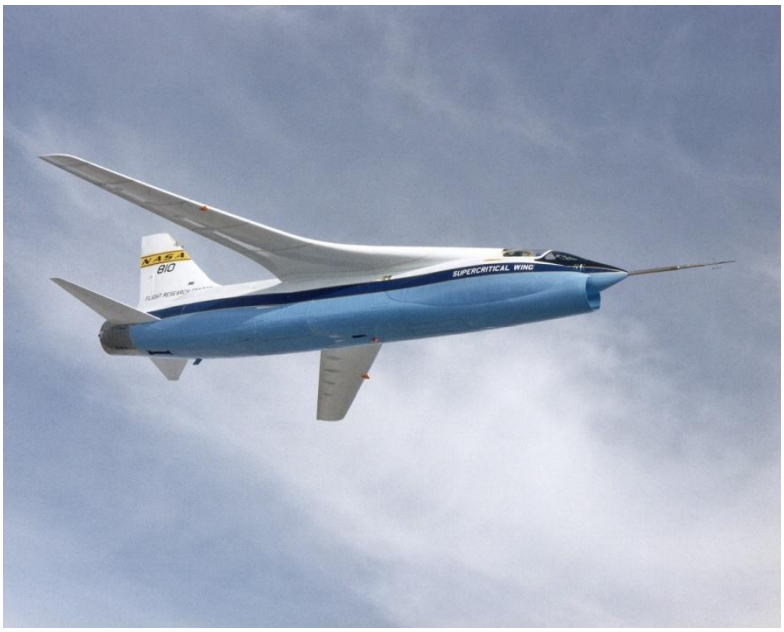
rijksuniversiteit groningen

faculteit wiskunde en natuurwetenschappen

Schokvrije vliegtuigvleugels

T.W. Scholten



Bachelorscriptie Technische Wiskunde

Augustus 2009

Schokvrije vliegtuigvleugels

Samenvatting

In de jaren 60 werd hard gezocht naar vliegtuigvleugels die een zo klein mogelijke weerstand geven bij transonische snelheiden. Dat wil zeggen dat een vliegtuig net onder of met de snelheid van het geluid vliegt. Om de weerstand zo klein mogelijk te krijgen moeten we eerst weten wat de oorzaak van deze grote weerstand is. De techniek die we hiervoor gebruiken valt onder de naam integratie op grote afstand. Bij snelheden net onder die van het geluid zullen namelijk schokgolven ontstaan die relatief veel energie kosten. De kunst is nu een vleugel te ontwerpen die deze schokgolven zo klein mogelijk maakt. Als we de differentiaalvergelijkingen in de gewone vorm gebruiken lopen we echter tegen het probleem dat deze niet lineair zijn. We kunnen we oplossen door gebruik te maken van de hodograaftransformatie. Door niet de snelheid van maar plaats onafhankelijk te maken in ons stelsel zullen niet lineaire differentiaalvergelijkingen wel lineair worden. Door deze vervolgens op te lossen verkrijgen we een vleugelprofiel met geen, of hele kleine, schokgolven. Bijna elk vliegtuig dat met deze snelheden vliegt heeft tegenwoordig dan ook een vergelijkbaar schokgolfvrij profiel.

Bachelorscriptie Technische Wiskunde
Auteur: T.W. Scholten
Begeleider: A.E.P. Veldman
Datum: Augustus 2009

Instituut voor Wiskunde en Informatica
Postbus 407
9700 AK Groningen

Inhoud

Inleiding

In de jaren 60 werd er door zowel de NASA[1] als het NLR[2] hard gezocht naar de meest efficiënte vleugels voor commerciële vliegtuigen die met bijna de geluidssnelheid vliegen. Het blijkt namelijk dat de vleugels een hele grote rol spelen in de weerstand die een vliegtuig ondervindt. Maak deze weerstand zo klein mogelijk en het kerosineverbruik zal ook kleiner worden. Laag verbruik geeft vervolgens weer de mogelijkheid verder te vliegen en, misschien wel de belangrijkste reden, lagere kosten. Beide partijen zijn er uiteindelijk in geslaagd om onafhankelijk van elkaar een vleugel te ontwerpen die zeer effectief blijkt te zijn.

Als eerste wil ik in deze scriptie het probleem schetsen dat bij deze snelheden ontstaat. Een probleem bij luchtvaart is altijd al de welbekende geluidsbarrière geweest. Lang werd dan ook gedacht dat deze nooit te doorbreken was. Hier is men later echter op teruggekomen. Waarom nu juist bij de geluidsbarrière de grote problemen zitten wil ik in dit verhaal als eerste duidelijk maken.

Ik wil dus niet kijken naar straaljagers die door de geluidsbarrière heen moeten maar naar vliegtuigen die net onder de geluidssnelheid vliegen. Het zal echter blijken dat er een grote relatie met deze barrière bestaat.

Uiteindelijk willen we natuurlijk de perfecte vliegtuigvleugels voor ons vliegtuig vinden en moeten we dus op zoek naar een methode die dit voor ons uitrekent. Het uiteindelijke doel van mijn scriptie is niet om methode te vinden maar om de aanloop hier naar toe te beschrijven. Er moet dus een oplossing gevonden worden voor de problemen die we ondervinden bij deze snelheden. Hoe deze oplossingen gevonden zijn en welke elegante ‘trucjes’ hier op toegepast zijn, zal dan ook uitgebreid aan bod komen.

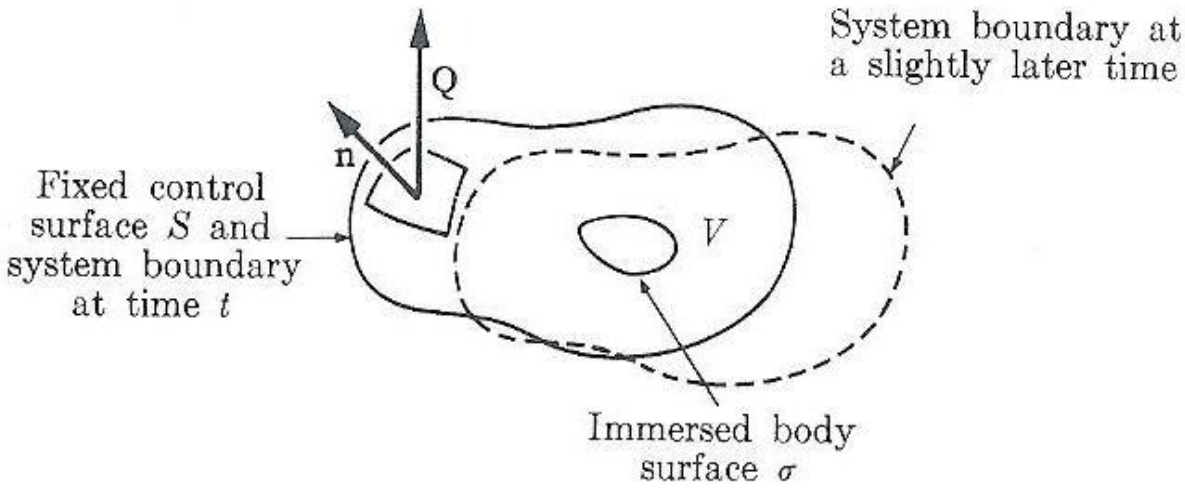
[1] National Aeronautics and Space Administration, USA
[2] Nederlandse Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium

Bewegingsvergelijkingen en behoudswetten

In de stromingsleer hebben we een aantal behoudswetten waar de meeste afleidingen op gebaseerd zijn. De stromingen kunnen worden beschreven door behoud van massa, impuls en energie. Ons verhaal begint met het behoud van massa.

Behoud van massa

Laten we een willekeurige hoeveelheid H nemen die de hoeveelheid deeltjes in een gesloten volume V aangeeft. Laat in dit volume V één of meerdere lichamen zitten die ondoordringbaar zijn. De totale oppervlakte van deze lichamen geven we aan met σ. Dit geheel zit dan weer in een vast oppervlak S zoals in figuur 5.



Figuur 1: Volume om lichaam

We gaan nu kijken naar de massa van het volume dat in V zit. Er zal in de tijd een hoeveelheid massa in en uit V gaan. We zien dat de verandering hiervan wordt gegeven door de som van alle lokale veranderingen op punten in V plus de veranderingen die ontstaan als resultaat van het bewegen van de lichamen in V. Als we voor H de volume-eenheid van de vloeistof nemen, kunnen we zeggen dat (1.1) geldt omdat V een constant volume is.

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_V H dV = \iiint_V \frac{\partial H}{\partial t} dV \tag{1.1}$$

Daarnaast is er ook een verandering in de totale hoeveelheid van de hoeveelheid H omdat er vloeistof door het oppervlak S en σ heen komt. De snelheidscomponent normaal op dit oppervlak is $(Q \cdot n)$. Het volume per tijdseenheid dat door dit oppervlak heen gaat is dan ook gegeven door $H(Q \cdot n)$. De snelheid waarmee H veranderd door de vloeistof die door ons oppervlak gaat wordt dus gegeven door het volgende.

$$\oiint_{S+\sigma} H(Q \cdot n) dS \tag{1.2}$$

Als we (1.1) en (1.2) nu combineren krijgen we de volgende vergelijking:

$$\frac{DH_{tot}}{Dt} = \iiint_V \frac{\partial H}{\partial t} dV + \oiint_{S+\sigma} H(Q \cdot n) dS \tag{1.3}$$

We gaan nu aannemen dat er geen massa verloren gaat. Dit geeft ons dan:

$$\iiint_V \frac{\partial H}{\partial t} dV + \oiint_{S+\sigma} H(Q \cdot n) dS = 0 \tag{1.4}$$

We kunnen dit echter nog iets algemener maken. We nemen voor H een willekeurige behouden grootheid ϕ. Daarnaast voeren we voor de flux door de oppervlakte $S+\sigma$, $F(\phi)$ in. Dit komt er dan als volgt uit te zien:

$$\iiint_V \frac{\partial \phi}{\partial t} dV + \oiint_S F(\phi) \cdot n dS = 0 \tag{1.5}$$

We hebben hier bij de behoudswet aangenomen dat er door ons oppervlak σ niets verdwijnt. Als we hier vervolgens de stelling van Gauss op toepassen die er uit ziet als:

$$\iiint_v \nabla \cdot F(\phi) dV = \oiint_S F(\phi) \cdot n dS \tag{1.6}$$

We krijgen zo voor (1.5) het volgende:

$$\iiint_v \left[\nabla \cdot \left(F(\phi) \right) + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] dV = 0 \tag{1.7}$$

Omdat dit voor elk willekeurig volume V moet gelden, moet het wel zo zijn dat wat binnen de haken staat gelijk moet zijn aan 0.

Euler

Dit komt nu neer op één van de vergelijkingen van Euler. Zoals al eerder gezegd hebben we naar behoud van massa ook te maken met behoud van impuls en energie. Als we deze vergelijkingen vervolgens opschrijven en bij ons verkregen resultaat voor behoud van massa voegen krijgen we de vergelijkingen van Euler.

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0 \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (u \otimes (\rho u)) + \nabla p = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (u(E+p) = 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

Hierbij is ρ de massa dichtheid, u de snelheidsvector met componenten u, v en w, E de totale energie per volume-eenheid en p de druk

Als we deze een in 2D en in stationaire vorm uitschrijven krijgen we het volgende stelsel:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v)=0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho uv)+\frac{\partial}{\partial x}p=0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2)+\frac{\partial}{\partial y}p=0 \end{cases} \tag{1.9}$$

We kunnen hierbij dan F_1 en F_2 definiëren als $F_1=\begin{pmatrix}\rho u \\ \rho u^2+p \\ \rho uv\end{pmatrix}$ en $F_2=\begin{pmatrix}\rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2+p\end{pmatrix}$ zodat (1.9) er dan uitziet als:

$$\frac{\partial}{\partial x}F_1+\frac{\partial}{\partial y}F_2=0 \tag{1.10}$$

Nu we het behoud van massa en de vergelijkingen van Euler hebben gezien is er nog een andere vergelijking die we nodig zullen gaan hebben. Deze vinden we onder de naam Prandtl-Glauert vergelijking.

Prandtl-Glauert vergelijking

Om het wat overzichtelijk te houden zullen we de afleiding van de Prandtl-Glauert vergelijking in 2D doen. De vergelijking in 3 dimensies is op analoge wijze te verkrijgen. Als we eenmaal partieel differentiëren van de bovenste vergelijking van (1.9) krijgen we het volgende:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}=0 \tag{1.11}$$

Daarnaast kunnen we gebruikmaken van de incompressibele vergelijkingen uitgeschreven in de x en y richting.

$$\begin{cases} x: u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ y: u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} \end{cases} \tag{1.12}$$

We definiëren vervolgens de snelheid van het geluid. Deze zullen we dan ook zo nodig zijn.

$$\frac{dp}{d\rho}\equiv a^2 \tag{1.13}$$

Als we nu (1.11), (1.12), en (1.13) gebruiken kunnen we het volgende zeggen:

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{\rho u}{a^2}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\rho v}{a^2}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0 \tag{1.14}$$

Als we dan delen door ρ en het een en ander herschrijven krijgen we dit:

$$\left(u^2-a^2\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(v^2-a^2\right)\frac{\partial v}{\partial y}+uv\frac{\partial u}{\partial y}+uv\frac{\partial v}{\partial x}=0 \tag{1.15}$$

We gaan vervolgens eens kijken naar potentiaaltheorie. Omdat de stroming ver van het lichaam rotatievrij is, bestaat er een snelheidspotentiaal met $(u,v)=\nabla\Phi$. Laat dus $u=\Phi_x$ en $v=\Phi_y$ zijn. De volledige potentiaal vergelijking ziet er als volgt uit

$$\left(\Phi_x^2-a^2\right)\Phi_{xx}+2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy}+\left(\Phi_y^2-a^2\right)\Phi_{yy}=0 \tag{1.16}$$

We kunnen deze potentiaal vergelijking nu herschrijven door een potentiaal ϕ, die de verstoring aan geeft, in te voeren.

$$\Phi=U_\infty x+\phi(x,y) \tag{1.17}$$

Als we dit dan in vergelijking (1.16) invullen krijgen we:

$$\left(\phi_x^2-a^2\right)\phi_{xx}+2\left(\phi_x+U_\infty\right)\phi_y\phi_{xy}+\left(\phi_y^2-a^2\right)\phi_{yy}=0 \tag{1.18}$$

We hebben al gezien dat bij transsone snelheden we te maken krijgen met zowel subsone als supersone stukken. Dit maakt het een erg moeilijk numeriek oplosbaar probleem. We kunnen om het allemaal wat makkelijker te maken die minder essentiële stukken weghalen. Hierbij weten we dat de veranderingen in de snelheid in de x richting groter zijn dan die in de y richting (het vliegtuig vliegt immers in de x richting). Dus kunnen we aannemen dat geldt dat $\frac{\partial}{\partial x}>>\frac{\partial}{\partial y}$. We kunnen nu dus in vergelijking (1.18) alle ϕ_y doorstrepen, als we daarnaast dan delen door $-a^2$ krijgen we de gezochte Prandtl-Glauert vergelijking.

$$\left(1-M^2\right)\phi_{xx}+\phi_{yy}=0 \tag{1.19}$$

Deze is zoals al eerder gezegd relatief eenvoudig uit te breiden naar 3 dimensies en verkrijgen we ons gezochte resultaat.

$$\left(1-M^2\right)\phi_{xx}+\phi_{yy}+\phi_{zz}=0 \tag{1.20}$$

Dit betekent dat er maar een relatief kleine verstoring in de stroming rond de vleugel zit. Dit kunnen we doen omdat we op een hele grote afstand van het vliegtuig kijken. Op deze afstand is de verstoring dan ook relatief klein.

We doen nog even een klein stapje terug en laten ons oog nogmaals op de vergelijking van Euler vallen. Bij de afleiding hiervan moesten moeten we goed opletten, we hebben hier namelijk Gauss

toegepast. Bij het toepassen hiervan hebben we ongemerkt een aantal aannames moeten doen. De oplossing moet hier namelijk continu en differentieerbaar zijn, maar dat is niet het geval bij alle stromingen. We kunnen in bepaalde omstandigheden namelijk best sprongen tegenkomen in onze oplossingen.

Sprongrelaties

Voordat we ons dus gaan storten op onze vliegtuigvleugels wijken we even uit naar dit zeer verwante onderwerp, de sprongrelaties. Als in stromingen de omstandigheden goed zijn, kunnen er namelijk schokgolven ontstaan. Op vraag waarom we naar schokgolven kijken zullen we later uitgebreid terugkomen. We zullen eerst eens aangeven wat een schokgolf in de wiskunde nu precies voorstelt.

Afleiding van de sprongrelaties

Allereerst gaan we eens aan de slag met vergelijking (1.5). Hier hoeft F niet differentieerbaar te zijn. In het stationaire geval geeft dit ons de volgende vergelijking:

$$\int_S F(\phi)\cdot n dS = 0 \tag{2.1}$$

Dit voor elk gesloten oppervlak. We kunnen nu dus over een lijn of oppervlak met een discontinue oplossing een doosje dat oneindig dun is leggen. De behoudswet (2.1) gaat nu over in:

$$\int_{S_1} F(\phi_1)\cdot n_1 dS + \int_{S_2} F(\phi_2)\cdot n_2 dS = 0 \tag{2.2}$$

Maar de normalen n_1 en n_2 zijn aan elkaar gerelateerd. Hierdoor geldt het volgende:

$$\int_{S_1} \{F(\phi_1) - F(\phi_2)\}\cdot n dS = 0$$

Omdat dit voor elk stukje lijn of oppervlak moet gelden, moet dus voldaan worden aan:

$$[F]\cdot n = 0 \tag{2.3}$$

Hierbij is $[F] = F(\phi_1) - F(\phi_2)$ de sprong van F. We noemen nu (2.3) de sprongrelatie behorend bij behoudswet (1.5).

We passen die toe op de Euler vergelijkingen (1.9) en vinden hier dus de volgende 3 sprongrelaties:

$$[F_1]n_x + [F_2]n_y = 0 \tag{2.4}$$

We kunnen nu aannemen dat $n_x = 1$ en $n_y = 0$. Dit is voor elkaar te krijgen door de lijn waar de discontinuïteit optreedt samen te laten vallen met de y-as. En dit kunnen we weer verkrijgen door het coördinatensysteem te draaien. De sprongrelaties worden nu in dit geval:

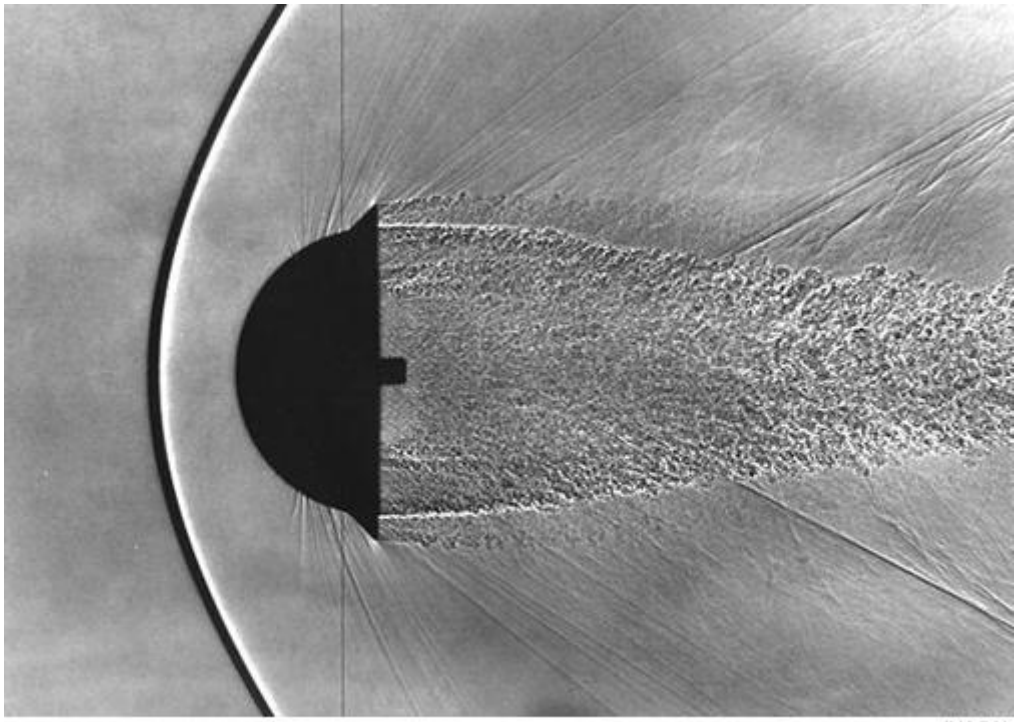
$$\begin{cases} [\rho u] = 0 \\ [\rho u^2 + p] = 0 \\ [\rho uv] = 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Deze relaties worden ook wel de Rankine-Hugoniot relaties genoemd. Er zijn nu 2 gevallen te onderscheiden bij deze relaties. Dit zijn namelijk:

$$u = 0 \tag{2.6}$$

$$[v] = 0 \tag{2.7}$$

In figuur 1 zien we een plaatje van een object dat is geplaatst in een stroming. In deze figuur kunnen we prachtig de relaties (2.6) en (2.7) terugvinden. In het geval van (2.6) hebben we namelijk te maken discontinuïteit van een stroomlijn. De druk en de stromingsrichting zijn wel gelijk maar de snelheid aan beide kanten van de stroomlijn zijn verschillend. In het figuur is dit te zien rechts van het object waar de turbulente stroming (achter het object) overgaat in een niet turbulente stroming (rechts boven en onder het object).



(NASA)

Figuur 2: uniforme stroming rond een vast object

Het geval (2.7) geeft ons echter een schok. In dit geval is juist de snelheid evenwijdig aan de stroom wel gelijk maar is de druk en de snelheid haaks op de stroomlijn verschillend. In figuur 2 is de dikke zwarte lijn links van het object hier een goed voorbeeld van.

Weerstand

We hebben dus gezien wat sprongrelaties zijn en wat ze kunnen doen met een stroming. Het wordt nu tijd om te gaan kijken naar waar de weerstand van een vleugel nu eigenlijk vandaan komt. Deze weerstand is namelijk de oorzaak voor het hoge brandstofverbruik. En dit willen we nu juist minimaliseren. Voor de weerstand bij een vliegtuig wordt ook vaak de Engelse term 'drag' gebruikt. Weerstand is echter een zeer complex fenomeen dat zich niet eenvoudig laat uitrekenen.

We zullen dit fenomeen eerst eens benaderen doormiddel van *simpele integratie*.

Simpele integratie

Beschouw de verdeling van krachten over het oppervlak van een vleugel. Hierbij moet de drukkracht en de spanningskracht die wordt veroorzaakt door de viscositeit ook worden meegenomen. Als we nu een nauwkeurige integraal nemen zal dit resulteren in een nauwkeurige schatting van de hoeveelheid weerstand. Er bestaan echter 2 problemen bij deze methode. Ten eerste moet deze integraal met extreme precisie worden uitgevoerd. Daarnaast is er misschien nog wel een groter probleem. Het resultaat van deze integraal is erg lastig te interpreteren. Je kunt bij een willekeurige vleugel nu wel met veel moeite uitrekenen hoeveel weerstand er ontstaat maar je hebt geen idee waar deze vandaan komt. Omdat we er juist op uit zijn om de weerstand zo klein mogelijk te krijgen, is het van groot belang om te weten waar deze vandaan komt.

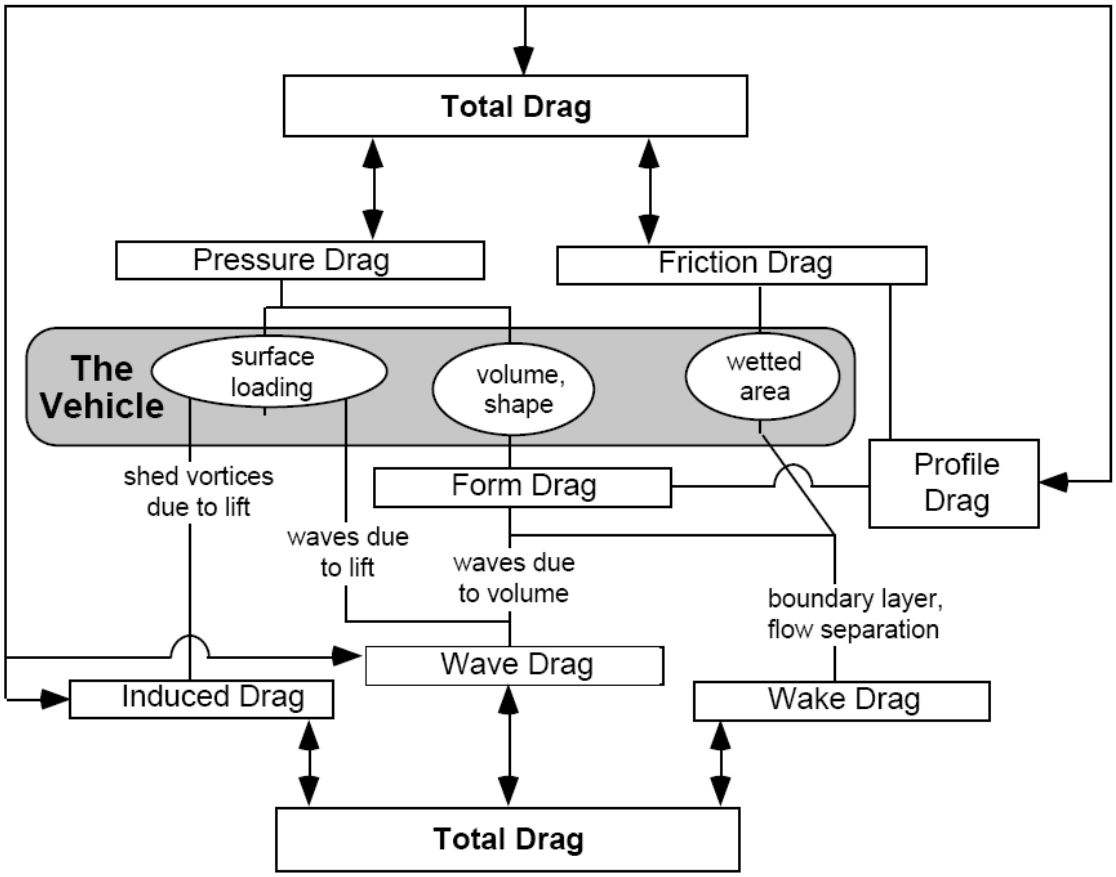
Benaderingen met de computer zijn er pas onlangs in geslaagd deze integratie correct uit te voeren en dan ook nog maar voor een beperkt aantal types van dit probleem.

Ook weten we nu alleen dat de weerstand bestaat maar we hebben nog geen antwoord gevonden op de vraag waarom weerstand bestaat. We zullen dus een andere manier moeten zoeken om te beschrijven waar deze weerstand vandaan komt. Een andere manier om dit te doen is door middel van *weerstandsanalyse.*

Weerstandsanalyse

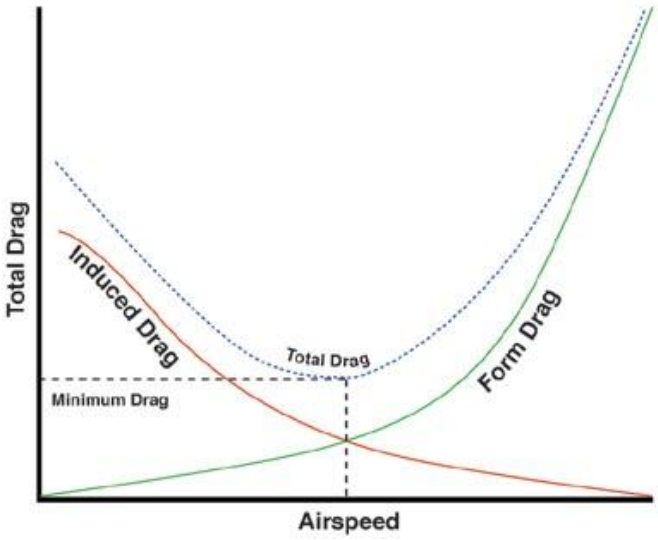
We kunnen de weerstand die ontstaat ook verklaren door deze op te delen in de verschillende 'soorten weerstand' die voorkomen. Als we dit doen kunnen we elk afzonderlijke component los beschouwen en zo kijken waar de grootste boosdoener zit. Zodra je weet welke dat is, kan je je ontwerp zo aanpassen dat deze component een kleinere bijdrage levert aan de totale weerstand. Een opdeling van de verschillende soorten weerstand kan bijvoorbeeld bestaan uit wrijvingsweerstand, golfweerstand, profielweerstand en geïnduceerde weerstand[3]. Er is echter niet een unieke opdeling te vinden van alle weerstand. In figuur 3 is geprobeerd een aantal verschillende opdelingen te laten zien.

[3] Weerstand ten gevolge van lift



Figuur 3: schema voor de totale weerstand

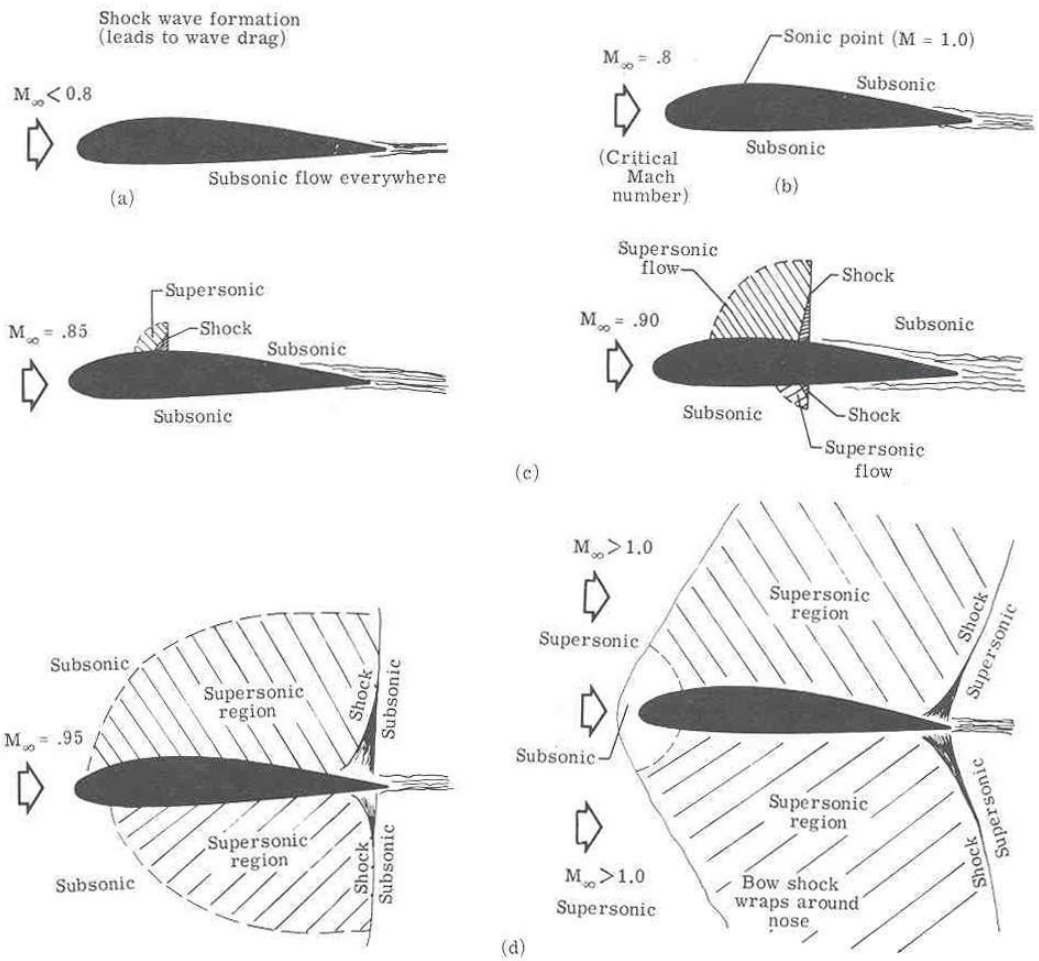
In de praktijk blijkt bijvoorbeeld dat bij een lage snelheid de geïnduceerde weerstand veel groter is dan de weerstand die wordt gecreëerd door het profiel. Omdat een vliegtuig bij een lagere snelheid een grotere hoek met de horizontale as moet hebben om dezelfde lift te genereren zal dit ook zijn uitwerking op de hoeveelheid weerstand hebben. Bij grotere snelheden zal deze geïnduceerde weerstand juist weer afnemen maar zal de profielweerstand weer de overhand nemen.



Figuur 4: relatie totale weerstand met de snelheid (voor lage snelheden).

Zoals al eerder genoemd zullen dit echter niet de boosdoeners zijn bij ons probleem. Dat is namelijk de weerstand die ontstaat uit een schokgolf. Zoals we hiervoor hebben gezien, kunnen oplossingen van partiële differentiaalvergelijkingen schokgolven en dus sprongen gaan vertonen.

Zodra het vliegtuig aankomt bij een kritieke snelheid, nog onder Mach 1, zullen we schokgolven gaan waarnemen. Deze snelheid zullen we aanduiden met subsone snelheden. Deze schokgolven zijn te verklaren omdat de lucht net onder de geluidssnelheid aankomt ten opzichte van de vleugel. Zodra we bij de vleugel aankomen wordt een deel van de luchtdeeltjes omhoog en omlaag geduwd omdat er een object in de weg staat. Vlak boven (en onder) de vleugel zal er dus een grotere hoeveelheid luchtdeeltjes passeren. Dit resulteert in een grotere snelheid dan die van de uniforme stroming. De totale snelheid zal op dit moment dus boven Mach 1 uitkomen. Omdat achter de vleugel de snelheid weer kleiner dan Mach 1 is zal er een schokgolf ontstaan bij deze overgang. In figuur 4 zien we hoe deze schokgolf ontstaat bij het toenemen van de snelheid tot Mach 1.



Figuur 5: subsonische schokgolven

De toename van de weerstand is direct waarneembaar omdat de golfweerstand gerelateerd is aan de aanwezigheid van de schokgolven. Daarnaast wordt de grenslaag ook dikker door de schokgolf omdat er een plotselinge stijging is van de druk op het oppervlak. Hierdoor is ook de profielweerstand groter bij de aanwezigheid van schokgolven. In de praktijk zullen beide

componenten ongeveer evenveel bijdragen aan de totale weerstand. We willen nu graag het punt waar de weerstand plotseling snel toeneemt definiëren. Er worden hiervoor echter verschillende definities gebruikt maar ze duiden wel allemaal ongeveer dezelfde waarde M_{DD}. Één van de meest gebruikte definities maakt gebruik van de helling en dus de afgeleide. Zodra deze helling 0.1 wordt is M_{DD} bereikt. Dit zien we in (2.8).

$$\left.\frac{dC_D}{dM}\right|_{C_L=const.} = 0.1 \tag{2.8}$$

Dit getal is zo belangrijk omdat commerciële luchtvaartmaatschappijen natuurlijk zo min mogelijk brandstof willen verbruiken maar de passagiers zo snel mogelijk op plaats van bestemming willen hebben. Ze zullen dus ook net onder of met snelheid M_{DD} vliegen.

In Figuur 5: subsonische schokgolven hebben we gezien dat het vliegtuig sneller dan Mach 1 vliegt. Dit is echter nog niet zo vanzelfsprekend als dit op het eerste gezicht lijkt.

Prandtl-Glauert singulariteit

Laten we nog eens goed naar de Prandtl-Glauert vergelijking kijken.

$$\left(1-M^2\right)\phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \tag{2.9}$$

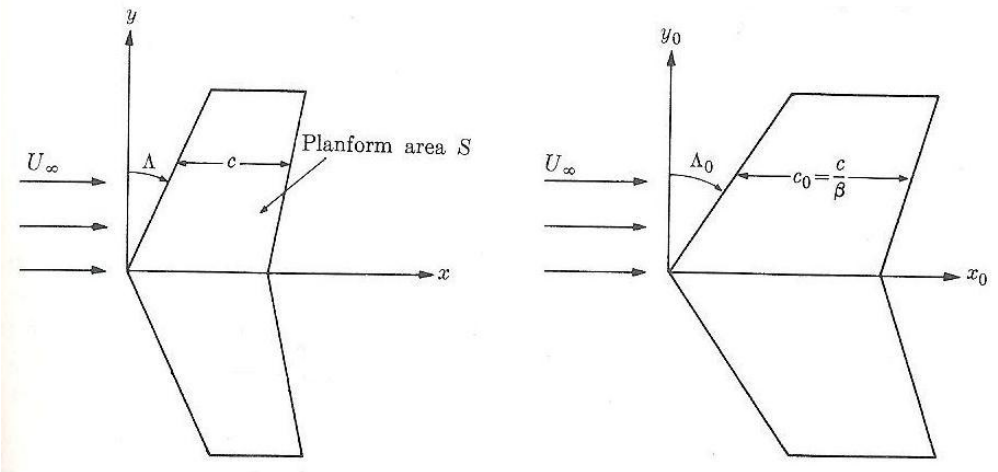
Neem nu de volgende transformatie waarbij $\beta = \sqrt{1-M^2}$:

$$\begin{cases} x_0 = x/\beta \\ y_0 = y \\ z_0 = z \\ \varphi\left(x_0, y_0, z_0\right) = \varphi\left(x, y, z\right) \end{cases} \tag{2.10}$$

Deze kunnen we loslaten op vergelijking (2.9) om de het volgende te verkrijgen:

$$\left(\varphi_0\right)_{x_0x_0} + \left(\varphi_0\right)_{y_0y_0} + \left(\varphi_0\right)_{z_0z_0} = 0 \tag{2.11}$$

We hebben de coördinaten in de x-richting dus uitgerekt met $1/\beta$ en de rest gelaten zoals het was. Maar het resultaat geeft ons de Laplace-vergelijking. Maar bij elke subsonische comperssibele stroming over een dunne vleugel bestaat er een equivalente stroming met constante dichtheid over een tweede vleugel. Deze wordt verkregen door de eerste $1/\beta$ uit te rekken maar alle hellingen van het oppervlak gelijk te houden. Verder moeten de snelheid en stromingscondities wel het zelfde zijn. Dit zien we in figuur 6.



Figuur 6: bovenaanzicht vleugel voor en na transformatie

Voor de druk kunnen we $C_p = -2\varphi_x$ afleiden. Hoe dit gedaan kan worden, is te vinden in 'aerodynamics of wings and bodies'[III]. Als we dit gebruiken kunnen we een verband geven tussen een compressibel en incompressibel ($M = 0$) probleem.

$$C_p = \frac{1}{\beta}\left(C_p\right)_{M=0} \tag{2.12}$$

Hier lopen we echter tegen een probleem aan. Stel $M = 1$, dan is $\beta = 0$ en krijgen we een singulariteit waardoor de weerstand oneindig blijkt te worden.

Toen deze vergelijking voor het eerst werd afgeleid dacht men dan ook het hierdoor onmogelijk was om door de geluidsbarrière $M = 1$ te breken. Dit probleem staat ook wel bekend onder de naam Prandtl-Glauert singulariteit. Ook in de praktijk leek het lange tijd niet mogelijk sneller dan het geluid te gaan. Later bleek echter dat men er toch naast zat en het wel degelijk mogelijk is deze barrière te doorbreken. Toch blijft de snelheid van het geluid een probleem bij vliegtuigen. Het doorbreken ervan komt tegen de hoge prijs van enorme hoeveelheden energie die hiervoor nodig zijn. Gewone motoren bleken dan ook niet krachtig genoeg te zijn om deze grote weerstand de baas te kunnen. Er waren speciale naverbranders nodig die we tegenwoordig op elke straaljager tegenkomen.

Figuur 7: geluidsbarrière

Er treedt ook een ander fenomeen op dat gewoon met het blote oog te zien is. Dit zien we gebeuren in Figuur 7: geluidsbarrière (voor een prachtig filmpje over de geluidsbarrière verwijs ik de lezer door naar youtube[4]). Door het razend snel opwarmen en weer afkoelen van de lucht ten gevolge van de schokgolven ontstaat er een kegel van condens achter het vliegtuig. Deze kegel ontstaat precies op het punt waar ook de schokgolf zich bevindt.

Weerstand berekenen doormiddel van integratie op grote afstand

We willen echter graag een simpele en betrouwbare methode hebben die ons laat zien waar de weerstand vandaan komt en hoe groot deze bijdrage is. Dit kunnen we doen door middel van integratie van de weerstand op grote afstand. We kunnen namelijk de weerstand van een lichaam het beste voorspellen wanneer onze methoden niet exact zijn. Hierbij beschouwen we de totale impulsbalans op een gecontroleerd volume oppervlak ver weg van het lichaam. Dit blijkt veel minder gevoelig te zijn dan de gedetailleerde berekeningen die we met simpele integratie moeten uitvoeren. Deze verre veldanalyse maakt gebruik van de impulsstelling.

Laten we nu eens kijken naar de vector sommatie van alle krachten van de omgeving die op het systeem werken. We zullen dit representeren door $\sum_i F_i$. De tweede wet van Newton zegt nu dat deze sommatie gelijk moet zijn aan de snelheid van de verandering van de impuls van het systeem. Dit komt overeen met in vergelijking (1.3) H veranderen in ρQ.

$$\sum_i F_i = \iiint_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho Q)dV + \oiint_{S+\sigma} \rho Q(Q \cdot n)dS \qquad (2.13)$$

De sommatie aan de linkerkant van de vergelijking (2.13)kunnen we nu opdelen in 2 delen. Namelijk de reactie op de kracht die wordt uitgeoefend door de vloeistof op het lichaam en de kracht die wordt uitgeoefend op het oppervlak S door de omgeving. Dus we krijgen dan:

[4] http://www.youtube.com/watch?v=QX04ySm4TTk&feature=related

$$\sum_i F_i = -F_{body} + \oiint_S (-pn + \tau) dS \tag{2.14}$$

Hierin is p de druk op S en τ de totale schuifspanning uitgeoefend door de omgeving

Als we nu (2.13) en (2.14) combineren krijgen we de volgende vergelijking:

$$F_{body} = -\oiint_S pndS - \iiint_V \frac{\partial}{\partial t}(\rho Q) dV - \oiint_{S+\sigma} \rho Q(Q \cdot n) dS \tag{2.15}$$

Maar ons lichaam bevindt zich op een vaste plek in ons coördinatenstelsel, dus de bijdrage van de tweede integraal rechts van σ zal 0 worden, net als de gehele middelste term. Hiermee komen we dus op de volgende relatief eenvoudige vergelijking uit:

$$F_{body} = -\oiint_S [pn + \rho Q(Q \cdot n)] dS \tag{2.16}$$

We gaan nu een stoorsnelheid q in voeren die voldoet aan $Q = U_\infty + q$. Vergelijking (2.16) kunnen we dan herschrijven als:

$$F_{body} = -\oiint_S \left[(p - p_\infty) n + \rho (U_\infty + q) \left[(U_\infty + q) \cdot n \right] \right] dS \tag{2.17}$$

Wat we gaan doen is een oppervlak S nemen dat een lichaam totaal omsluit. De kracht die werkt op dit lichaam kunnen we nu vastleggen door de impuls over het oppervlakte S te balanceren.

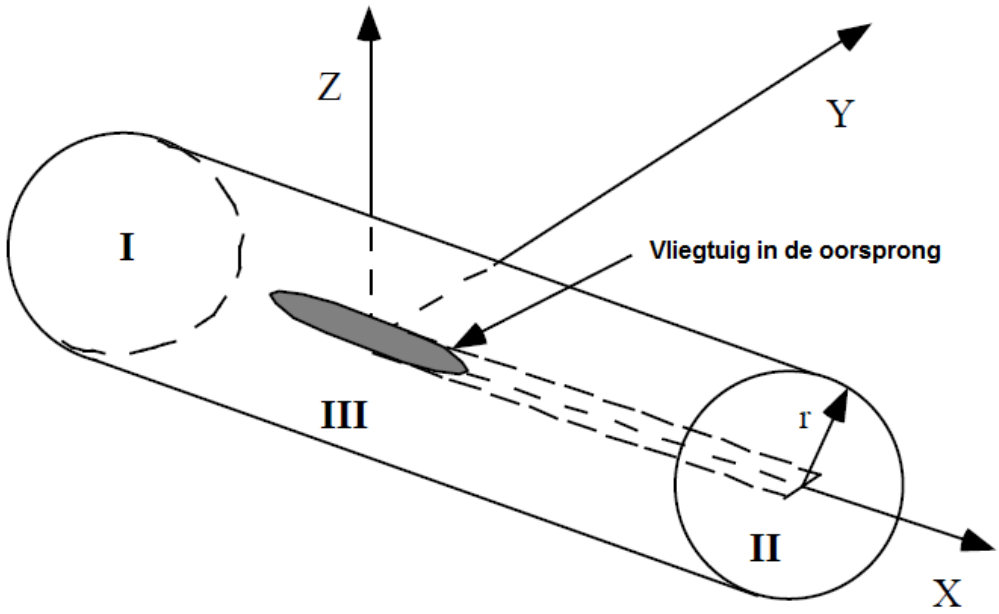
Als we nu naar vergelijking (1.4) kijken en H vervangen door de massa per eenheidsvolume ρ vinden we dat in afwezigheid van bronnen en putten er behoud van massa moet optreden. Dus krijgen we dat het volgende moet gelden:

$$0 = \iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \oiint_{S+\sigma} \rho (Q \cdot n) dS \tag{2.18}$$

In ons geval van een uniforme stroming rond een ondoordringbaar hard voorwerp verdwijnt de eerste integraal. We krijgen dus dat $\oiint_S \rho Q \cdot n ds = 0$. Als we dit gebruiken kunnen we vergelijking (2.17) omschrijven naar vergelijking (2.19).

$$D = -\oiint_S (p - p_\infty) dS - \oiint_S \rho q [(U_\infty + q) \cdot dS] \tag{2.19}$$

Zoals het kopje al aangeeft zullen we de stroming op een grote afstand van de vleugel gaan bekijken. Dit is schematisch weergegeven in figuur 6.



Figuur 8: evaluatie op grote afstand

In (2.19) gaan we nu (2.20) en (2.21) gebruiken die de relaties van dichtheid en druk geven. De afleiding van beide relaties is in het appendix te vinden.

$$\rho \cong \rho_\infty \left(1 - M_\infty \frac{u}{U_\infty}\right) \tag{2.20}$$

$$(p - p_\infty) \cong -\left[U_\infty u + \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right)\right] + \frac{1}{2}\rho_\infty M_\infty^2 u^2 \tag{2.21}$$

Als we die dus combineren krijgen we de volgende uitdrukking:

$$D = \frac{1}{2}\rho_\infty \iint_{I+II} \left[\left(M_\infty^2 - 1\right)u^2 + v^2 + w^2\right] dydz - \rho_\infty \iint_{III} u v_r r d\theta dx \tag{2.22}$$

Hierbij is $v_r^2 = v^2 + w^2$ en $r^2 = x^2 + y^2$.

We willen nu dus dat I heel ver stroomopwaarts en II heel ver stroomafwaarts zit. Daarnaast maken we de straal r ook heel groot. Er geldt dus dat de integraal over I voor $x \to -\infty$ naar nul gaat. Het vliegtuig is hier immers nog niet langs geweest en kan dus ook geen bijdrage aan de weerstand leveren. De integralen over II en III zijn echter een ander verhaal. We zullen deze beide delen nu apart van elkaar gaan bekijken. Allereerst de Integraal over II.

De integraal over II

Als we nu naar de bijdrage van integraal II van de vergelijking (2.22) kijken komen we op het volgende.

$$D_i = \frac{1}{2}\rho_\infty \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(M_\infty^2 - 1\right)u^2 + v^2 + w^2\right] dydz \tag{2.23}$$

Omdat we echter heel ver achter het vliegtuig kijken zal de u component naar 0 gaan. We houden van (2.23) dus alleen het volgende over.

$$D_i = \frac{1}{2}\rho_\infty \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left(v^2 + w^2\right) dydz \tag{2.24}$$

Wederom zullen we gebruik maken van de Prandtl-Glauert vergelijking (1.20). Ook hierbij geldt dat bij $x \to \infty$, $u = 0$. Om deze reden zal dus ook $\phi_{xx} = 0$. Dit heeft het volgende tot gevolg.

$$\phi_{yy} + \phi_{zz} = 0 \tag{2.25}$$

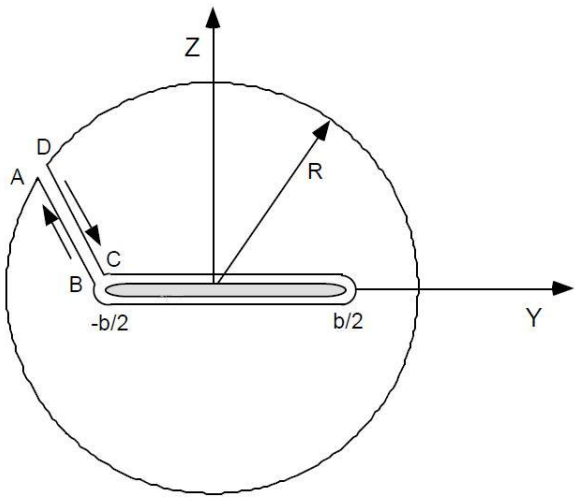
Vervolgens passen we de bekende stelling van Green toe die ons het verband geeft tussen de oppervlakte integraal en contour integraal. Dit geeft ons de volgende gelijkheid.

$$\iint_{II} v^2 + w^2 dS = \iint_{II} \left(\nabla\phi\right)^2 dS = -\int_c \phi \frac{d\phi}{dn} dc \tag{2.26}$$

Waardoor (2.24) nu over gaat in:

$$D_i = -\frac{1}{2}\rho_\infty \int_c \phi \frac{d\phi}{dn} dc \tag{2.27}$$

De vraag is nu natuurlijk wat c, ϕ en $\frac{d\phi}{dn}$ zijn. Laten we eerst eens naar de doorsnede kijken in het YZ- vlak. De doorsnede van de luchtstroom achter het vliegtuig en de contour hier omheen zijn weergegeven in figuur 7.



Figuur 9: een doorsnede in het yz-vlak

Omdat we $R \to \infty$ nemen zal de buitenste contour verdwijnen. Ook zien we dat AB en DC elkaar opheffen. De contour waar we dus naar op zoek zijn is die rond de luchtstroom van het vliegtuig. Als we aannemen dat de breedte b is dan moeten we dus op zoek naar het volgende.

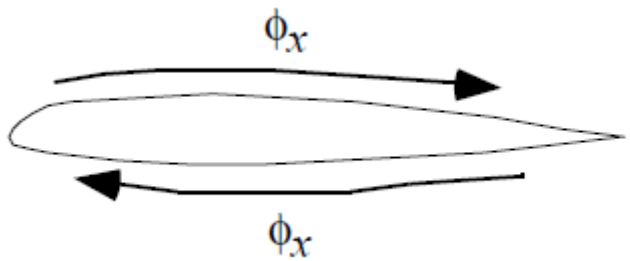
$$D_i = -\frac{1}{2}\rho_\infty \int_{-b/2}^{b/2} (\Delta\phi)_{x=\infty} \frac{d\phi}{dn}_{x=\infty} dy \tag{2.28}$$

We hebben de contour te pakken maar moeten nog op zoek naar $(\Delta\phi)_{x=\infty}$ en $\frac{d\phi}{dn}_{x=\infty}$. Maar we zien dus dat op $x=\infty$ er toch een sprong zit in de potentiaal. Deze sprong heeft een relatie tot de potentiaal sprong die vlak achter de vleugel ontstaat omdat hier de lucht van de onder en bovenkant van de vleugel weer samenkomt. We kunnen deze relatie als volgt aantonen.

$$\Gamma = \oint V \cdot ds \tag{2.29}$$

De vergelijking (2.29) is gelijk aan de contour integraal die de circulatie weergeeft vlak achter de vleugel.

We gaan nu eens kijken naar de circulatie bij de vleugel.



Figuur 10: circulatie bij vleugel

De dominante snelheid is in de x richting, dus $u = \phi_x$. We kunnen nu het volgende voor de circulatie afleiden.

$$\Gamma = \int_{TE_{onder}}^{LE} \phi_x dx + \int_{LE}^{TE_{boven}} \phi_x dx = \int_{TE_{onder}}^{TE_{boven}} \phi_x dx = \phi\Big|_{TE_{onder}}^{TE_{boven}} = \Delta\phi_{TE}$$

De circulatie vlak achter de vleugel blijkt dus ook gelijk te zijn aan die ver achter het vliegtuig. We kunnen dus de volgende gelijkheid gebruiken.

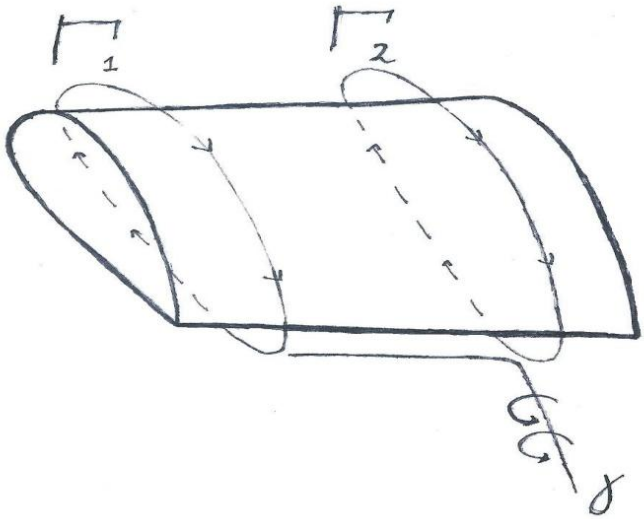
$$(\Delta\phi)_{x=\infty} = \Gamma(y) \tag{2.30}$$

Nu moeten we nog op zoek naar $\frac{d\phi}{dn}_{x=\infty}$. Deze uitdrukking kunnen we vinden doormiddel van wervelbelegging. Als we dit doen krijgen we het volgende.

$$\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-b/2}^{b/2} \gamma(\eta) \ln(y-\eta) d\eta \tag{2.31}$$

De onbekende in deze vergelijking is de γ. Om deze om te schrijven moeten we eerst even snappen hoe deze ontstaat. Stel we hebben een vleugel met 2 wervels, Γ_1 en Γ_2, zie Figuur 11: wervel achter

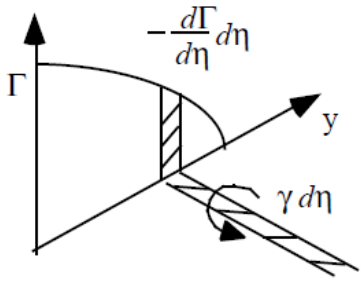
een vleugel. Stel dat de wervel van Γ_1 groter is dan die van Γ_2 dan moet er tussen deze 2 wervels iets verloren zijn gegaan. Een wervel moet namelijk altijd behouden blijven. Dit verschil wordt opgevangen door een nieuwe wervel γ die ontstaat achter de vleugel.



Figuur 11: wervel achter een vleugel

Als we deze wervels vervolgens oneindig dicht bij elkaar nemen, wordt het verschil van de wervels gelijk aan een afgeleide. We kunnen dit schematisch weergeven zoals we zien in Figuur 12: wervel verandering. We krijgen dan de volgende gelijkheid.

$$\gamma(\eta) = -d\Gamma / dy \tag{2.32}$$



Figuur 12: wervel verandering

Als we (2.32) dan invullen in (2.31) krijgen we onze uitdrukking voor $\frac{d\phi}{dn}_{x=\infty}$.

$$\frac{d\phi}{dn}_{x=\infty} = -\frac{1}{2\pi}\int_{-b/2}^{b/2} \frac{d\Gamma / dy}{y-\eta} d\eta \tag{2.33}$$

Als we dan (2.30) en (2.33) in vergelijking(2.28) substitueren, krijgen we de uitdrukking waar we naar op zoek waren.

$$D_i = -\frac{\rho_\infty}{4\pi}\int_{-b/2}^{b/2}\int_{-b/2}^{b/2}\frac{d\Gamma(y_1)}{dy}\frac{d\Gamma(y_2)}{dy}\ln|y_1 - y_2|\,dy_1 dy_2 \tag{2.34}$$

Deze integraal is vervolgens numeriek uit te rekenen voor een bepaalde vleugel of vliegtuig. We zien alleen dat, of we nu wel of geen schokgolven hebben, we deze bijdrage altijd hebben. Hier zit dan ook niet het grote probleem waar we naar op zoek zijn. Die vinden we terug in de integraal over III

De integraal over III

Als we alleen naar III kijken zien we dus dat van (2.22) alleen de laatste term overblijft en dus gaat (2.22) nu over in de volgende vergelijking.

$$D_w = \lim_{r\to\infty}\left(-\rho_\infty r\int_0^{2\pi} d\theta\int_{-\infty}^{\infty} uv_r dx\right) \tag{2.35}$$

We zoeken nu een uitdrukking voor ϕ. We nemen nu aan dat ons vliegtuig heel 'plat' is omdat we vanaf veraf kijken. Daarnaast nemen we aan de ons vliegtuig axi-symmetrisch is. Maar voor $M_\infty > 1$ en $M_\infty < 1$ hebben we verschillende oplossingen.

Voor subsone snelheden hebben we $$\phi = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2 + \beta^2 r^2}} \tag{2.36}$$

En voor supersone snelheden $$\phi = -\frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{x^2 - \beta^2 r^2}} \tag{2.37}$$

We zien nu echter dat $\phi \to 0$ als $r \to \infty$ in (2.36) maar dat hoeft niet te gelden voor (2.37). Hier hebben we namelijk dat als $r \to \frac{x}{\beta}$, ϕ niet naar 0 gaat. Dit is echter een logisch gevolg voor supersone snelheden, want we krijgen hier, zoals eerder genoemd, te maken met schokgolven. Deze singulariteit komt dus overeen met de schokgolf die ontstaat als het vliegtuig door de geluidssnelheid gaat.

We zien dus dat deze integraal de schokgolven uitrekent die ontstaan bij supersonische snelheden. De integraal over II is dus eigenlijk altijd aanwezig terwijl de integraal over III zich pas manifesteert bij snelheden boven en rond Mach 1. In de praktijk blijkt dat deze laatste integraal een relatief grote bijdrage[5] van de gehele weerstand heeft. De conclusie die we hier kunnen trekken is dus dat we op zoek moeten gaan naar vliegtuigvleugels die geen (of een hele kleine) schokgolf opleveren.

[5]Bron: http://www.aoe.vt.edu/~mason/Mason_f/CAtxtChap5.pdf

Hodograaf transformatie

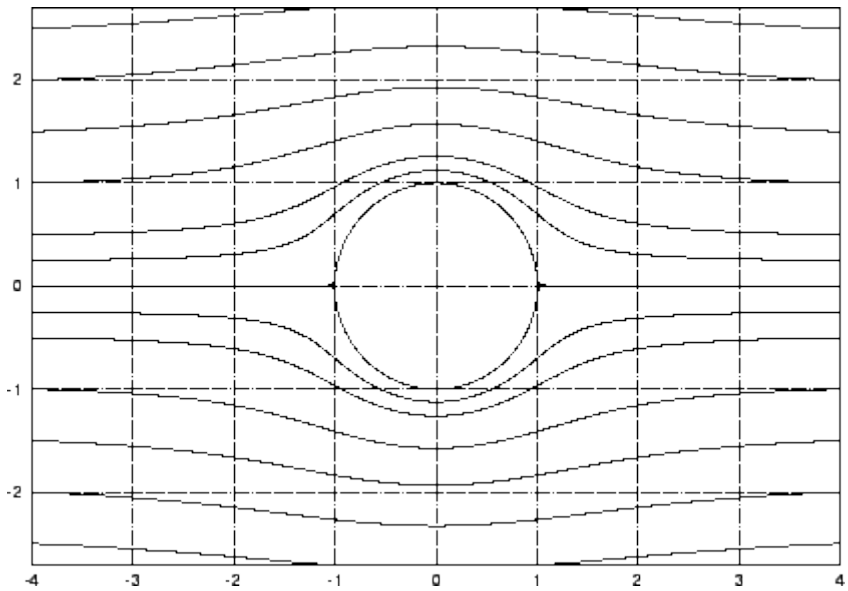
Waarom de hodograaf transformatie

We hebben dus gezien dat bij subsone snelheden ons vliegtuig te maken krijgt met schokgolven die de weerstand erg groot maken. De volgende vraag die we ons nu stellen is of we hier niet vanaf kunnen komen. We zoeken dus een vleugelvorm waarbij de schokgolf verdwijnt of zo klein mogelijk is. Deze vorm zullen we vanaf nu superkritiek noemen. Het antwoord op deze vraag is ja, we kunnen een vleugel vinden zonder of met hele kleine schokgolven. Natuurlijk willen we dan wel graag weten hoe deze vleugels er dan uit zien, maar deze vorm vinden blijkt nog niet zo eenvoudig te zijn.

De truc die we nodig hebben bij het vinden van deze vleugels is de hodograaf transformatie. We moeten op zoek naar de oplossingen van de vergelijkingen voor rotatievrije stroming van een niet viskeuze en samendrukbare vloeistof rond een vleugelsectie in twee dimensies. Hierbij moeten de oplossingen glad, transsoon en stabiel zijn. Er treden echter 2 grote problemen op bij het oplossen van deze vergelijkingen. Het eerste probleem is dat de differentiaalvergelijkingen van elliptische in hyperbolische veranderen bij transsone snelheden. Het tweede probleem is dat onze vergelijkingen niet lineair zijn. En dit is nu juist de reden om de hodograaf transformatie te gebruiken. We zullen door deze transformatie straks namelijk toch in staat zijn de vergelijkingen lineair te krijgen. Om eerst een idee te krijgen wat deze transformatie doet kijken we eerst naar een relatief eenvoudig voorbeeld.

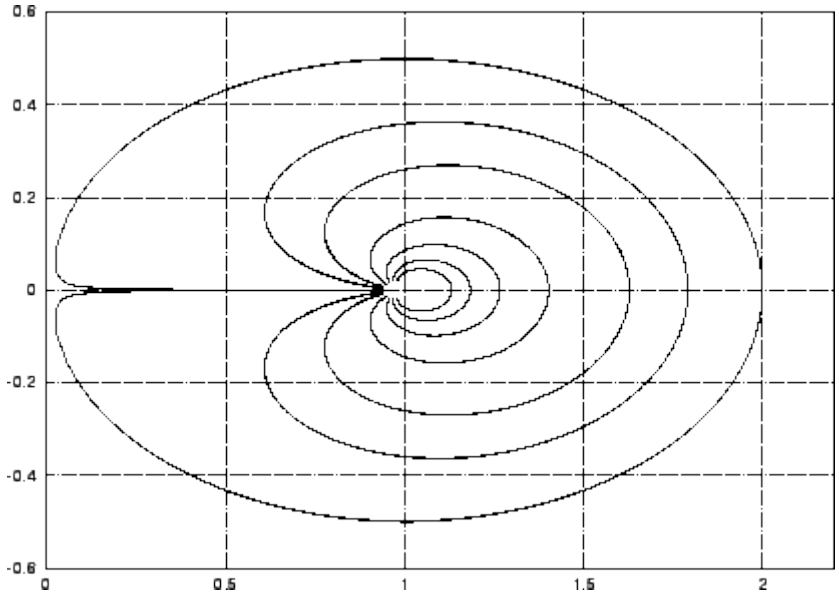
Een eenvoudig hodograaf transformatie

We nemen eerst een uniforme potentiaal stroming rond een cilinder. De cilinder met bijbehorende stroomlijnen zijn nu weergegeven in Figuur 13: stroomlijnen rond een cilinder in het fysische vlak.



Figuur 13: stroomlijnen rond een cilinder in het fysische vlak

Als we op deze figuur nu de hodograaf transformatie toepassen krijgen we de stroomlijnen in het bijbehorende hodograaf vlak. Dit is te zien in Figuur 14: Stroomlijnen rond een cilinder in het hodograaf vlak.



Figuur 14: Stroomlijnen rond een cilinder in het hodograaf vlak

Beide figuren tonen ons dus dezelfde stroomlijnen maar ze zien er totaal anders uit. Dit komt omdat in figuur 2 de werkelijke positie van een deeltje wordt weergegeven en na transformatie en dus in figuur 2 de x en y component van de snelheid wordt weergegeven.

Om in te zien hoe dit werkt, nemen we eerst eens een deeltje dat heel ver van de cilinder is verwijderd. Dit deeltje heeft dus een horizontale snelheid V_∞ en verticale snelheid 0.

Als we de cilinder nu naderen begint de horizontale snelheid langzaam wat af te nemen en krijgt hiervoor in de plaats een verticale snelheid. Een deeltje dat precies richting het midden van de cilinder stroomt, zal in het hodograaf vlak dus direct van $(V_\infty, 0)$ naar $(0,0)$ stromen. Een deeltje hier vlak boven zal in het begin dezelfde weg volgen. Dit deeltje zal naarmate het dichter bij de cilinder komt afnemen qua snelheid. Als dit deeltje dan vlak bij de cilinder aan komt zal de druk door de grote hoeveelheid deeltjes oplopen en zal het op een gegeven moment naar boven moeten. Hierdoor zal de horizontale snelheid weer toenemen. De maximale horizontale snelheid (bijna $2V_\infty$) zal dan precies boven de cilinder worden behaald waarna in precies ongekeerde volgorde hetzelfde pad zal worden doorlopen aan de achterkant van de cilinder.

Let er echter wel op de hodograaf transformatie niet bijectief is. Er zijn namelijk 2 verschillende deeltjes te vinden die in het hodograaf vlak op exact hetzelfde punt worden geprojecteerd.

Formele afleiding van de hodograaf transformatie

Nu we een voorbeeld hebben gezien gaan we eens naar de afleiding van de hodograaf transformatie kijken. Allereerst moeten we een paar aannames maken. We zullen dan ook aannemen dat we te maken hebben met een rotatievrije stroming van een niet visceuse en samendrukbare vloeistof. Verder is deze stroming glad, transsoon, stabiel en kijken we naar slechts 2 dimensies. De lucht is niet noodzakelijk onsamendrukbaar.

Omdat de snelheidspotentiaal ϕ en de stroomfunctie ψ overal loodrecht op elkaar staan hebben we de volgende twee vergelijkingen:

$$\begin{aligned}\phi_x &= \psi_y \\ \phi_y &= -\psi_x\end{aligned} \tag{3.1}$$

De snelheidvector $\vec{V}$ kunnen we ook uitdrukken in zijn grootte V en richting θ. Dit lijdt tot de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned}d\phi &= \phi_x dx + \phi_y dy = V\left(\cos\theta dx + \sin\theta dy\right) \\ d\varphi &= \psi_x dx + \psi_y dy = \rho V\left(-\sin\psi dy + \cos\psi dx\right)\end{aligned} \tag{3.2}$$

We kunnen de stroom en potentiaal functie ook schrijven als functies van V en θ.

$$\begin{aligned}d\phi &= \phi_V dV + \phi_\theta d\theta \\ d\varphi &= \psi_V dV + \psi_\theta d\theta\end{aligned} \tag{3.3}$$

Als we nu (3.2) en (3.3) combineren krijgen we de volgende vergelijkingen voor dx en dy

$$\begin{aligned}dx &= x_V dV + x_\theta d\theta \\ dy &= y_V dV + y_\theta d\theta\end{aligned} \tag{3.4}$$

Hierin zijn:

$$\begin{aligned}x_V &= \frac{1}{V}\left(\phi_V \cos\theta - \frac{1}{\rho}\psi_V \sin\theta\right) \\ x_\theta &= \frac{1}{V}\left(\phi_\theta \cos\theta - \frac{1}{\rho}\psi_\theta \sin\theta\right) \\ y_V &= \frac{1}{V}\left(\phi_V \sin\theta - \frac{1}{\rho}\psi_V \cos\theta\right) \\ y_\theta &= \frac{1}{V}\left(\phi_\theta \sin\theta - \frac{1}{\rho}\psi_\theta \cos\theta\right)\end{aligned} \tag{3.5}$$

Maar als we $x_{V\theta} = x_{\theta V}$, $y_{V\theta} = y_{\theta V}$ en $\phi_{V\theta} = \phi_{\theta V}$ nemen kunnen we x en y elimineren uit vergelijkingen (3.5). Hiermee krijgen we dan:

$$V\frac{d}{dV}\left(\frac{1}{\rho V}\right)\psi_{\theta\theta} = \frac{d}{dV}\left(\frac{V}{\rho}\right)\psi_V + \frac{V}{\rho}\psi_{VV} \tag{3.6}$$

Denk er hierbij om dat ρ een functie is van V. Deze vergelijking is nog te versimpelen door het Mach getal M in te voeren dat voldoet aan de vergelijking:

$$M^2 = \rho V \frac{d}{dV}\left(\frac{1}{\rho}\right) \tag{3.7}$$

Dit geeft ons dan:

$$\left(M^2-1\right)\psi_{\theta\theta}=\left(M^2+1\right)V\psi_V+V^2\psi_{VV} \tag{3.8}$$

Maar kijk nu eens goed naar deze vergelijking. We zien dat M geen functie is van ψ en dus is vergelijking (3.8) lineair met niet constante coëfficiënten. We zijn er dus doormiddel van transformeren in geslaagd een niet lineaire differentiaalvergelijking toch lineair te maken.

Als we goed kijken naar (3.8) zien we dat als $M^2<1$ we te maken hebben met een elliptisch systeem waarbij de coëfficiënten analytisch zijn. En ook zien we dat we te maken met een 2e orde lineaire differentiaalvergelijking. Een interessant resultaat is wel dat er een singulariteit ontstaat bij $M^2=1$ die overeen komt met de sonische lijn[6].

Maar een differentiaalvergelijking zonder randvoorwaarden is natuurlijk niet op te lossen dus ook daar moeten we nog even naar kijken.

Niet lineair randvoorwaarde probleem

De eerste randvoorwaarde die moeten gelden bij het oppervlak van de vleugel is vrij eenvoudig, namelijk $\psi=0$. De randvoorwaarde voor de snelheid $V=V(s)$ is echter niet zo eenvoudig. Hierin is s de omtrek van de dwarsdoorsnede van een vleugel. Wanneer de snelheid dan ook groot genoeg wordt zal de stroming op sommige punten transsoon worden. Als dit gebeurt, hebben we gezien dat we differentiaalvergelijkingen krijgen van gemengde types. De potentiaal $\varphi(s)$ van de snelheid en de circulatie Γ zullen in ieder geval moeten voldoen aan de vergelijkingen (3.9) en (3.10).

$$\varphi(s)=\int_0^s V(\tilde{s})\,d\tilde{s} \tag{3.9}$$

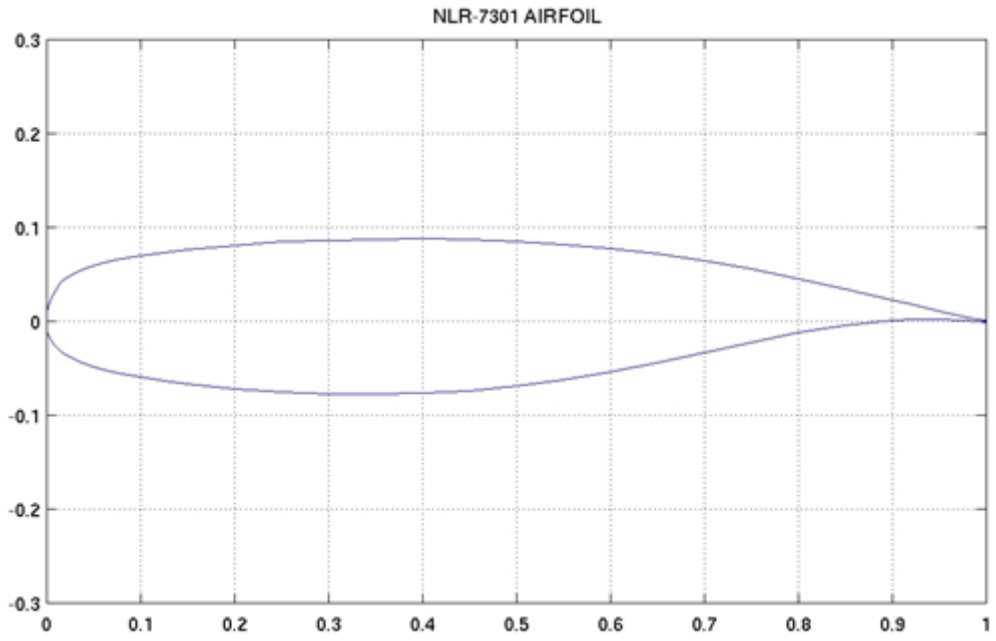
$$\Gamma=\oint V(\tilde{s})\,d\tilde{s} \tag{3.10}$$

We kunnen op deze manier een niet lineair randvoorwaardenprobleem behandelen weer met behulp van de methode van karakteristieken.

[6] Met een sonische lijn wordt een lijn bedoeld waar het Mach getal gelijk aan 1 is en dus de luchtstroom de geluidssnelheid heeft.

Superkritieke vleugels

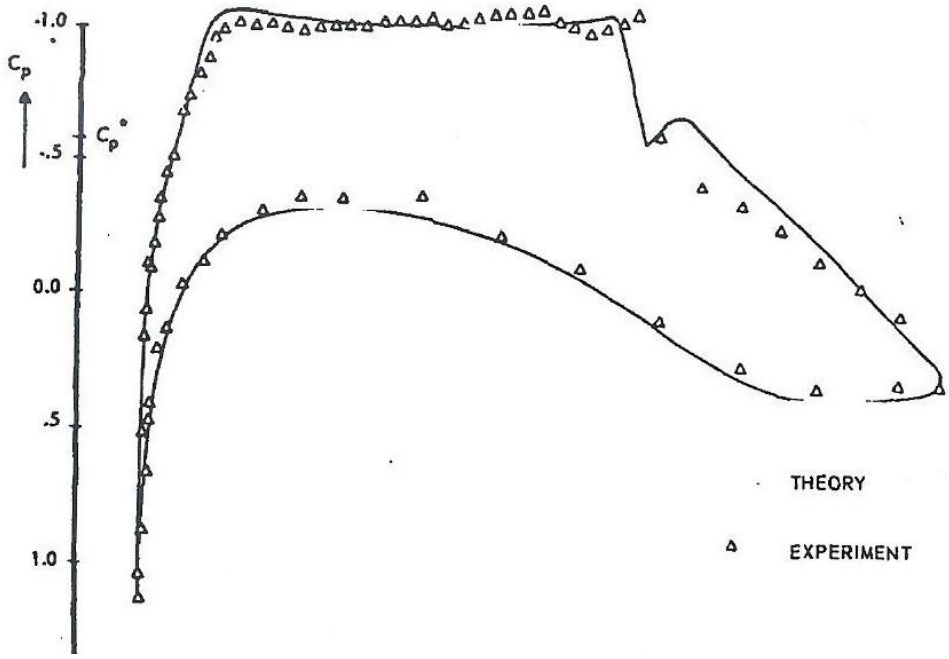
Er is een computeralgoritme ontwikkeld genaamd FLOW die in staat is deze differentiaalvergelijking op te lossen met onze gevonden randvoorwaarden. Zelfs voor de singulariteit is een oplossing gevonden in dit algoritme. Voor de details van dit algoritme verwijs ik door naar het boek van Bauer, Garabedian en Korn[I].



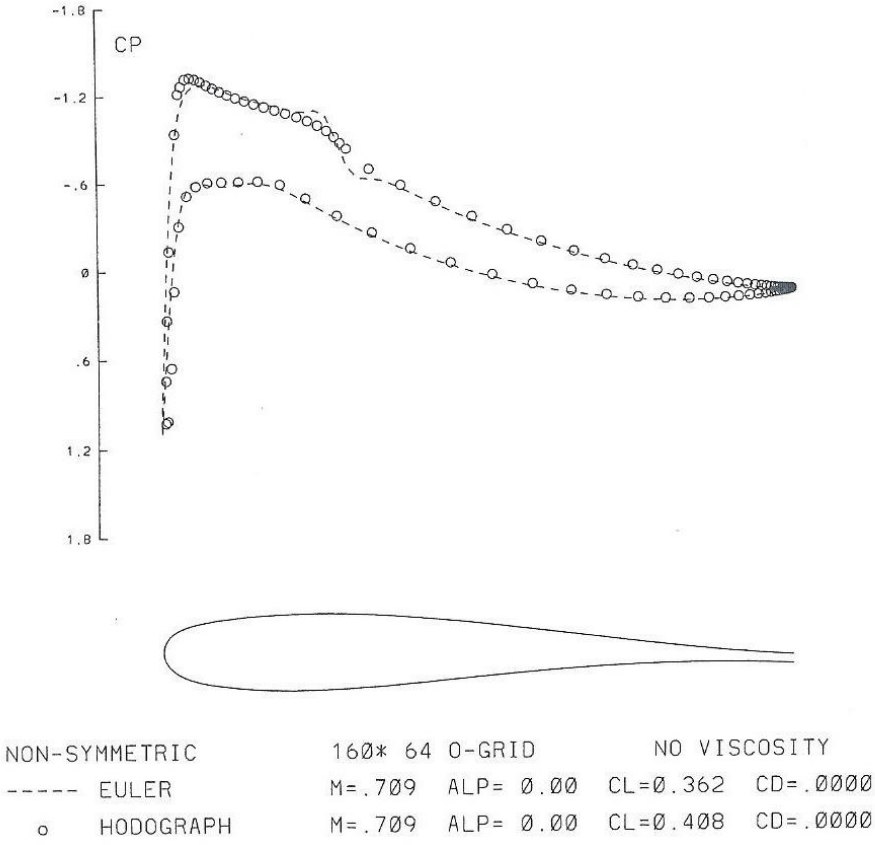
Figuur 15: superkritieke vleugelvorm

De vleugel waar we ons hele verhaal naar op zoek zijn geweest kunnen we nu dus vinden met dit algoritme en een resultaat hiervan vinden we in figuur 10. De vleugel heeft een soort 'hangbuikje' en loopt aan de onderkant achteraan wat naar boven.

We kunnen ook nog naar de drukverdeling kijken bij onze vleugel. Bij een 'normale vleugel' verwachten we bij een transsone snelheid een plotseling verschil in druk. In figuur 11 zien we dat dan ook duidelijk gebeuren.



Figuur 16: schokgolf in drukverdeling



Figuur 17: drukverdeling bij superkritieke vleugel

In dit figuur geeft elke lijn de druk aan onder en boven de vleugel. De as is hierbij omgedraaid zodat het overeenkomt met onze intuïtie. We willen immers dat een vliegtuig omhoog gaat dus moet dat de druk onder de vleugel groter zijn dan er boven. Op deze manier komt de bovenste lijn dus

overeen met de bovenkant van de vleugel waar de druk dan weer het kleinste is. Zoals we al eerder gezien hebben zat aan de bovenkant van de vleugel het grote probleem vanwege het gebied met het Mach getal kleiner dan 1. In figuur 11 komt dan ook duidelijk de schok terug die ontstaat bij de schok achter dit gebied.

Als we echter kijken naar onze superkritieke vleugel in figuur 12 zien we dat deze schok zo goed als verdwenen is.

We zijn er dus blijkbaar in geslaagd een vleugel te ontwerpen die met transsone snelheden toch vrij efficiënt kan vliegen.

Conclusie

Door een aantal behoudswetten te analyseren zijn we er achter gekomen dat er drukspronigen kunnen plaatsvinden in stromingen. Een vliegtuig dat transsoon vliegt krijgt dan ook te maken met deze drukverschillen die we schokgolven hebben genoemd. Ons doel was uiteindelijk de weerstand van het vliegtuig zo laag mogelijk te krijgen bij deze snelheden.

We moesten dus op zoek naar wat de grootste bijdrage gaf aan deze weerstand. De simpele integratie bleek hier geen antwoord op te hebben maar op basis van integratie op grote afstand is dat wel gelukt. Hier hebben we kunnen zien dat de schokgolven een dergelijk grote bijdrage aan de totale weerstand geven dat het zeer interessant is deze zo klein mogelijk te maken.

Het probleem dat we toen tegenkwamen was een niet lineaire differentiaalvergelijking. Ondanks dat de computers steeds sneller worden, is dit nog steeds een te moeilijk en groot probleem. G.I. Taylor zei ooit over de Navier-Stokes vergelijkingen: 'That we have written an equation does not remove from the flow of fluids its charm or mystery or its surprise'[ll]

Om deze schokgolven te lijf te gaan moeten we dus eerst zorgen dat onze differentiaalvergelijkingen lineair worden. De grote truc hierbij was het gebruik maken van de hodograaf transformatie. Waar normaal de snelheid als afhankelijke en plaats als afhankelijke variabele wordt gebruikt draaien we dit in ons geval eens om. Het resultaat is een differentiaalvergelijking die wel degelijk lineair is. De randvoorwaarden zijn hierbij zo te veranderen dat ook deze door de computer op te lossen zijn.

Door deze lineaire differentiaalvergelijking zijn we nu wel in staat geschikte profielen te vinden. Uiteindelijk hebben we dus vleugels gevonden die niet of nauwelijks last hebben van schokgolven bij transsone snelheden.

Kijk de volgende keer als u met het vliegtuig gaat dus naast de film die er draait of het prachtige uitzicht ook eens naar de vorm van de vleugels die er aan hangen. Er schuilt een hoop prachtige wiskunde achter.

Appendix

A

We beginnen bij Bernoulli die ons zegt dat:

$$\frac{1}{2}V^2 + \int \frac{dp}{\rho(p)} = Cst \tag{3.11}$$

Verder nemen we aan dat de stroming insentroop is. Dit geeft ons de volgende vergelijking:

$$p = cst\rho^{\gamma} \tag{3.12}$$

En ook ver achter het vliegtuig geld dezelfde relatie:

$$p_{\infty} = cst\rho_{\infty}{}^{\gamma} \tag{3.13}$$

Hierbij is γ een constante die afhangt van de vloestof of gas waardoor het voorwerp beweegt. In ons geval is dat lucht en is γ ongeveer gelijk aan 1,4.

We kunnen nu (3.11) omschrijven met behulp van (3.12). Door eerst dp te vervangen door $d(cst\rho^{\gamma})$ vervolgens de integraal uit te rekenen en als laatste (3.12) nog een keer toe te passen krijgen we dit resultaat:

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} = cst \tag{3.14}$$

De definitie van het geluid ziet als volgt uit:

$$a^2 \equiv \frac{dp}{d\rho} \tag{3.15}$$

Ook dit is te herschrijven en dan krijgen we:

$$a^2 \equiv \gamma\frac{p}{\rho} \tag{3.16}$$

Omdat Bernoulli ons zegt dat (3.14) constant moet zijn, moet het zelfde gelden ver achter het vliegtuig. Omdat deze constanten hetzelfde zijn kunnen we dit dus ook aan elkaar gelijk stellen.

$$\frac{1}{2}V^2 + \frac{a^2}{\gamma-1} = cst = \frac{1}{2}U_{\infty}{}^2 + \frac{a_{\infty}{}^2}{\gamma-1} \tag{3.17}$$

Het herschrijven hiervan geeft ons:

$$\frac{a^2}{a_{\infty}^2} = 1 + \frac{\gamma-1}{2}\left(\frac{U_{\infty}^2 - V^2}{a_{\infty}^2}\right) = 1 + \frac{\gamma-1}{2}M_{\infty}^2\left(1 - \frac{V^2}{U_{\infty}^2}\right) \tag{3.18}$$

Om de constante uit (3.12) en (3.13) kwijt te raken, delen we deze weg op de volgende manier:

$$\frac{a^2}{a_\infty^2} = \frac{p}{p_\infty}\frac{\rho_\infty}{\rho} = \frac{cst\rho^\gamma}{cst\rho_\infty{}^\gamma}\frac{\rho_\infty}{\rho} = \left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\right)^{\gamma-1} \tag{3.19}$$

En de laatste 2 vergelijkingen samen geven ons dan:

$$\frac{\rho}{\rho_\infty} = \left[1+\frac{\gamma-1}{2}M_\infty^2\left(1-\frac{V^2}{U_\infty^2}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \tag{3.20}$$

We maken nu gebruik van de transformatie die de uniforme stroming scheidt van de snelheidscomponenten van het vliegtuig $V = \left(U_\infty + u, v, w\right)$.

$$\frac{a^2}{a_\infty^2} = 1-\frac{\gamma-1}{2}\frac{M_\infty^2}{U_\infty^2}\left(2uU_\infty + u^2 + v^2 + w^2\right) \tag{3.21}$$

Omdat we zo ver van de vleugel kijken zijn hogere orde termen te verwaarlozen en kunnen we gelineariseerde stromingsrelaties gebruiken.

$$\rho \cong \rho_\infty\left(1-M_\infty\frac{u}{U_\infty}\right) \tag{3.22}$$

Voor isentrope stroming kunnen we voor de dichtheid dus de (3.22) gebruiken.

B

We combineren (3.12) en (3.13):

$$p - p_\infty = \frac{1}{\gamma}\left(\rho a^2 - \rho_\infty a_\infty^2\right) \tag{3.23}$$

Herschrijven geeft ons dan:

$$p - p_\infty = \frac{\rho_\infty a_\infty^2}{\gamma}\left(\frac{\rho}{\rho_\infty}\left(\frac{a}{a_\infty}\right)^2 - 1\right) \tag{3.24}$$

Als we nu relatie (3.19) gebruiken krijgen we:

$$p - p_\infty = \frac{\rho_\infty a_\infty^2}{\gamma}\left(\left(\frac{a^2}{a_\infty^2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1\right) \tag{3.25}$$

Invullen van (3.21) geeft:

$$p - p_\infty = \frac{\rho_\infty a_\infty^2}{\gamma}\left(\left(1 - \frac{\gamma-1}{2}\frac{M_\infty^2}{U_\infty^2}\left(2uU_\infty + u^2 + v^2 + w^2\right)\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1\right) \tag{3.26}$$

Om deze uitdrukking wat te versimpelen definiëren we allereerst een A als:

$$\frac{\gamma-1}{2}\frac{M_\infty^2}{U_\infty^2}\left(2uU_\infty + u^2 + v^2 + w^2\right) := \left(\gamma - 1\right)A \tag{3.27}$$

Hierdoor komt (3.26) er zo uit te zien:

$$p - p_\infty = \frac{\rho_\infty a_\infty^2}{\gamma}\left(\left(1 - \left(\gamma-1\right)A\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} - 1\right) \tag{3.28}$$

Een reeksontwikkeling geeft ons het volgende resultaat:

$$p - p_\infty \approx \frac{\rho_\infty a_\infty^2}{\gamma}\left(1 - \frac{\gamma}{\gamma-1}\left[\left(\gamma-1\right)A\right] + \frac{1}{2}\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(\frac{\gamma}{\gamma-1} - 1\right)\left[\left(\gamma-1\right)A\right]^2 + \ldots - 1\right) \tag{3.29}$$

Herschrijven geeft:

$$p - p_\infty \approx \rho_\infty a_\infty^2\left(A + \frac{1}{2}A^2 + \ldots\right) \tag{3.30}$$

Als we dit vervolgens afkappen bij de kwadratische term en A weer invullen krijgen we ons gezochte resultaat:

$$\left(p - p_\infty\right) \cong -\left[U_\infty u + \frac{1}{2}\left(u^2 + v^2 + w^2\right)\right] + \frac{1}{2}\rho_\infty M_\infty^2 u^2 \tag{3.31}$$

Bibliografie

I) Bauer, F. Garabedian, P. en Korn, D. (1972), *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, 66: Supercritical Wing Sections

II) *R. P. Feynman, R. B. Leighton, M. Sands, The Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1964), vol. 2, p. 41.11.*

III) Ashley, H. and Landal, M. (1985), *Aerodynamics of wings and bodies*

Veldman, A.E.P. (2001), *Collegedictaat Partiële Differentiaalvergelijkingen*

Chen, C. K. and Garabedian, P.R. (1998), *Complex Analysis of Transonic Flow*

Sobieczky, H. and Seebass, A.R. (1984), *Annual Review of Fluid machanics,* Vol. 16, Pages 337-363

Nieuwland, G.Y. and Spee, B.M. (1973), *Annual Review of Fluid machanics,* Vol. 5, Pages 119-150

http://www.aerojockey.com/papers/hodograph/hodograph.html, bekeken op 21-06-'09

http://www.aoe.vt.edu/~mason/Mason_f/ConfigAero.html, bekeken op 23-07-'09

http://1.bp.blogspot.com/_ZIZw_OPGhDg/R2TtQk3s9dI/AAAAAAAAAPo/_sSGVVMExFs/s1600-h/shockwave.gif

http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/63/F-8A_NASA_1973_EC73-3468.jpg

http://en.wikipedia.org/wiki/File:Drag_Curve_2.jpg

http://www.aerospaceweb.org/question/airfoils/supercritical/transflow.jpg

http://www.aerospaceweb.org/question/airfoils/supercritical/whitcomb.gif

http://www.ae.uiuc.edu/m-selig/ads/afplots/nlr7301.gif

http://farm3.static.flickr.com/2159/1579046348_7e3d4a337e_o.jpg