S_2)(\Lambda)$, $\lambda_0 \leq \Lambda$.

B.1 Beweging in buitengebied

Neem een beweging startend in G_3 . Stel, $H(\lambda)$ is oplossing van ons probleem en $h_3(\lambda)$ is de oplossing van het gemiddelde systeem (zie stelling 3.3). Wat we al kunnen zeggen (zie bijlage B.6) is:

$$|H(\lambda) - h_3(\lambda)| < k_2\epsilon, \quad \epsilon < \epsilon_0 \text{ zo lang als } h_3(\lambda) > k_1.$$

Vanwege die k_1 kunnen we $h_3(\lambda)$ niet gebruiken vlakbij de separatrix. Tenminste zo lijkt het. Maar voor dit probleem en analoge problemen kunnen we aantonen dat:

Stelling B.1 Er bestaan ϵ_0, k_1, k_2 , afhankelijk van H_0 , zodanig dat:

$$|H(\lambda) - h_3(\lambda)| < k_2\epsilon, \quad \epsilon < \epsilon_0 \text{ zo lang als } h_3(\lambda) > k_1\epsilon.$$

Nu kunnen we de $h_3(\lambda)$ gebruiken tot aan de ϵ -omgeving van de separatrix, precies wat we willen.

Bewijs: We kijken naar de beweging in rondgangen. Neem aan dat aan het einde van de n -de rondgang geldt: $H = H_n$, $\lambda = \lambda_n$, $J = J_n$, $t = t_n$. De volgende afschattingen zijn geldig als aan de volgende voorwaarden wordt voldaan:

$$H > \epsilon, \quad h_3(\lambda) > \epsilon :$$

$$1) H_n - H_{n+1} > k_3^{-1}\epsilon \quad \forall n.$$

Dit zie je in door naar de afgeleide van H te kijken. Voor $H_n - H_{n+1}$ geldt $H_n - H_{n+1} > \frac{1}{4}t_{n+1}\epsilon > k_3^{-1}\epsilon$ (zie §3.1.2). Dan geldt door iteratie:

$$H_{n-q} > H_n + qk_3^{-1}\epsilon \Rightarrow H_0 > H_n + nk_3^{-1}\epsilon \Rightarrow n < k_3(H_0 - H_n)/\epsilon.$$

2) Op de n -de rondgang geldt:

$$\begin{aligned} |H - H_n| &< k_4\epsilon, & |\lambda - \lambda_n| &< k_5\epsilon(1 + |\ln H_n|) \\ |J - J_n| &< k_6\epsilon(1 + |\ln H_n|). \end{aligned}$$

Voor ΔH op de n -de rondgang geldt namelijk:

$$\Delta H < \int \frac{\partial H}{\partial t} dt < \int x_{max} \epsilon dt = x_{max} t_n \epsilon = k_4 \epsilon.$$

Voor de afschattingen van $|\lambda - \lambda_n|$ en $|J - J_n|$ zie bijlage B.5.

$$3) \quad J_n - J_{n-1} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{dJ}{dt} dt - \oint \frac{dJ}{dt} dt = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{dJ}{dt} dt.$$

Voor het bewijs hiervan zie ook bijlage B.5. Met behulp van 2) kunnen we de rechterkant van de vergelijking afschatten. Dit levert op:

$$|J_n - J_{n-1}| < k_7 \epsilon^2 H_n^{-1}$$

Dit zien we als volgt:

$$|H - H_n| < k_4 \epsilon \Rightarrow |J - J_n| < k_6 \epsilon (1 + |\ln H(\lambda)|) \Rightarrow$$

$$|J_n - J_{n-1}| < \tilde{k}_6 \epsilon \left| \int_{\lambda_*}^{\lambda_n} \frac{dH/d\lambda}{H(\lambda)} d\lambda \right|, \text{ met } \lambda_* \text{ zodanig dat } \ln H(\lambda_*) = -1$$

en $\tilde{k}_6$ zodanig dat $k_6 \epsilon (|\ln H_n| + 1) \leq \tilde{k}_6 \epsilon |\ln H_n + 1|$. Hiermee geldt:

$$|J - J_n| < \tilde{k}_6 \epsilon \left| \int_{\lambda_*}^{\lambda_n} \frac{dH}{d\lambda} d\lambda \right| < \tilde{k}_6 \epsilon \frac{x_{max}^2}{H_n} \left| \int_{\lambda_*}^{\lambda_n} d\lambda \right| = \tilde{k}_6 \epsilon^2 \frac{x_{max}^2}{H_n} |t_n - t_*| \leq k_7 \epsilon^2 H_n^{-1}.$$

4) Met behulp van 1), 3) en de voorwaarden $H > \epsilon$, $h_3(\lambda) > \epsilon$ valt het volgende af te leiden:

$$\begin{aligned} |J_m - J_0| &< k_7 \epsilon^2 \sum_{n=1}^m H_n^{-1} = k_7 \epsilon^2 \sum_{q=0}^{m-1} H_{m-q}^{-1} < \\ k_7 \epsilon^2 \sum_{q=0}^{m-1} \frac{1}{H_m + q k_3^{-1} \epsilon} &< \left[H_m^{-1} + \int_0^m (H_m + q k_3^{-1} \epsilon)^{-1} dq \right] k_7 \epsilon^2 \\ &= \left[H_m^{-1} + k_3 \epsilon^{-1} \ln \left| \frac{H_m + m k_3^{-1} \epsilon}{H_m} \right| \right] k_7 \epsilon^2 \end{aligned}$$

Als $H > \epsilon$ dan $H^{-1} < \epsilon^{-1}$ en $H_0 > H_m + m k_3^{-1} \epsilon$ dus geldt voor voorgaande:

$$\begin{aligned} k_7 \epsilon \left[1 + k_3 \ln \left| \frac{H_m + m k_3^{-1} \epsilon}{H_m} \right| \right] &< k_7 \epsilon \left[1 + k_3 \ln \left| \frac{H_0}{H_m} \right| \right] = \\ k_7 \epsilon [1 + k_3 (\ln H_0 - k_3 \ln H_m)] &< k_3 k_7 \epsilon [1 + |\ln H_0| + |\ln H_m|] = \\ k_3 k_7 \epsilon (1 + |\ln H_0|) \left[1 + \frac{|\ln H_m|}{1 + |\ln H_0|} \right] &< k_8 \epsilon [1 + |\ln H_m|]. \end{aligned}$$

5) Met behulp van 2) en 4) geldt:

$$|J_m - J_0| < k_8 \epsilon [1 + |\ln H_m|], \quad |J - J_m| < k_6 \epsilon (1 + |\ln H_n|) \Rightarrow$$

$$|J - J_0| = |J - J_m + J_m - J_0| < |J - J_m| + |J_m - J_0| < (k_6 + k_8) \epsilon [1 + |\ln H_m|] \\ < k_9 \epsilon [1 + |\ln H|], \text{ immers } |H - H_n| < k_4 \epsilon.$$

Nu hebben we voor elkaar gekregen dat we nu naast de schatting voor $|J - J_m|$ voor J op de m -de rondgang nu ook een afschatting hebben voor $|J - J_0|$ voor dezelfde J .

6) $J(h_3(\lambda))$ is een constante functie, zie bijlage B.5. Daarom geldt $J(h_3(\lambda)) = J_0$ en dus met behulp van 5):

$$|J - J(h_3(\lambda))| < k_9 \epsilon [1 + |\ln H|]$$

Met behulp van $H > \epsilon$, $h_3(\lambda) > \epsilon$ komen we uit op:

$$|H(\lambda) - h_3(\lambda)| < k_2 \epsilon.$$

Zie nogmaals bijlage B.5. De voorwaarden zijn nodig, omdat anders de afschattingen niet gelden. Tevens moet gelden: $h_3(\lambda) > (k_2 + 1)\epsilon = k_1 \epsilon$. Nu is stelling B.1 bewezen. $\square$

B.2 Beweging in binnengebieden

Voor $h'_1(\lambda)$ en $h'_2(\lambda)$ gelden analoge afschattingen. Het accent geeft aan dat het beginpunt niet op de separatrix ligt maar $k_{10}\epsilon$ erbuiten. Wegens overeenkomstige structuur is het voldoende om naar $h'_1(\lambda)$ te kijken. Ter herinnering $\dot{H} = -\epsilon x^2$. Een oplossingskromme in gebied G_1 met $\lambda = \text{constant}$ is een gesloten kromme om het enige evenwichtspunt A van die regio heen. De x -coördinaat van A is de oplossing van de vergelijking $V(x) = 0$. Het is niet moeilijk om in te zien dat met $\lambda > 0$ er voor de x -coördinaat van A geldt: $x > \frac{11}{10}$. Voor elke oplossingskromme geldt voor een gedeelte van de baan: $x > A_x$ en dus $x > \frac{11}{10}$.

Laten we eens kijken naar beweging in rondgangen analoog aan voorafgaande. Dus een oplossing startend in gebied G_2 met uitzondering van A en een begin $h'_1(\lambda) = H(\lambda) < -k_{10}\epsilon$. Voor de n -de rondgang geldt voor de afname ΔH over dat gedeelte:

$$\Delta H > \epsilon \left(\frac{11}{10} \right)^2 t_m > k_{11}^{-1} \epsilon, \text{ zie 3.1.2.}$$

Dan geldt er ook:

$$H_n - H_{n+1} > k_{11}^{-1} \epsilon, \text{ zie 1).}$$

Maar dan geldt, omdat 2) hier ook opgaat voor J en λ :

$$|H(\lambda) - h'_1(\lambda)| < k_{12}\epsilon.$$

Sterker nog: stelling B.1 is ook geldig voor $h'_1(\lambda)$ en $h'_2(\lambda)$. Dit is een sterkere afchatting dan in [6] staat vermeldt. Daar staat $O(\epsilon \ln \epsilon)$ in plaats van $O(\epsilon)$ voor de fout. Bij analoge problemen kan gelden dat de afchatting die ontstaat van $O(\epsilon \ln \epsilon)$ is.

B.3 Aantonen dat de plakmethode werkt

Stelling B.2 *Neem U gesloten gebied in gebied G_3 voor $\lambda = \lambda_*$, $k > \lambda_*$. Dan voor $\epsilon < \epsilon_0$, $\lambda < k$, dan als $(x(0), y(0)) \in U \setminus u$, $\text{maat}(u) < k_{14}\epsilon$, bijbehorende $\lambda = \lambda_*$, dan geldt de volgende afchatting voor punten gevangen in G_1 , G_2 :*

$$|H(\lambda) - h(\lambda)| < k_{13}\epsilon.$$

Bewijs: Neem $k_{15} > k_1 + k_{10}$. Kies Λ_+ , Λ_- zodanig dat $H(\Lambda_+) = k_{15}\epsilon$ en $H(\Lambda_-) = -k_{15}\epsilon$. Voor k_{15} voldoende groot geldt $\Lambda_+ < \Lambda < \Lambda_-$ en $\Lambda_+ - \Lambda_- < k_1\epsilon$ voor punten die niet te dicht bij C het zadelpunt van het systeem komen. Dit laatste houdt in dat die punten niet in u liggen.

Voor $\lambda_* \leq \lambda \leq \Lambda_-$ volgt de afchatting uit stelling B.1. Voor $\Lambda_- \leq \lambda \leq \Lambda_+$ geldt $H(\lambda) = O(\epsilon)$, $h(\lambda) = O(\epsilon)$, dus automatisch de afchatting. Voor $\Lambda_- \leq \lambda \leq k$ kun je de afchatting voor $h'_1(\lambda)$ ofwel $h'_2(\lambda)$ nemen. Daarmee geldt:

$$|h'_1(\lambda) - h(\lambda)| < k_{16}\epsilon \Rightarrow$$

$$|H(\lambda) - h(\lambda)| < (k_{12} + k_{16})\epsilon = k_{13}\epsilon$$

Evenzo voor $h'_2(\lambda)$. Hiermee is 1) van stelling 3.3 bewezen. Zie ook [6]. $\square$

B.4 Bewijs 2) van stelling 3.3

Te bewijzen: $Q(M) = P(\Lambda)$, voor een oplossingskromme door het punt M (in gebied G_3) op tijdstip $\lambda = \lambda_0$. Parameter Λ is de waarde van λ waarop de benadering van oplossingskromme (met $H = h(\lambda)$) de separatrix passeert.

Al bewezen is $R(\Lambda) = P(\Lambda)$, dus nu nog te bewijzen: $Q(M) = R(\Lambda)$.

$$Q(M) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{V_1}{V_1 + V_2}.$$

V is de δ -omgeving om M heen in de (x, y, λ) -ruimte, met $\lambda = \text{constant}$. V_i is de maat van de punten van V die uiteindelijk in G_i terecht komen.

$$R(\Lambda) = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta V_1}{\Delta V_1 + \Delta V_2}.$$

Met ΔV_i als toename van gebied G_i in periode $[\Lambda, \Lambda + \Delta\lambda]$.

Als we aannemen dat stelling 3.2 geldt, dus dat $P(\lambda_s) = Q(\lambda_s) = R(\lambda_s)$, dan volgt gemakkelijk het gewenste bewijs. Immers wegens stelling 3.3 1) geldt $|H(\lambda) - h(\lambda)| = O(\epsilon |\ln \epsilon|)$. Dan

$$|H(\Lambda) - H(\lambda_s)| = |H(\Lambda) - h(\Lambda) + h(\Lambda) - H(\lambda_s)| =$$

$$|H(\Lambda) - h(\Lambda)| = O(\epsilon |\ln \epsilon|), \text{ want } h(\Lambda) = H(\lambda_s) = 0.$$

Afschatting 2) maakt het nu aannemelijk dat: $|\Lambda - \lambda_s| = O(\epsilon |\ln \epsilon|)$. Dan geldt $|R(\Lambda) - R(\lambda_s)| = O(\epsilon |\ln \epsilon|)$ en dus in de limiet $\epsilon \rightarrow 0$: $R(\Lambda) = R(\lambda_s) = Q(M)$.

Nu nog te bewijzen $R(\lambda_s) = Q(M)$. Hiervoor is het volgende lemma nodig:

Lemma B.4.1 *Voor elke Hamiltoniaan $H(x, y, \lambda)$ met uitsluitend lineaire afhankelijkheid van λ is de divergentie van het bijbehorende vectorveld X 0.*

Bewijs lemma: Neem $X = (\frac{\partial H}{\partial y}, -\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial \lambda})$, dan geldt:

$$\text{div}(X) = \nabla \cdot X = \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 H}{\partial \lambda^2} = 0. \quad \square$$

Vervolg bewijs stelling 3.2: Dankzij lemma B.4.1 en Stokes geldt als we de punten in omgeving M gaan volgen dat steeds het oppervlak daarvan gelijk blijft. Dit oppervlak vervormt continu en komt steeds meer rond de separatrix te liggen. Op een gegeven moment vormt het oppervlak het buitendeel van een $\Delta\lambda$ omgeving rond de separatrix. Voor $\lim \delta \rightarrow 0$, met $\lim \epsilon \rightarrow 0$ geldt $\lim \Delta\lambda \rightarrow 0$ en is het oppervlak in de limiet precies de flux $(I_1 + I_2)(\lambda_s) = \Delta V$.

Iets later geldt dat het oppervlak volledig binnen de separatrices ligt, nu gesplitst in twee delen, met maten V_1 en V_2 . Kies δ , dus $\Delta\lambda$, zodanig dat $\Delta V_1 = V_1$. Maar in de limiet geldt $\Delta V_1 = I_1$. Dan moet ook gelden $\Delta V_2 = V_2$, want het totale oppervlak $V_1 + V_2$ is in de limiet de flux. Nu geldt:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta V_1}{\Delta V_1 + \Delta V_2} = R(\lambda_s) = Q(M) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{V_1}{V_1 + V_2}. \quad \square$$

B.5 Overgebleven details

Afschatting voor $|\lambda - \lambda_n|$ op de n -de rondgang

$$H(x, y, \lambda) = \frac{1}{2}y^2 + x^4 - (1 + \lambda)x^2 - \frac{1}{5}x^3.$$

Na de volgende coördinaten-transformatie (met determinant 1):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\alpha}{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha} & -\frac{1}{\alpha} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}, \text{ met } \alpha(\lambda) = \sqrt{2}\sqrt{1 + \lambda},$$

ziet de Hamiltoniaan er zo uit:

$$H(\tilde{x}, \tilde{y}) = \alpha \tilde{x} \tilde{y} + O(|\tilde{x}, \tilde{y}|^2).$$

Een goede benadering voor het bijbehorende systeem met $\epsilon \rightarrow 0$ is de volgende:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \alpha \tilde{x} \\ \dot{\tilde{y}} = -\alpha \tilde{y} \end{cases}$$

En als je λ constant neemt met de volgende oplossingen:

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = \tilde{x}(0)e^{\alpha t} \\ \tilde{y}(t) = \tilde{y}(0)e^{-\alpha t} \end{cases}$$

Als je de tijd $T(\lambda)$ wil berekenen die het duurt om van het punt $(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$ naar punt $(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$ te komen, dan volstaat de volgende berekening:

$$\tilde{x}_1 = \tilde{x}_0 e^{\alpha T/\epsilon} \Rightarrow T(\lambda) = \frac{\epsilon}{\alpha} \log \frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_0} \quad (\text{B.2})$$

Nu is de tijd rijp voor een afschatting voor $|\lambda - \lambda_n|$ op de n -de rondgang. Besef dat $|\lambda - \lambda_n| \leq |\lambda_{n-1} - \lambda_n|$. Bevries het systeem op parameterwaarde $\lambda = \lambda_{n-1}$. De periode van niveaukromme H_{n-1} is $T(H_{n-1})$. Analoog is $T(H_n)$ gedefinieerd. Voor waarde $|\lambda - \lambda_n|$ geldt:

$$T(H_{n-1}) < |\lambda_{n-1} - \lambda_n| < T(H_n).$$

Aangezien de niveaukromme H_n dicht bij het zadelpunt komt, is $T(H_{n-1}) < T(H_n)$.

Een gedeelte van de niveaukromme H_n is het gedeelte waarbij $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ met $y > 0$. Dus het gedeelte van punt

$$(x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{2}, \sqrt{2H_n - \frac{7}{40} + \frac{\alpha_n^2}{4}}\right), \text{ naar punt } (x_1, y_1) = \left(\frac{1}{2}, \sqrt{2H_n - \frac{3}{40} + \frac{\alpha_n^2}{4}}\right),$$

met $\alpha_n = \alpha(\lambda_n) = \sqrt{2}\sqrt{1 + \lambda_n}$. De x -coördinaten van de bijbehorende getransformeerde punten zijn

$$\begin{aligned}\tilde{x}_0 &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha_n}{2}} + \frac{\sqrt{2H_n - \frac{7}{40} + \frac{\alpha_n^2}{4}}}{\sqrt{2\alpha_n}}, \\ \tilde{x}_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha_n}{2}} + \frac{\sqrt{2H_n - \frac{3}{40} + \frac{\alpha_n^2}{4}}}{\sqrt{2\alpha_n}}.\end{aligned}$$

Vul nu deze punten in (B.2) in, dan geldt voor de tijdsduur $T(\lambda)$:

$$T(\lambda) = \frac{\epsilon}{\alpha_n} \log \frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_0}.$$

Wegens symmetrie is dit gelijk aan de tijdsduur van het gedeelte $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$ met $y < 0$. De rest van de baan van $T(H_n)$ wordt doorlopen in een tijd van orde 1. Dus

$$T(H_n) \leq \epsilon \left(\frac{2}{\alpha_n} \log \frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_0} + c_1 \right) \Rightarrow |\lambda - \lambda_n| < \epsilon \left(\frac{2}{\alpha_n} \log \frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_0} + c_1 \right). \quad (\text{B.3})$$

Nu gaan we de logaritme-term afschatten:

$$\begin{aligned}\log \frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_0} &= \log \tilde{x}_1 - \log \tilde{x}_0 \Rightarrow \left| \log \frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_0} \right| \leq |\log \tilde{x}_1| + |\log \tilde{x}_0| \Rightarrow \\ \left| \log \frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_0} \right| &= \left| \log \frac{-\frac{1}{2}\alpha_n + \sqrt{2H_n - \frac{3}{40} + \frac{\alpha_n^2}{4}}}{\frac{1}{2}\alpha_n + \sqrt{2H_n - \frac{7}{40} + \frac{\alpha_n^2}{4}}} \right| \leq \\ \left| \log \left(-\frac{1}{2}\alpha_n + \sqrt{2H_n - \frac{3}{40} + \frac{\alpha_n^2}{4}} \right) \right| &+ \left| \log \left(\frac{1}{2}\alpha_n + \sqrt{2H_n - \frac{7}{40} + \frac{\alpha_n^2}{4}} \right) \right| \leq \\ c_2 |\log 2H_n| &\leq c_2 |\log H_n| + |\log 2|.\end{aligned}$$

Dit weer invullen in (B.3), levert de gewenste afschatting:

$$|\lambda - \lambda_n| \leq \epsilon(c_3 |\log H_n| + c_1) \leq \epsilon k_5 (|\log H_n| + 1). \quad \square \quad (\text{B.4})$$

Het blijkt straks handig om ook een onderschatting voor de periode te hebben. Het volgende geldt hiervoor:

$$T(H_n) \leq \epsilon c_8 (\log H_n + 1). \quad (\text{B.5})$$

Bewijs: Volgens dezelfde reden die leidt tot bovenafschatting (B.3) bestaat de volgende onderafschatting:

$$\begin{aligned}T(H_n) &\geq \epsilon \left(\frac{2}{\alpha_n} \log \frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_0} + c_4 \right) \geq \epsilon c_5 (|\log \tilde{x}_1| + |\log \tilde{x}_0|) \geq \\ \epsilon c_6 \log 2H_n &\geq \epsilon c_7 (|\log H_n| + |\log 2|) \geq \epsilon c_8 (\log H_n + 1). \quad \square\end{aligned}$$

Afschatting voor $|J - J_n|$ op de n -de rondgang

J is het omsloten oppervlak door niveaukromme $H = h$, de oplossingskromme zit nu in zijn n -de rondgang. J_n is oppervlak van niveaukromme $H = H_n$ van de oplossingskromme op het eindpunt van de n -de rondgang.

$$\begin{aligned}\frac{dh}{d\lambda} &= \frac{1}{T(\lambda)} \oint \frac{\partial H}{\partial \lambda} d\lambda = \frac{1}{T(\lambda)} \frac{d}{d\lambda} \int_{\gamma} H d\lambda = \\ &= \frac{1}{T(\lambda)} \frac{d}{d\lambda} \iint dH d\lambda = \frac{\epsilon}{T(\lambda)} \frac{d}{d\lambda} J(h, \lambda).\end{aligned}\quad (\text{B.6})$$

Hieruit kun je concluderen dat $J(h, \lambda)$ een behouden grootte is voor deze vergelijking met $\lambda = \text{constant}$. Dan is namelijk T ook constant en tevens de waarde van h en daardoor automatisch ook $J(h, \lambda)$. $J(h, \lambda) = J_0$ geeft een goede benadering voor $J(h, \lambda)$ voor oplossing in de ϵ -omgeving van de separatrix.

$$\frac{dh}{d\lambda} = \frac{\epsilon}{T(\lambda)} \frac{d}{d\lambda} J(h, \lambda) \Rightarrow \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} T(\lambda) \frac{dh}{d\lambda} d\lambda = \epsilon \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} \frac{d}{d\lambda} J(h, \lambda) d\lambda.$$

Gebruik nu dat $\frac{dh}{d\lambda} < (x_{\max})^2$:

$$\begin{aligned}|J_{n-1} - J_n| &\leq \frac{(x_{\max})^2}{\epsilon} \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} T(\lambda) d\lambda = \\ &= \frac{(x_{\max})^2}{\epsilon} \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} (\lambda - \lambda_n) \frac{T(\lambda) - T(\lambda_n)}{\lambda - \lambda_n} + T(\lambda_n) d\lambda.\end{aligned}$$

De periode van een rondgang zit in tijdschaal 1, dus $\Delta\lambda$ is dan van orde ϵ . Gebruik nu $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$, voorafgaande is dan gelijk aan:

$$\begin{aligned}|J_{n-1} - J_n| &\leq \frac{(x_{\max})^2}{\epsilon} \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} (\lambda - \lambda_n) T'(\lambda) + T(\lambda_n) d\lambda < \\ &= \frac{(x_{\max})^2}{\epsilon} \int_{\lambda_{n-1}}^{\lambda_n} k_5 \epsilon (1 + |\ln H_n|) T'(\lambda) + T(\lambda_n) d\lambda = \\ &= \frac{1}{\epsilon} (k_5 \epsilon (1 + |\ln H_n|) (T(\lambda_n) - T(\lambda_{n-1})) + T(\lambda_n) (\lambda_n - \lambda_{n-1})) < k_6 \epsilon (1 + |\ln H_n|)\end{aligned}\quad (\text{B.7})$$

wegens (B.4) en (B.5). $\square$

Bewijs gelijkheid 3) in bewijs van stelling 3.3

V is het volume in de driedimensionale ruimte gevormd door de verandering van J in de tijd. Het oppervlak van dit volume bestaat uit drie delen: J_n , J_{n-1} en de tussenliggende mantel σ , n is de bijbehorende normaal.

$$\frac{d}{dt} \iint dJ dt = \frac{d}{dt} \int_{t_{n-1}}^{t_n} J dt = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{dJ}{dt} dt =$$

$$\int_{\partial V} \frac{dJ}{dt} \cdot n dt = -J_{n-1} + J_n + \int_{\sigma} \frac{dJ}{dt} \cdot n dt \Rightarrow$$

$$J_n - J_{n-1} = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{dJ}{dt} dt,$$

want bij σ geldt: $n \perp \frac{dJ}{dt}$ en dus is de integraal over σ nul. $\square$

Bewijs $J(h_3(\lambda))$ constant

Bereken de tijdsafgeleide van $J(h_3(\lambda))$:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial h_3} \dot{h}_3 + \frac{\partial J}{\partial \lambda} \dot{\lambda}. \quad (\text{B.8})$$

Volgens (B.6) geldt voor de afgeleide van h :

$$\frac{dh}{d\lambda} = \frac{\epsilon}{T(\lambda)} \frac{d}{d\lambda} J(h, \lambda) \Rightarrow J(h, \lambda) = \frac{T(\lambda)h}{\epsilon} \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial h} = \frac{T(\lambda)}{\epsilon}.$$

Per definitie van $h_3(\lambda)$ geldt:

$$\frac{dh_3}{d\lambda} = \frac{\epsilon}{T(\lambda)} \oint \frac{\partial H}{\partial \lambda} d\lambda.$$

Bovendien geldt voor de afgeleide van J naar λ :

$$J = \iint dH dt = - \oint H dt \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial \lambda} = - \oint \frac{\partial H}{\partial \lambda} dt = - \frac{1}{\epsilon} \oint \frac{\partial H}{\partial \lambda} d\lambda.$$

Vul je dit alles in (B.8) in, dan krijg je de volgende uitdrukking voor $\dot{J}$:

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{T(\lambda)}{\epsilon} \cdot \frac{\epsilon}{T(\lambda)} \oint \frac{\partial H}{\partial \lambda} d\lambda - \frac{1}{\epsilon} \oint \frac{\partial H}{\partial \lambda} d\lambda \cdot \epsilon = 0,$$

dus $J(h_3(\lambda))$ is constant. $\square$

Afschatting $|H - h_3(\lambda)|$ vanuit afschatting $|J - J(h_3(\lambda))|$

$$J = \iint dH dt = \frac{1}{\epsilon} \iint dH d\lambda = \oint \frac{H}{\epsilon} d\lambda = \frac{H}{\epsilon} \oint d\lambda = \frac{H}{\epsilon} T(\lambda).$$

Dit mag omdat H constant is op de integraalcurve. Met behulp hiervan maken we de gewenste afschatting:

$$|H - h_3(\lambda)| = \epsilon \left| \frac{J}{T_H(\lambda)} - \frac{J(h_3(\lambda))}{T_{h_3}(\lambda)} \right| \leq \epsilon \left| \frac{J - J(h_3(\lambda))}{T_m} \right| <$$

$$\frac{k_9}{T_m} \epsilon^2 [1 + |\ln H(\lambda)|] < \frac{k_9 \epsilon^2 [1 + |\ln H(\lambda)|]}{k_{10} \epsilon [1 + |\ln H(\lambda)|]} = k_2 \epsilon.$$

Kies hierbij T_m zo dat $0 < T_m(\lambda) \leq \min(T_H(\lambda), T_{h_3}(\lambda))$. De afschattingen volgen uit (B.5) en (B.7). $\square$

B.6 Middeling buiten separatrices

Beschouw de benaderingsfunctie $h(\lambda)$ voor H die voldoet aan de volgende differentiaalvergelijking:

$$\frac{dh}{d\lambda} = \frac{1}{T(\lambda)} \int_0^{T(\lambda)} \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x(t, \lambda), y(t, \lambda), \lambda) d\lambda,$$

$$\text{met } h(\lambda_0) = H(x_0, y_0, \lambda_0).$$

Bij het berekenen van de integraal houd je λ constant. $T(\lambda)$ is de periode van de niveaukromme die bij de oplossingskromme hoort bij het bevroren systeem voor die constante λ waarde. De parametrisatie van die niveaukromme is de $(x(t, \lambda), y(t, \lambda))$ term in de integraal. Neem nu:

$$u(t, \lambda) = \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}(x(t, \lambda), y(t, \lambda), \lambda) - \frac{dh}{d\lambda} \right) ds \leq 2MT_{\max}(\lambda).$$

Beschouw de functie $z(\lambda)$ die voldoet aan:

$$z(\lambda) = h(\lambda) + \epsilon u(t, \lambda).$$

Nu geldt:

$$\|H - h\| \leq \|H - z\| + \|z - h\| \leq \|H - z\| + 2\epsilon MT_{\max}(\lambda).$$

Als je $\|H - z\|$ afschat, komt daar nul uit:

$$H - z = \int_{t_0}^t \left(\frac{dH}{dt} - \frac{dz}{dt} \right) ds = 0, \text{ want}$$

$$\frac{dH}{dt} - \frac{dz}{dt} = \epsilon \frac{\partial H}{\partial \lambda} - \left(\epsilon \frac{dh}{d\lambda} + \epsilon \left(\frac{\partial H}{\partial \lambda} - \frac{dh}{d\lambda} \right) \right) = 0.$$

Maar dan geldt er heel iets moois, namelijk:

$$\|H - h\| \leq 2\epsilon MT_{\max}(\lambda) \Rightarrow$$

$$\|H - h\| = O(\epsilon) \text{ voor } \epsilon \rightarrow 0, \forall t \text{ mits } T_{\max}(\lambda) < c.$$

Bibliografie

- [1] V.I. Arnol'd: *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. Springer-Verlag 1983, pag. 153-173.
- [2] V.I. Arnol'd: *Mathematical methods of classical mechanics*. Springer-Verlag 1989.
- [3] H.W. Broer: *Meetkunde en fysica*. Epsilon uitgaven 44 1999.
- [4] M.W. Hirsch en S. Smale: *Differential equations, dynamical systems, and linear algebra*. Academic Press 1974.
- [5] A.M. Molchanov: The resonant structure of the solar system. *Icarus* 8 1968, pag. 203-215.
- [6] A.I. Neishtadt: Passage through a separatrix in a resonance problem with a slowly-varying parameter. *Applied Mathematics and Mechanics* 39 (4) 1975, pag. 594-605.
- [7] A.I. Neishtadt: Averaging, capture into resonances, and chaos in nonlinear systems. *Soviet-American perspectives on nonlinear science*. AJP 1990, pag. 261-273.
- [8] A.I. Neishtadt: Averaging and passage through resonances. *Proceedings of the international congress of mathematicians Kyoto 1990*. Springer-Verlag 1991, pag. 1271-1283.
- [9] A.I. Neishtadt: Probability phenomena due to separatrix crossing. *Chaos* 1 (1) 1991, pag. 42-48.
- [10] J.A. Sanders en F. Verhulst: *Averaging methods in nonlinear dynamical systems*. Applied mathematical sciences 59. Springer-Verlag 1985.
- [11] Jack Wisdom: Chaotic behavior and the origin of the 3/1 Kirkwood gap. *Icarus* 56 1983, pag. 51-74.
- [12] Jack Wisdom: A perturbative treatment of motion near the 3/1 commensurability. *Icarus* 63 1985, pag. 272-289.