rijksuniversiteit groningen

faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen

Door de middens van de koorden

Bachelorondersoek Wiskunde

Juli 2012

Student: M.L. van Linschoten

Eerste Begeleider: Prof. dr. J. Top

Tweede Begeleider: Prof. dr. E.C. Wit

Inhoudsopgave

1 Inleiding **3**

2 Koordemiddens **5**
2.1 Introductie eenvoudig voorbeeld 5
2.2 Hoofdstelling van de symmetrische polynomen met twee variabelen 8
2.3 Vergelijking koordemiddenoppervlak 10
2.4 Graad vergelijking koordemiddenoppervlak 10

3 Kubische krommen **12**
3.1 Kubische kromme 1: $\mathbf{y^2 = x^3 - x}$ 13
3.2 Kubische kromme 2: $\mathbf{y^2 = x^2(x + 1)}$ 15
3.3 Kubische kromme 3: $\mathbf{y^2 = x^3 - 4x + 4}$ 17
3.4 Kubische kromme 4: $\mathbf{y^2 = x^3}$ 18
3.5 Kubische kromme 5: $\mathbf{y^2 = x^2(x - 1)}$ 19
3.6 De vorm van de punten op de kubische kromme 21
3.7 Het derde snijpunt op $\mathbf{y^2 = x^3 - x}$ 22

4 Het klassieke probleem **26**
4.1 Snijkromme vangen in kubische kromme 26
4.2 Koordemiddenoppervlak snijkromme 30

5 Conclusie **32**

Referenties **33**

A Bijectie **34**

B Maplecodes **35**
B.1 Afbeelding koordemiddenoppervlak zonder complexe t en s 35
B.2 Afbeelding koordemiddenoppervlak inclusief complex geconjugeerde t en s 35
B.3 Berekenen graad koordemiddenoppervlak 35
B.4 Afbeeldingen 2D-grafieken 35
B.5 Het vinden van de vergelijkingen van de koordemiddenoppervlakken van de kubische krommen 35
B.6 Afbeeldingen koordemiddenoppervlakken kubische krommen 37
B.7 Singulariteiten koordemiddenoppervlakken kubische krommen 37
B.8 Elliptische cilinder, ellipsoïde en snijkromme 38
B.9 Vergelijking en afbeelding koordemiddenoppervlak snijkromme 38
B.10 Singulariteiten snijkromme 39
B.11 Afbeelding singulariteiten snijkromme 39

1 Inleiding

Op de vierde verdieping in de Bernoulliborg, van de Rijksuniversiteit Groningen, staat een vitrinekast met daarin verschillende gipsmodellen. Het gipsmodel dat centraal staat in deze scriptie, is gemaakt door dhr. F. Böhmländer aan het einde van de negentiende eeuw in München. (De foto op het voorblad is dit gipsmodel.) Dit deed hij onder leiding van Professor Finsterwalder. In 1892 is door dhr. Walther von Dyck een catalogus geschreven met beschrijvingen van verschillende modellen, apparaten en instrumenten. Hierin heeft professor Finsterwalder een beschrijving gegeven van dit gipsmodel. Het gipsmodel stelt het reële deel van het koordemiddenoppervlak voor van de snijkromme tussen een elliptische cilinder en een ellipsoïde; in deze scriptie heet dit het klassieke probleem. (Dyck, W. 1892)

In 1911 bracht dhr. Martin Schilling ook een catalogus uit over wiskundige modellen. Hierin benoemt hij verschillende series van modellen; *één* van de modellen is het gipsmodel. (Schilling, M. 1911) Deze catalogus werd gemaakt, omdat de modellen die erin staan te koop werden aangeboden. Hier hebben verschillende universiteiten in Nederland gebruik van gemaakt; onder andere de universiteiten in Utrecht, Amsterdam, Leiden en Groningen. Bij de modellen die in Groningen te vinden zijn wordt onderzocht wat de wiskundige achtergrond van deze modellen is. Er wordt ook gezocht naar een duidelijke wiskundige beschrijving van deze modellen. Het model uit deze scriptie komt uit serie XXX en heeft modelnummer 5. (Rijksuniversiteit Groningen, 2012)

Het doel van deze scriptie is de verzameling koordemiddens van een gegeven kromme te bestuderen, te beschrijven en daarmee begrijpen wat het gipsmodel voorstelt. Zoals eerder genoemd stelt het gipsmodel een koordemiddenoppervlak voor; in het volgende hoofdstuk zal dan ook worden uitgelegd wat dit voor oppervlak is. Om dit te begrijpen moet eerst het begrip koordemidden worden toegelicht; ook dit zal in hetzelfde hoofdstuk gebeuren. Dit hoofdstuk draait om een eenvoudig voorbeeld om deze twee begrippen te illustreren. In dit voorbeeld wordt gezocht naar het reële deel van zon oppervlak. Ook worden er een aantal eigenschappen bij dit voorbeeld besproken, zoals de gladheid en de graad van de vergelijking van het ontstane oppervlak.

In het derde hoofdstuk worden vijf verschillende gevallen bestudeerd van een kubische kromme in weierstrass-vorm. Bij elk geval wordt weer gezocht naar het reële deel van het koordemiddenoppervlak. Hierbij wordt ook gekeken naar de singulariteiten die deze oppervlakken bevatten en hoe deze singulariteiten tot stand komen. Ten twee wordt gekeken naar de vorm van de puntenparen die een reëel koordemidden hebben. Tot slot wordt in dit hoofdstuk een manier besproken om het derde snijpunt te vinden bij *één* van deze kubische krommen.

Het vierde hoofdstuk richt zich volledig op het gipsmodel. De koordemiddens uit hoofdstuk 2 lijken erg op de koordemiddens uit hoofdstuk 3. In hoofdstuk 4 wordt onderzocht of het klassieke probleem van het gipsmodel te vangen is in het probleem van de kubische krommen, besproken in hoofdstuk 3. Uiteindelijk wordt het oppervlak van het gipsmodel geconstrueerd en bij dit oppervlak worden ook de singulariteiten bekeken.

Tot slot wordt er een conclusie geformuleerd bij verschillende punten die besproken zijn. Hierin is te lezen dat het gipsmodel verkeerd in de vitrinekast stond. De foto op het voorblad is niet het juiste oppervlak; een foto van het juiste oppervlak is te vinden in deze conclusie.

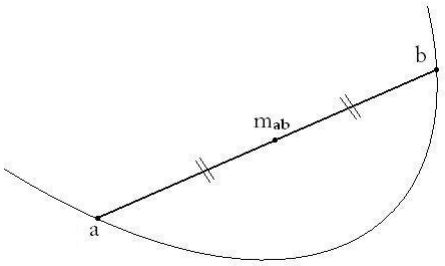
Er zijn een aantal appendices. De eerste appendix bevat een bewijs dat nodig is om

te bewijzen dat het oppervlak uit hoofdstuk 2 glad is. Verder zijn er een aantal dingen met de computer uitgerekend en getekend. De andere appendices zijn de codes die hierbij gebruikt zijn. Het programma dat hiervoor gebruikt is, is Maple 13. In de scriptie staat vermeldt wanneer er een appendix hoort bij een bepaalde sectie of afbeelding.

2 Koordemiddens

In dit hoofdstuk zullen de begrippen *koordemidden* en *koordemiddenoppervlak* geïntroduceerd worden. Verder wordt door middel van een voorbeeld dit oppervlak geconstrueerd en er wordt bekeken of dit oppervlak glad is. Ook wordt de graad van de vergelijking van dit koordemiddenoppervlak bekeken.

Een koorde is een lijnstuk tussen twee verschillende punten op een kromme. Het midden van een koorde heet een koordemidden. Bij een kromme kan bij elk punt op de kromme in combinatie met elk ander punt op de kromme een koorde geconstrueerd worden. Er bestaan dus veel verschillende koordemiddens bij een kromme. In afbeelding 1 is het koordemidden m_{ab} bij de punten a en b weergegeven; dit heet ook wel het koordemidden bij het puntenpaar (a, b).



Afbeelding 1. Koordemidden.

2.1 Introductie eenvoudig voorbeeld

De kromme C wordt, voor vaste $n \in \mathbb{N}$, gedefinieerd door het beeld van de afbeelding

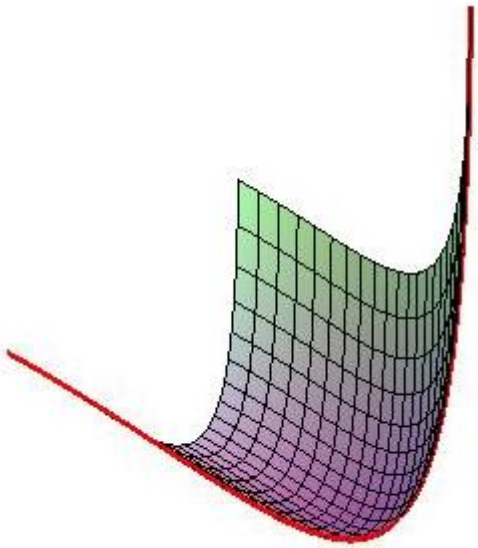
$$\phi(v) = (v, v^2, v^n),$$

waarbij $v \in \mathbb{C}$. De willekeurige punten p en q op C kunnen geschreven worden als $p = (t, t^2, t^n)$ en $q = (s, s^2, s^n)$. De punten op een kromme kunnen worden opgevat als vectoren, zodoende wordt het koordemidden m bij p en q gegeven door:

$$m = \left(\frac{t+s}{2}, \frac{t^2+s^2}{2}, \frac{t^n+s^n}{2} \right). \tag{1}$$

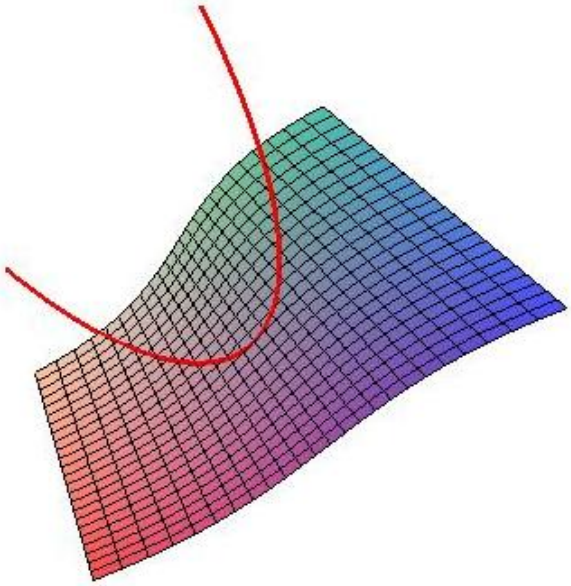
Alle mogelijke koordemiddens bij een vast punt p en een ander willekeurig punt op C vormen een nieuwe kromme en wanneer p ook gevarieerd wordt, vormen al deze krommen bijna altijd een oppervlak in de drie-dimensionale ruimte; dit oppervlak heet het koordemiddenoppervlak M. Er geldt dus $m \in M$. Het wordt geen oppervlak als voor de kromme een rechte lijn wordt gekozen; dan is het resultaat de lijn zelf.

Om een reëel deel van het koordemiddenoppervlak van C te vinden kunnen er reële waarden voor t en s worden ingevuld. Het resultaat is het koordemiddenoppervlak in afbeelding 2; hierbij is gekozen voor $n = 3$. De rode kromme is de kromme C.



Afbeelding 2. Koordemiddenoppervlak met t, $s \in \mathbb{R}^3$ (appendix: B.1).

Echter zijn er ook complexe puntenparen waarbij het koordemidden reëel is. Wanneer deze puntenparen ook worden meegenomen wordt er een stuk aan het oppervlak toegevoegd, ten opzichte van afbeelding 2. Hoe de vergelijking van dit nieuwe oppervlak gevonden wordt zal in paragraaf 2.3 besproken worden. In afbeelding 3 is dit oppervlak, van volledige reële deel, weergegeven. Ook in deze afbeelding is de rode kromme de gekozen kromme C.



Afbeelding 3. Koordemiddenoppervlak met complex geconjugeerde puntenparen (t,s) (appendix: B.2).

Een complex punt vormt alleen samen met zijn complex geconjugeerde een reëel koordemidden. In paragraaf 3.6 wordt hier dieper op ingegaan. In paragraaf 3.6 is er echter wel

sprake van een andere kromme maar de eerste twee coördinaten van het koordemidden zijn hetzelfde. Met deze voorwaarde voor t en s kan gemakkelijk worden nagegaan dat de derde coördinaat van het koordemidden bij deze kromme, met $n = 3$, dan ook altijd reëel is. Voor $n > 3$ kan de hoofdstelling van symmetrische polynomen met twee variabelen gebruikt worden; deze is te vinden in de volgende paragraaf. De redenering wordt dan: z is een symmetrische polynoom, dus z kan worden geschreven als een functie van $t+s = 2x$ en $ts = 2x^2 - y$. Waarbij x en y, respectievelijk, de eerste een de tweede coördinaat zijn van het koordemidden en deze zijn beide reëel onder de voorwaarde dat (t, s) een complex geconjugeerd puntenpaar is. Dus z is ook altijd reëel; dit is dus onafhankelijk van welke n er wordt gekozen.

Nu wordt nagegaan of het oppervlak van afbeelding 3 glad is. Deze vraag wordt beantwoord door verschillende afbeeldingen te beschrijven. Om te beginnen zijn er de twee reeds besproken afbeeldingen:

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow C \times C \longrightarrow M.$$

Deze afbeeldingen zijn als volgt gedefinieerd:

$$(t, s) \longmapsto ((t, t^2, t^n), (s, s^2, s^n)) \longmapsto m.$$

Echter zijn deze afbeeldingen niet bijectief, want het koordemidden bij het puntenpaar (p, q) is hetzelfde koordemidden als bij het puntenpaar (q, p). Om dit probleem te vermijden wordt de verzameling van de ongeordende paren gedefinieerd; hierin worden de paren behorend bij dezelfde koordemiddens weggedeeld. De verzameling van de ongeordende paren wordt genoteerd als het uitdelen van $\sim$. Er geldt dus $(s, t) = (t, s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}/\sim$ en $((t, t^2, t^n), (s, s^2, s^n)) = ((s, s^2, s^n), (t, t^2, t^n)) \in C \times C/\sim$. De afbeeldingen waarbij deze paren zijn weggedeeld zijn bijectief (appendix A: Bijectie):

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C}/\sim \xrightarrow{\sim} C \times C/\sim \xrightarrow{\sim} M. \tag{2}$$

Om te bepalen of M glad is, worden tot slot de volgende afbeeldingen gedefinieerd:

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C}/\sim \xrightarrow{\sim} \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow M. \tag{3}$$

Een belangrijke stap is de wijze waarop deze twee afbeeldingen gedefinieerd zijn, namelijk:

$$(t, s) \longmapsto (\sigma_1, \sigma_2) \longmapsto m.$$

Hierbij is $\sigma_1 = t + s$ en $\sigma_2 = ts$, oftewel de som en het product van de eerste coördinaat van de twee punten op de kromme. De afbeelding van deze som en dit product naar het koordemidden is ook bijectief, omdat de afbeeldingen bij (2) beide bijectief zijn en de eerste afbeelding bij (3) ook.

Het koordemiddenoppervlak is glad wanneer de afbeelding van (σ_1, σ_2) naar m bijectief is en wanneer de afgeleiden van de coördinaten van m naar σ_1 en de afgeleiden van de coördinaten van m naar σ_2 lineair onafhankelijk van elkaar zijn. Dat de afbeelding bijectief is, is hierboven geconcludeerd. Nu worden de coördinaten van de punten op M als functie van σ_1 en σ_2 geschreven, om de coördinaten ervan te kunnen differentiëren naar σ_1 en σ_2.

Voor twee willekeurige punten op de kromme C is het koordemidden m gelijk aan (1). Voor de eerste en tweede coördinaat van m is dit eenvoudig. De eerste coördinaat is te

schrijven als $\sigma_1/2$ en de tweede is $(\sigma_1^2 - 2\sigma_2)/2$. Voor de derde coördinaat is dit moeilijker. De oorzaak hiervan is de onbekende waarde van n. Echter is het voldoende om te weten dat het mogelijk is om $(t^n + s^n)/2$ in termen van σ_1 en σ_2 te schrijven. De hoofdstelling van de symmetische polynomen geeft hierbij het antwoord.

2.2 Hoofdstelling van de symmetrische polynomen met twee variabelen

De stelling luidt als volgt:
Stelling: Neem R een commutatieve ring met een 1-element. Elk symmetrisch polynoom $f \in R[X_1, X_2]$ is te schrijven als een polynoom in termen van σ_1 en σ_2 met coëfficienten uit R. Dat wil zeggen $f(X_1, X_2) = g(\sigma_1, \sigma_2)$ voor een zekere $g \in R[X_1, X_2]$. Bovendien is deze g uniek bepaald.

Bewijs: Neem aan $f \neq 0$. Orden de termen van f zo, dat de term $r_a X_1^{a_1} X_2^{a_2}$ voor de term $r_b X_1^{b_1} X_2^{b_2}$ staat als $a_i > b_i$ voor de kleinste i waarvoor geldt $a_i \neq b_i$, met $i = 1, 2$ en r_a en r_b coëfficienten in R.

Voor de kopterm $rX_1^{c_1} X_2^{c_2}$, van f, geldt dus: c_1 is de grootste exponent van X_1 die voorkomt en c_2 is de grootste exponent van X_2 die bij c_1 voorkomt, met $r \neq 0$. Hier heet r de kopcoëfficient van f. Omdat f symmetrisch is en het verwisselen van X_1 en X_2 dus f weer als resultaat geeft, geldt $c_1 \geq c_2$, want anders zou dit verwisselen resulteren in een eerdere term en is $rX_1^{c_1} X_2^{c_2}$ niet de kopterm van f.

Het symmetrische polynoom $r\sigma_1^{c_1 - c_2}\sigma_2^{c_2}$ heeft ook kopterm $rX_1^{c_1} X_2^{c_2}$. Er geldt namelijk kopterm $(g) \cdot$ kopterm$(h) =$ kopterm$(g \cdot h)$. Dus

$$kopterm(r\sigma_1^{c_1-c_2}\sigma_2^{c_2}) = kopterm(r) \cdot kopterm(\sigma_1^{c_1-c_2}) \cdot kopterm(\sigma_2^{c_2})$$

$$= r \cdot kopterm((X_1 + X_2)^{c_1-c_2}) \cdot kopterm(X_1 X_2^{c_2}) = rX_1^{c_1-c_2} X_1^{c_2} X_2^{c_2} = rX_1^{c_1} X_2^{c_2}.$$

Omdat de koptermen van f en $r\sigma_1^{c_1-c_2}\sigma_2^{c_2}$ hetzelfde zijn, valt deze kopterm weg wanneer deze twee polynomen van elkaar worden afgetrokken. Dus in

$$f_1 = f - r\sigma_1^{c_1-c_2}\sigma_2^{c_2}$$

komen alleen termen voor die later voorkomen in de gekozen ordening.

Als $f_1 = 0$ dan is f al op de gewenste wijze geschreven, namelijk $f = r\sigma_1^{c_1-c_2}\sigma_2^{c_2}$. Als $f_1 \neq 0$ dan is al bekend dat f_1 symmetrisch is dus dezelfde werkwijze kan worden aangehouden. De kopterm van f_1 wordt $r'\sigma_1^{c_1'}\sigma_2^{c_2'}$ genoemd. Vervolgens wordt f_2 geconstrueerd:

$$f_2 = f_1 - r'\sigma_1^{c_1'-c_2'}\sigma_2^{c_2'}.$$

Als $f_2 = 0$ dan is de schrijfwijze, in termen van σ_1 en σ_2, verkregen, namelijk

$$f = r\sigma_1^{c_1-c_2}\sigma_2^{c_2} + r'\sigma_1^{c_1'-c_2'}\sigma_2^{c_2'}.$$

Als $f_2 \neq 0$ dan wordt f_3 geconstrueerd, etcetera.

Is er altijd een k zodanig dat $f_k = 0$? Hiervoor wordt naar de totale graad, $totgr(f)$, van f gekeken. De totale graad is het grootste $a_1 + a_2$ die voorkomt in de termen $rX_1^{a_1} X_2^{a_2} (\neq 0)$ van f. Kennelijk geldt: $totgr(\sigma_1) = 1$ en $totgr(\sigma_2) = 2$, dus

$$totgr(\sigma_1^{c_1-c_2}\sigma_2 c_2) = 1 \cdot (c_1 - c_2) + 2 \cdot c_2 = c_1 + c_2 \leq totgr(f).$$

Hieruit volgt

$$totgr(f_1) \leq totgr(f)$$

en zo verder volgt

$$\ldots \leq totgr(f_m) \leq totgr(f_{m-1}) \leq \ldots \leq totgr(f).$$

Er zijn maar eindig veel termen $X_1^{d_1} X_2^{d_2}$ mogelijk met vaste totale graad $d = d_1 + d_2$, daarom gaat na eindig veel stappen de totale graad van het polynoom omlaag. Op een gegeven moment zijn al die termen weg; met als resultaat $f_k = 0$.

Er is nu aangetoont dat er inderdaad altijd een $f_k = 0$ bestaat. De laatste vraag die in dit bewijs gesteld wordt is: is de schrijfwijze van f als functie van σ_1 en σ_2 eenduidig? Oftewel als g_1 en g_2 twee verschillende symmetrische polynomen met twee variabelen zijn, zijn $g_1(\sigma_1, \sigma_2)$ en $g_2(\sigma_1, \sigma_2)$ dan ook verschillend? Het plan van aanpak is als volgt. Definieer $g = g_1 - g_2$ en probeer aan te tonen dat als $g \in R[Y_1, Y_2]$ en $g \neq 0$ dan $g(\sigma_1, \sigma_2) \neq 0$. Hierbij geldt voor $g(\sigma_1, \sigma_2)$ dat σ_i in g wordt gesubstitueerd op de plaats van Y_i. Dit gaat als volgt in zijn werk.

Elke term die in g voorkomt kan in de vorm $rY_1^{a_1 - a_2} Y_2^{a_2}$ worden geschreven, met $r \in R$, $r \neq 0$, $a_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Dit is simpelweg een schrijfwijze waar voor gekozen wordt en dit kan altijd. Bekijk de kopterm van g. Door substitutie van $\sigma_i = Y_i$ volgt:

$$r\sigma_1^{a_1 - a_2} \sigma_2^{a_2} = r(X_1 + X_2)^{a_1 - a_2} (X_1 X_2)^{a_2} = r(X_1^{a_1 - a_2} + X_2^{a_1 - a_2} + \ldots)(X_1 X_2)^{a_2}$$

$$= r(X_1^{a_1} X_2^{a_2} + X_1^{a_2} X_2^{a_1} + \ldots).$$

Dus de kopterm van g is $rX_1^{a_1} X_2^{a_2}$ (*). De andere termen $r'\sigma_1^{a_1' - a_2'} \sigma_2^{a_2'}$ van g geven polynomen in X_1 en X_2 met een later komende kopterm. Dit betekent dat de kopterm (*) niet kan wegvallen en dus $g(\sigma_1, \sigma_2) \neq 0$. Hiermee is bewezen dat de schrijfwijze van elk symmetrisch polynoom in termen van σ_1 en σ_2 eenduidig. Hiermee is de stelling bewezen. (van Geemen et al. 2012)

Het is nu duidelijk dat de derde coördinaat, $(t^n + s^n)/2$, van M in termen van σ_1 en σ_2 geschreven kan worden, want het is een symmetrisch polynoom. Ook is bekend dat deze omschrijving een polynoom, die m_3 wordt genoemd, opleverd. Er kan nu antwoord worden gegeven op de vraag of M een glad oppervlak is.

$$m = \left(\frac{\sigma_1}{2}, \frac{\sigma_1^2 - 2\sigma_2}{2}, m_3 \right)$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\sigma_1} = \left(\frac{\mathrm{d}\frac{\sigma_1}{2}}{\mathrm{d}\sigma_1}, \frac{\mathrm{d}\frac{\sigma_1^2 - 2\sigma_2}{2}}{\mathrm{d}\sigma_1}, \frac{\mathrm{d}m_3}{\mathrm{d}\sigma_1} \right) = \left(\frac{1}{2}, \sigma_1, \frac{\mathrm{d}m_3}{\mathrm{d}\sigma_1} \right)$$

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\sigma_2} = \left(\frac{\mathrm{d}\frac{\sigma_1}{2}}{\mathrm{d}\sigma_2}, \frac{\mathrm{d}\frac{\sigma_1^2 - 2\sigma_2}{2}}{\mathrm{d}\sigma_2}, \frac{\mathrm{d}m_3}{\mathrm{d}\sigma_2} \right) = \left(0, -1, \frac{\mathrm{d}m_3}{\mathrm{d}\sigma_2} \right)$$

Nu kan geconcludeerd worden dat M glad is, want de tweede afbeelding van (3) is bijectief en voor alle punten (a, b) zijn $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\sigma_1}(a, b)$ en $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\sigma_2}(a, b)$ lineair onafhankelijk.

2.3 Vergelijking koordemiddenoppervlak

In deze paragraaf wordt de vergelijking van het koordemiddenoppervlak M, zoals te zien in afbeelding 3, uitgerekend. Net als bij deze afbeelding wordt er gekozen voor $n = 3$. De koordemiddens worden dan gegeven door

$$m = \left(\frac{t+s}{2}, \frac{t^2+s^2}{2}, \frac{t^3+s^3}{2} \right) = (x, y, z).$$

Nu wordt z als functie van x en y geschreven. Dat gaat als volgt.

$$2x^2 = \frac{t^2 + 2st + s^2}{2} = y + st$$

Hiermee is een uitdrukking gevonden voor st als functie van x en y, namelijk $st = 2x^2 - y$. Nu kan er een relatie tussen x, y en z worden gezocht.

$$4x^3 = \frac{1}{2}\left(t^3 + s^3 + 3st(t+s)\right) = z + 3 \cdot (2x^2 - y) \cdot x = z + 6x^3 - 3xy$$

De vergelijking voor z wordt dan

$$z = 4x^3 - 6x^3 + 3xy = -2x^3 + 3xy.$$

Op deze wijze kan voor elke n een uitdrukking gevonden worden voor z (als functie van x en y), want

$$z = \frac{t^n + s^n}{2}$$

is een symmetrische polynoom, dus z is te schrijven als een polynoom als functie van de som, $t + s = 2x$, en het product $ts = 2x^2 - y$.

2.4 Graad vergelijking koordemiddenoppervlak

Wanneer voor verschillende waarden van n de graad van de vergelijking wordt bepaald is er een duidelijk patroon te zien. De *graad* van een vergelijking is hier, bij een vergelijking met twee variabelen, de totale graad. In de meeste gevallen is de graad gelijk aan n, echter zijn er een aantal waarden van n waarvoor de graad $n - 1$ is. In tabel 1 is dit patroon duidelijk zichtbaar. De dikgedrukte graden wijken af van de bijbehorende n.

Het is duidelijk zichtbaar dat bij $n = 2 + 4k$ de graad niet hetzelfde is als n, met $k = 1, 2, \ldots$. Ik heb geprobeerd dit aan te tonen door eerst te bewijzen dat n gelijk is aan de graad als n een priemgetal, ongelijk aan 2, is. Vervolgens wordt dan aangetoond dat wanneer n oneven is dat altijd geldt graad=n en bij n is even soms geldt graad=n en soms graad=$n - 1$. Echter bleek dit moeilijker dan gedacht dus zal alleen de volgende stelling bewezen worden.

Stelling: als n een priemgetal $p > 2$ is, dan is de graad van het koordemiddenoppervlak gelijk aan p.
Bewijs: Neem aan $p > 2$ is een priemtal. Er geldt

$$z = \frac{t^p + s^p}{2}.$$

Tabel 1: *n vergeleken met graad (appendix: B.3)*

n	Graad	n	Graad	n	Graad
2	1	13	13	24	24
3	3	14	**13**	25	25
4	4	15	15	26	**25**
5	5	16	16	27	27
6	**5**	17	17	28	28
7	7	18	**17**	30	**29**
8	8	19	19	34	**33**
9	9	20	20	38	**37**
10	**9**	21	21	42	**41**
11	11	22	**21**	46	**45**
12	12	23	23		

Het Binomium van Newton kan hierbij worden gebruikt, omdat $t, s \in \mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ een commutatieve ring is. Het Binomium van Newton vertelt:

$$(t+s)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} t^p s^{p-k}, \quad met \binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} \in \mathbb{Z}.$$

De teller van $\binom{p}{k}$ is deelbaar door p maar de noemer niet als $0 < k < p$, omdat p een priemgetal is. Dan geldt

$$(t+s)^p = t^p + s^p + c,$$

opgevat als een gelijkheid in de polynoomring $\mathbb{Z}[t,s]$, voor een zekere $c \in \mathbb{Z}[t,s]$. (Alle coëfficienten van c zijn veelvouden van p.) Vervolgens wordt hier naar gekeken modulo p.

$$(t^p + s^p) \bmod p \equiv (t+s)^p$$

Dit wordt gebruikt om te bepalen wat de graad van z is. Modulo p is z:

$$\frac{(t+s)^p}{2} = 2^{p-1}\left(\frac{t+s}{2}\right)^p = 2^{p-1}x^p.$$

Dus de graad van het koordemiddenoppervlak is gelijk aan p wanneer n een priemgetal is. De stelling is nu bewezen.

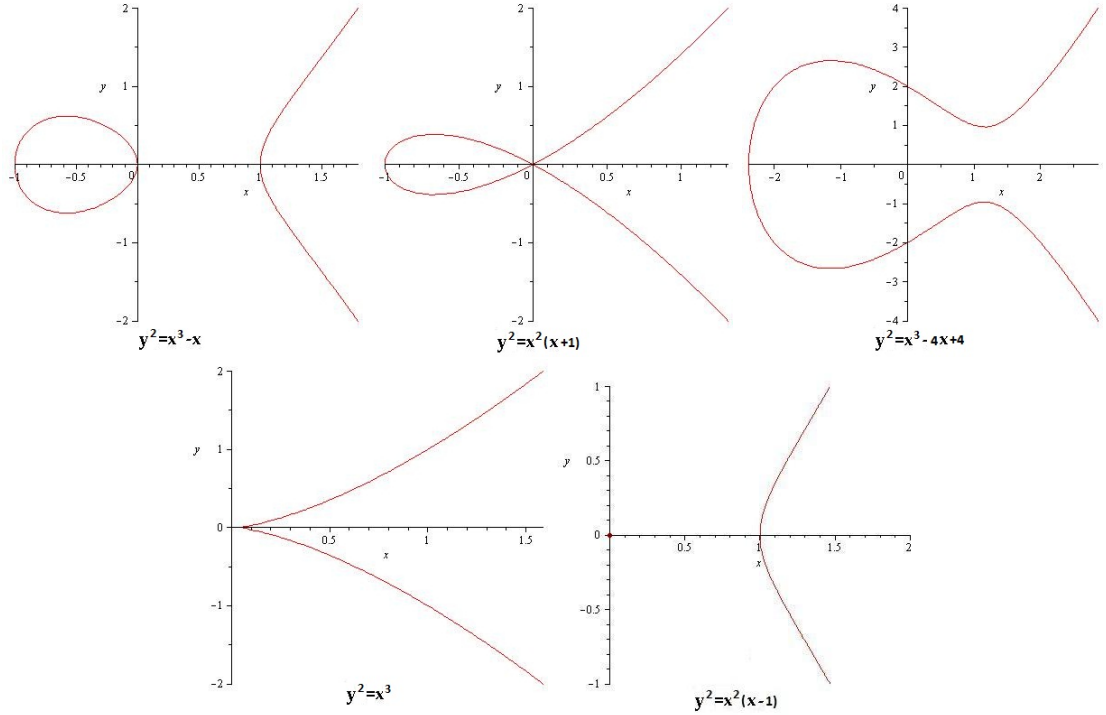
Wanneer $p = 1$ dan geldt $z = x$, dus dan is de graad 1 en wanneer $p = 2$ dan $z = x^2 = y$ dus is de graad ook 1.

3 Kubische krommen

Zo'n koordemiddenoppervlak kan bij elke kromme worden geconstrueerd. In dit hoofdstuk wordt er gekeken naar deze oppervlakken van vijf verschillende gevallen van de kubische kromme in de weierstrass-vorm. Een kubische kromme in de weierstrass-vorm is een kromme die voldoet aan de volgende vergelijking:

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c. \tag{4}$$

In het vervolg zal enkel worden gesproken van 'kubische kromme'; wat verwijst naar de bovenstaande vorm. De waarden die voor a, b en c worden gekozen zijn bepalend voor de grafiek van de kubische kromme; door de keuze kunnen grafieken gemaakt worden die sterk van elkaar verschillen. In afbeelding 4 staan de vijf verschillende gevallen die zich voor kunnen doen. Dit zijn natuurlijk niet de enige vijf mogelijkheden maar het gaat om de vorm van de grafiek.



Afbeelding 4. De vijf verschillende kubische krommen (appendix: B.4).

Merk op dat het in afbeelding 4 lijkt alsof alleen naar de reële waarden wordt gekeken. Dit is niet de bedoeling. Er wordt ook gekeken naar de complexe waarden die voldoen aan de kubische krommen (en die uiteindelijk een reëel koordemidden opleveren).

In dit hoofdstuk worden alle vijf gevallen per paragraaf besproken. Zo wordt er een koordemiddenoppervlak bij elk geval geconstrueerd en wordt er gekeken naar de singulariteiten behorende bij die oppervlakken. De eerste paragraaf is een stuk uitgebreider dan de vier die daarop volgen. Dit komt doordat in deze paragrafen vergelijkbare stappen worden uitgevoerd als in de eerste.

3.1 Kubische kromme 1: $\mathbf{y^2 = x^3 - x}$

Het koordemiddenoppervlak wordt niet geconstrueerd bij de kromme zelf maar bij een inbedding van deze kromme. Een koordemiddenoppervlak van een kromme in het platte vlak is minder interessant en bij het klassieke probleem ligt de snijkromme ook niet in het platte vlak en daar wordt naar toe gewerkt.

Het inbedden van de kubische kromme gaat op een soortgelijke wijze als in hoofdstuk 1. Hiertoe wordt gedefinieerd:

$$\mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3, \qquad met\ (x,y) \longmapsto (x, x^2, y).$$

Hierbij is (x, y) een punt die voldoet aan de kubische kromme. Nu worden opnieuw twee willekeurige punten $p = (x_1, y_1)$ en $q = (x_2, y_2)$ op de kubische kromme gekozen. Na de inbedding in $\mathbb{C}^3$ zijn deze punten $p_{nieuw} = (x_1, x_1^2, y_1)$ en $q_{nieuw} = (x_2, x_2^2, y_2)$. Het koordemidden bij deze punten p_{nieuw} en q_{nieuw} wordt gegeven door:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Het koordemidden lijkt erg op het koordemidden uit het voorbeeld in hoofdstuk 1; alleen de derde coördinaat komt niet overeen. Om de berekeningen, die hierna zullen volgen, eenvoudiger te kunnen volgen, krijgen de coördinaten van het koordemidden een nieuwe naam:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{\xi_1}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\eta_{11}}{2}\right) = (x, y, z).$$

Er worden in totaal vijf nieuwe symbolen ingevoerd:

$$\xi_1 = x_1 + x_2, \quad \xi_2 = x_1 x_2, \quad \lambda = x_1^2 + x_2^2, \quad \eta_{11} = y_1 + y_2, \quad \eta_{12} = y_1 y_2.$$

Zo geldt dus: $x = \xi_1/2$, $y = \lambda/2$ en $z = \eta_{11}/2$. En er geldt $y_1^2 = x_1^3 - x_1$ en $y_2^2 = x_2^3 - x_2$.

Het doel is dus (nog steeds) het construeren van het bijbehorende reële deel van het koordemiddenoppervlak M_1; hiertoe dient de vergelijking van dit oppervlak gevonden te worden. Er is een relatie tussen ξ_1, ξ_2 en λ, namelijk:

$$\frac{\xi_1^2 - \lambda}{2} = \frac{(x_1 + x_2)^2 - x_1^2 - x_2^2}{2} = \frac{2x_1 x_2}{2} = \xi_2.$$

Om de vergelijking van het bijbehorende koordemiddenoppervlak te vinden wordt er een vergelijking gezocht als functie van x, y en z. Dit wordt gedaan met een truc en deze gaat als volgt:

$$\eta_{11}^2 = (y_1 + y_2)^2 = y_1^2 + y_2^2 + 2y_1 y_2 = x_1^3 - x_1 + x_2^3 - x_2 + 2\eta_{12} =$$

$$(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2) - \xi_1 + 2\eta_{12} = \xi_1(\lambda - \xi_2) - \xi_1 + 2\eta_{12}.$$

Dus wanneer de vergelijking voor ξ_2 wordt ingevuld en vrijwel alles naar *één* kant wordt gebracht, resulteert dit in

$$2\eta_{12} = \eta_{11}^2 + \xi_1 - \xi_1(\xi_1^2 - \frac{3}{2}(\xi_1^2 - \lambda)).$$

Echter is dit een vergelijking waar η_{12} ook in voorkomt; die wordt weggewerkt, want de coördinaten van de koordemiddens bevatten alleen ξ_1, λ en η_{11} dus de vergelijking van het koordemiddenoppervlak ook.

Hiertoe wordt η_{12}^2 als functie van ξ_1 en λ geschreven.

$$\eta_{12}^2 = y_1^2 y_2^2 = (x_1^3 - x_1)(x_2^3 - x_2) = x_1 x_2 (x_1^2 x_2^2 - x_1^2 - x_2^2 + 1) = \frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\left(\left(\frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\right)^2 - \lambda + 1\right)$$

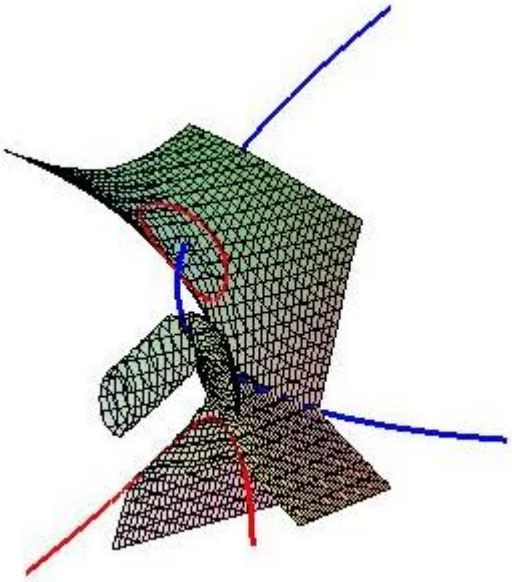
Er geldt

$$\left(\frac{1}{2}\cdot 2\eta_{12}\right)^2 - \eta_{12}^2 = 0 = \left(\frac{1}{2}\left(\eta_{11}^2 + \xi_1 - \xi_1\left(\xi_1^2 - \frac{3}{2}\left(\xi_1^2 - \lambda\right)\right)\right)\right)^2$$
$$-\frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\left(\left(\frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\right)^2 - \lambda + 1\right).$$

Wanneer x, y en z worden ingevuld, is de vergelijking voor het koordemiddenoppervlak gevonden (appendix: B.5). Die is

$$M_1 : -4z^4 - 4z^2 x - 8z^2 x^3 + 12z^2 xy + x^2 - 4x^4 + 2x^2 y + 4x^6 - 3x^2 y^2 - y^3 + 2y^2 - y = 0$$

In afbeelding 5 is het koordemiddenoppervlak van deze kubische kromme weergegeven.



Afbeelding 5. Koordemiddenoppervlak M_1 bij $y^2 = x^3 - x$ (kromme ingebed in $\mathbb{C}^3$) (appendix: B.6).

De rode curve in de afbeelding is de gekozen kubische kromme ingebed in $\mathbb{C}^3$.

In afbeelding 5 is het niet makkelijk te zien maar dit oppervlak heeft een aantal singulariteiten. Om er achter te komen waar de singulariteiten zich bevinden op dit oppervlak, wordt gekeken naar de afgeleiden van de vergelijking naar alle drie de variabelen, x, y en z. De singulariteiten zijn de coördinaten van die punten van M_1 waarvoor alle drie de afgeleiden gelijk zijn aan nul (appendix: B.7).

$$\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}x} = -4z^2 - 24z^2 x^2 + 12z^2 y + 2x - 16x^3 + 4xy + 24x^5 - 6xy^2$$

$$\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}y} = 12z^2x + 2x^2 - 6x^2y - 3y^2 + 4y - 1$$

$$\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}z} = -16z^3 - 8zx - 16zx^3 + 24zxy$$

Deze afgeleiden zijn allen gelijk aan nul wanneer

$$(x, y, z) = (x, -2x^2 + 1, 0).$$

De kromme met singulariteiten is in het blauw weergegeven in afbeelding 5. Een punt op de blauwe kromme is alleen singulariteit op het oppervlak wanneer dit punt op het oppervlak ligt. Het oppervlak heeft op alle punten die zowel op de kromme en op het oppervlak liggen een afwijkende vorm. De singulariteiten komen tot stand door de symmetrie ten opzichte van de x-as van de oorspronkelijke kromme die ingebed is in $\mathbb{C}^3$. Zo zijn er meedere gevallen waarbij twee verschillende puntenparen hetzelfde koordemidden voortbrengen.

3.2 Kubische kromme 2: $\mathbf{y^2 = x^2(x + 1)}$

Nu de tweede kubische kromme. De tweede kromme die wordt ingebed in $\mathbb{C}^3$ is $y^2 = x^2(x + 1)$. Alle kubische krommen worden op dezelfde wijze ingebed. De koordemiddens worden weer gegeven door

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{\xi_1}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\eta_{21}}{2}\right) = (x, y, z).$$

Merk wel op dat de laatste coördinaat niet hetzelfde is als bij de vorige kubische kromme; anders zouden alle kubische krommen hetzelfde koordemiddenoppervlak hebben. Hier is $y_1^2 = x_1^2(x_1 + 1)$ en $y_2^2 = x_2^2(x_2 + 1)$. Daarom heeft de laatste coördinaat ook een andere naam, namelijk $\frac{\eta_{21}}{2}$. Het product van de twee y-waarden krijgt daarom ook een andere naam, namelijk η_{22}. Er wordt gewerkt met de volgende variabelen.

$$\xi_1 = x_1 + x_2, \quad \xi_2 = x_1x_2, \quad \lambda = x_1^2 + x_2^2, \quad \eta_{21} = y_1 + y_2, \quad \eta_{22} = y_1y_2$$

Merk ook op dat de relatie tussen ξ_1, ξ_2 en λ niet is veranderd.

Dezelfde truc wordt toegepast om de vergelijking van het bijbehorende oppervlak te vinden.

$$\eta_{21}^2 = y_1^2 + y_2^2 + 2y_1y_2 = x_1^2(x_1 + 1) + x_2^2(x_2 + 1) + 2\eta_{22}$$

$$= x_1^3 + x_1^2 + x_2^3 + x_2^2 + 2\eta_{22} = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) + \lambda + 2\eta_{22}$$

$$= \xi_1(\lambda - \xi_2) + \lambda + 2\eta_{22} = \xi_1\left(\lambda - \frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\right) + \lambda + 2\eta_{22}$$

Oftewel

$$2\eta_{22} = \eta_{21}^2 - \xi_1\left(\lambda - \frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\right) - \lambda.$$

Nu wordt η_{22}^2 berekend.

$$\eta_{22}^2 = y_1^2y_2^2 = x_1^2(x_1 + 1)x_2^2(x_2 + 1)$$

$$= x_1^2x_2^2(x_1 + 1)(x_2 + 1) = x_1^2x_2^2(x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1)$$

$$= \xi_2^2(\xi_2 + \xi_1 + 1) = \left(\frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\right)^2 \left(\left(\frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\right) + \xi_1 + 1\right)$$

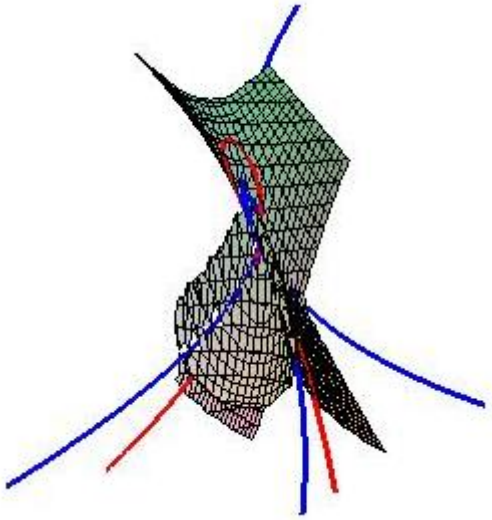
Er geldt $(\frac{1}{2} \cdot 2\eta_{22})^2 - \eta_{22}^2 = 0$ en x, y en z worden ingevuld in deze vergelijking (appendix: B.5).

$$\left(\frac{1}{2}\left(\eta_{21}^2 - \xi_1\left(\lambda - \frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\right) - \lambda\right)\right)^2 - \left(\frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\right)^2 \left(\left(\frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\right) + \xi_1 + 1\right) = 0$$

$$M_2 : -4z^4 + 12z^2xy - 8z^2x^3 + 4z^2y - 3x^2y^2 - 4xy^2 + 4x^6$$

$$-4x^3y + 8x^5 + 4x^4 - 4x^2y - y^3 = 0$$

In afbeelding 6 is het koordemiddenoppervlak te zien bij deze kubische kromme. De rode curve is de kubische kromme ingebed in $\mathbb{C}^3$.



Afbeelding 6. Koordemiddenoppervlak M_2 bij $y^2 = x^2(x-1)$ (kromme ingebed in $\mathbb{C}^3$) (appendix: B.6).

Nu de singulariteiten van dit oppervlak (appendix: B.7). Dus wanneer zijn de afgeleiden van M_2 naar x, y en z gelijk aan nul? Dit geldt wanneer

$$(x, y, z) = (x, -2x^2 - 2x, 0), (x, 2x^2, \pm\sqrt{2x+1}x).$$

De twee sets met singulariteiten zijn krommen; deze zijn in het blauw weergegeven in afbeelding 6. De eerste set singularteiten ontstaat weer door de symmetrie ten opzichte van de x-as. De tweede set singulariteiten ontstaan door het feit dat $y^2 = x^2(x+1)$ (ingebed in $\mathbb{C}^3$) een singulariteit heeft, namelijk in het punt $(0,0,0)$. Het punt $(0,0,0)$ is vanaf de negatieve z-as te benaderen maar ook vanaf de positieve kant. Op deze manier komen de koordemiddens voortgebracht uit het punt $(0,0,0)$ twee maal voor.

3.3 Kubische kromme 3: $\mathbf{y^2 = x^3 - 4x + 4}$

De derde kubische kromme is $y^2 = x^3 - 4x + 4$. De koordemiddens hiervan, na inbedden in $\mathbb{C}^3$, zijn

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1^2+x_2^2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{\xi_1}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\eta_{31}}{2}\right) = (x, y, z),$$

met $y_1^2 = x_1^3 - 4x_1 + 4$ en $y_2^2 = x_2^3 - 4x_2 + 4$. De variabelen die weer worden gebruikt zijn

$$\xi_1 = x_1 + x_2, \quad \xi_2 = x_1x_2, \quad \lambda = x_1^2 + x_2^2, \quad \eta_{31} = y_1 + y_2, \quad \eta_{32} = y_1y_2$$

Hiermee wordt weer de vergelijking van het koordemiddenoppervlak geconstrueerd.

$$\eta_{31}^2 = y_1^2 + y_2^2 + 2\eta_{32} = x_1^3 - 4x_1 + 4 + x_2^3 - 4x_2 + 4 + 2\eta_{32}$$

$$= (x_1+x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) - 4(x_1+x_2) + 8 + 2\eta_{32} = \xi_1(\lambda - \xi_2) - 4\xi_1 + 8 + 2\eta_{32}$$

$$2\eta_{32} = \xi_{31}^2 - \xi_1\left(\lambda - \frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\right) + 4\xi_1 - 8$$

Nu wordt η_{32}^2 uitgerekend.

$$\eta_{32}^2 = y_1^2y_2^2 = (x_1^3 - 4x_1 + 4)(x_2^3 - 4x_2 + 4)$$

$$= x_1^3x_2^3 - 4x_2x_1^3 + 4x_1^3 - 4x_1x_2^3 + 16x_1x_2 - 16x_1 + 4x_2^3 - 16x_2 + 16$$

$$= \xi_2^3 + 4\xi_1(\lambda - \xi_2) - 4\xi_2\lambda + 16\xi_2 - 16\xi_1 + 16$$

$$= \left(\frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\right)^3 + 4\xi_1\left(\lambda - \left(\frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\right)\right) - 4\frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\lambda + 16\frac{\xi_1^2 - \lambda}{2} - 16\xi_1 + 16$$

Vervolgens worden de juiste vergelijkingen van elkaar afgetrokken en worden x, y en z er in gesubstitueerd (appendix: B.5).

$$\left(\frac{1}{2}\cdot 2\eta_{32}\right)^2 - \eta_{32}^2 = 0$$

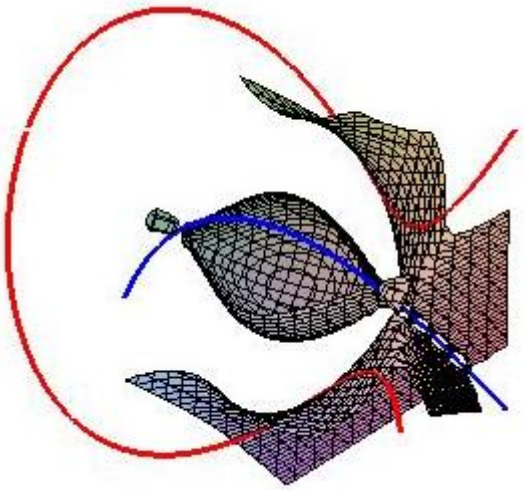
$$= \left(\frac{1}{2}\cdot\left(\xi_{31}^2 - \xi_1\left(\lambda - \frac{\xi_1^2-\lambda}{2}\right) + 4\xi_1 - 8\right)\right)^2$$

$$- \left(\left(\frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\right)^3 + 4\xi_1\left(\lambda - \left(\frac{\xi_1^2-\lambda}{2}\right)\right) - 4\frac{\xi_1^2-\lambda}{2}\lambda + 16\frac{\xi_1^2-\lambda}{2} - 16\xi_1 + 16\right) = 0$$

$$M_3 : -16y + 16x^2 - 8z^2x^3 - 16z^2x - 3x^2y^2 + 8x^2y$$

$$+6y^2 + 12z^2xy - 4z^4 + 4x^6 - 16x^4 - y^3 + 16z^2 = 0$$

Het koordemiddenoppervlak M_3 dat bij deze vergelijking hoort is weergegeven in afbeelding 7. De rode curve is weer de kubische kromme.



Afbeelding 7. Koordemiddenoppervlak M_3 bij $y^2 = x^3 - 4x + 4$ (kromme ingebed in $\mathbb{C}^3$) (appendix: B.6).

Ook dit oppervlak heeft singulariteiten (appendix: B.7). De singulariteiten zitten bij

$$(x, y, z) = (x, -2x^2 + 4, 0).$$

Dit is de blauwe kromme in afbeelding 7. Deze singulariteiten ontstaan op dezelfde manier als in paragraaf 3.1; de kromme is symmetrisch en zo komt een koordemidden twee maal voor.

3.4 Kubische kromme 4: $\mathbf{y^2 = x^3}$

De vierde kubische kromme die bekeken wordt is $y^2 = x^3$. Na inbedden in $\mathbb{C}^3$ zijn de koordemiddens

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = \left(\frac{\xi_1}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\eta_{41}}{2}\right) = (x, y, z),$$

met $y_1^2 = x_1^3$ en $y_2^2 = x_2^3$. De variabelen die worden gebruikt zijn

$$\xi_1 = x_1 + x_2, \quad \xi_2 = x_1 x_2, \quad \lambda = x_1^2 + x_2^2, \quad \eta_{41} = y_1 + y_2, \quad \eta_{42} = y_1 y_2.$$

Hiermee wordt weer de vergelijking van het koordemiddenoppervlak geconstrueerd.

$$\eta_{41}^2 = y_1^2 + y_2^2 + 2\eta_{42} = x_1^3 + x_2^3 + 2\eta_{42}$$

$$= \xi_1(\lambda - \xi_2) + 2\eta_{42} = \xi_1\left(\lambda - \frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\right) + 2\eta_{42}$$

$$2\eta_{42} = \eta_{41}^2 - \xi_1\left(\lambda - \frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\right)$$

En verder

$$\eta_{42}^2 = y_1^2 y_2^2 = x_1^3 x_2^3 = \xi_2^3 = \left(\frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\right)^3.$$

Nu wordt de truc weer toegepast.

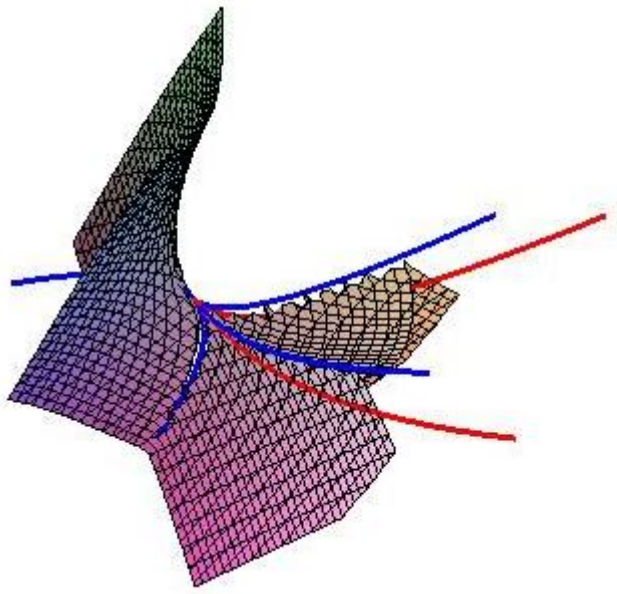
$$\left(\frac{1}{2}\cdot 2\eta_{42}\right)^2 - \eta_{42}^2 = 0$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot\left(\eta_{41}^2 - \xi_1\left(\lambda - \frac{\xi_1^2-\lambda}{2}\right)\right)\right)^2 - \left(\frac{\xi_1^2-\lambda}{2}\right)^3 = 0$$

Nu worden x, y en z ingevuld om de vergelijking voor het koordemiddensoppervlak M_4 te verkrijgen (appendix: B.5).

$$M_4 : -4z^4 + 12z^2xy - 8z^2x^3 - 3x^2y^2 + 4x^6 - y^3 = 0$$

In afbeelding 8 is het koordemiddenoppervlak van deze kubische kromme weergegeven. De rode kromme in de afbeelding is de kubische kromme.



Afbeelding 8. Koordemiddenoppervlak M_4 bij $y^2 = x^3$ (kromme ingebed in $\mathbb{C}^3$) (appendix: B.6).

De singulariteiten (appendix: B.7) van dit oppervlak zitten bij

$$(x,y,z) = (x,-2x^2,0), \left(\left(\tfrac{z^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}}, 2\left(\tfrac{z^2}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, z\right).$$

De blauwe krommen zijn de twee sets singulariteiten. Deze singulariteiten ontstaan op een soortgelijke manier als de singulariteiten in paragraaf 3.2; het punt $(0,0,0)$ kan vanuit de negatieve maar ook vanuit de positieve z-as benaderd worden. Zo zijn alle koordemidden voorgebracht door het punt $(0,0,0)$ dubbel.

3.5 Kubische kromme 5: $\mathbf{y^2 = x^2(x-1)}$

Nu de laatste kubische kromme; deze is $y^2 = x^2(x-1)$. Eerst wordt de kromme ingebed in $\mathbb{C}^3$ op de gebruikelijke wijze. De koordemiddens worden vervolgens gegeven door

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1^2+x_2^2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) = \left(\frac{\xi_1}{2}, \frac{\lambda}{2}, \frac{\eta_{51}}{2}\right) = (x,y,z),$$

met $y_1^2 = x_1^2(x_1 - 1)$ en $y_2^2 = x_2^2(x_2 - 1)$. Er worden weer nieuwe variabelen ingevoerd:

$$\xi_1 = x_1 + x_2, \quad \xi_2 = x_1 x_2, \quad \lambda = x_1^2 + x_2^2, \quad \eta_{51} = y_1 + y_2, \quad \eta_{52} = y_1 y_2.$$

Nu wordt eerst weer η_{51}^2 berekend, vervolgens wordt η_{52}^2 berekend en uiteindelijk zal de vergelijking van het koordemiddenoppervlak gevonden worden.

$$\eta_{51}^2 = y_1^2 + y_2^2 + 2\eta_{52} = x_1^2(x_1 - 1) + x_2^2(x_2 - 1) + 2\eta_{52}$$
$$= x_1^3 - x_1^2 + x_2^3 - x_2^2 + 2\eta_{52} = \xi_1(\lambda - \xi_2) - \lambda + 2\eta_{52}$$
$$= \xi_1 \left(\lambda - \frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\right) - \lambda + 2\eta_{52}$$
$$2\eta_{52} = \eta_{51}^2 - \xi_1 \left(\lambda - \frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\right) + \lambda$$

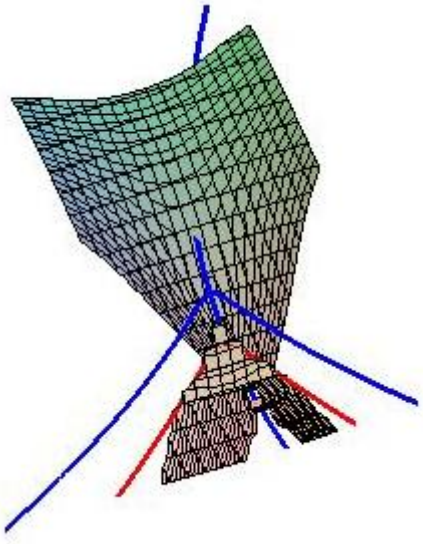
En verder geldt

$$\eta_{52}^2 = y_1^2 y_2^2 = x_1^2(x_1 - 1)x_2^2(x_2 - 1) = x_1^2 x_2^2 (x_1 - 1)(x_2 - 1).$$
$$= x_1^2 x_2^2 (x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1) = \xi_2^2(\xi_2 - \xi_1 + 1) = \left(\frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\right)^2 \left(\left(\frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\right) - \xi_1 + 1\right)$$
$$(\frac{1}{2} \cdot 2\eta_{52})^2 - \eta_{52}^2 = 0$$
$$\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\eta_{51}^2 - \xi_1 \left(\lambda - \frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\right) + \lambda\right)\right)^2 - \left(\frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\right)^2 \left(\left(\frac{\xi_1^2 - \lambda}{2}\right) - \xi_1 + 1\right) = 0$$

De vergelijking van het koordemiddenoppervlak (appendix: B.5) is nu

$$M_5 : -4z^4 + 12z^2xy - 8z^2x^3 - 4z^2y - 3x^2y^2$$
$$+4xy^2 + 4x^6 + 4x^3y - 8x^5 + 4x^4 - 4x^2y - y^3.$$

Het koordemiddenoppervlak is in afbeelding 9 weergegeven, met de kubische kromme in het rood.



Afbeelding 9. Koordemiddenoppervlak M_5 bij $y^2 = x^2(x - 1)$ (kromme ingebed in $\mathbb{C}^3$) (appendix: B.6).

De singulariteiten (appendix: B.7) van dit oppervlak zijn

$$(x, y, z) = (x, -2x^2 + 2x, 0), (x, 2x^2, \pm\sqrt{2x-1}x).$$

De twee sets singulariteiten zijn weer weergeven in het blauw in afbeelding 9. De eerste set singulariteiten ontstaat weer door symmetrie ten opzichte van de x-as; er bestaan dubbele koordemiddens. De tweede set singulariteiten ontstaat op dezelfde wijze als de tweede set singulariteiten bij kubische kromme 2. Het punt $(0, 0, 0)$ is hier weer een singulier punt op de kubische kromme. De koordemiddens voortgebracht uit het punt $(0, 0, 0)$ zijn daarom ook singulier.

3.6 De vorm van de punten op de kubische kromme

Nu alle soorten kubsiche krommen besproken zijn kan ook worden gekeken naar welke waarden voor (x_1, y_1) en (x_2, y_2) ingevuld kunnen worden zodat het volledige reële beeld verkregen wordt. Zijn dit alleen reële waarden voor x_1, y_1, x_2 en y_2? Of kunnen er ook complexe getallen worden ingevuld, waarvan de coördinaten van het koordemiddenoppervlak toch weer reëel zijn?

In het begin van dit hoofdstuk is beschreven op welke wijze de coördinaten van de koordemiddens worden bepaald. Er wordt een punt op de desbetreffende kromme gekozen, zeg $p = (x_1, y_1)$, en een ander punt op deze kromme, zeg $q = (x_2, y_2)$, de kromme wordt ingebed in $\mathbb{C}^3$ zodat het koordemidden gegeven wordt door:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Alle coördinaten zijn reëel als $x_1 + x_2$, $x_1^2 + x_2^2$ en $y_1 + y_2$ reëel zijn.

Er wordt aangenomen dat alle coördinaten reëel zijn. Stel $p = (a_1 + b_1 i, y_1)$ en $q = (a_2 + b_2 i, y_2)$. $x_1 + x_2$ is reëel en

$$x_1 + x_2 = a_1 + b_1 i + a_2 + b_2 i.$$

Dus $b_1 i = -b_2 i$. Ook is bekend: $x_1^2 + x_2^2$ is reëel en

$$x_1^2 + x_2^2 = a_1^2 - b_1^2 + 2a_1 b_1 i + a_2^2 - b_2^2 + 2a_2 b_2 i.$$

Oftewel

$$2a_1 b_1 i = -2a_2 b_2 i$$

$$a_1 b_1 i = -a_2 b_2 i = a_2 b_1 i.$$

En dus is bekend dat $a_1 = a_2$. De conclusie is $x_1 = \overline{x_2}$ (de complex geconjugeerde van x_1). Nu de y-coördinaat. De y-coördinaat hangt af van de x-coördinaat. Bij de kubische kromme wordt er altijd voldaan aan de vergelijking $y^2 = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. Zo geldt

$$y_1^2 = x_1^3 + \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma \text{ en}$$
$$y_2^2 = x_2^3 + \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma.$$

Er wordt aangenomen dat $y_1 + y_2$ reëel is en uit het bovenstaande is bekend dat $x_1 = \overline{x_2}$. Nu dit bekend is wordt voor het gemak gekozen voor $x_1 = a + bi$ (en $x_2 = a - bi$) en dit wordt ingevuld.

$$\begin{aligned} y_1^2 &= (a+bi)(a+bi)(a+bi) + \alpha(a+bi)(a+bi) + \beta(a+bi) + \gamma \\ &= (a^2 - b^2 + 2abi)(a+bi) + \alpha(a^2 - b^2 + 2abi) + \beta(a+bi) + \gamma \\ &= a^3 + a^2bi - b^2a - b^3i + 2a^2bi - 2ab^2 + \alpha a^2 - \alpha b^2 + 2\alpha abi + \beta a + \beta bi + \gamma \\ &= a^3 - b^2a - 2ab^2 + \alpha a^2 - \alpha b^2 + \beta a + \gamma + (a^2b - b^3 + 2a^2b + 2\alpha ab + \beta b)i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_2^2 &= (a-bi)(a-bi)(a-bi) + \alpha(a-bi)(a-bi) + \beta(a-bi) + \gamma \\ &= (a^2 - b^2 - 2abi)(a-bi) + \alpha(a^2 - b^2 - 2abi) + \beta(a-bi) + \gamma \\ &= a^3 - a^2bi - b^2a + b^3i - 2a^2bi - 2ab^2 + \alpha a^2 - \alpha b^2 - 2\alpha abi + \beta a - \beta bi + \gamma \\ &= a^3 - b^2a - 2ab^2 + \alpha a^2 - \alpha b^2 + \beta a + \gamma - (a^2b - b^3 + 2a^2b + 2\alpha ab + \beta b)i \end{aligned}$$

Er is nu goed te zien dat $y_1^2 = \overline{y_2^2}$. Voor het gemak wordt gedefinieerd $y_1^2 = c + di$ en $y_2^2 = c - di$. Dan is bekend

$$\begin{aligned} y_1 = \pm\sqrt{c+di} &= \pm\left(\sqrt{\tfrac{\sqrt{c^2+d^2}+c}{2}} + (teken(d))i\sqrt{\tfrac{\sqrt{c^2+d^2}-c}{2}}\right) \\ y_2 = \pm\sqrt{c-di} &= \pm\left(\sqrt{\tfrac{\sqrt{c^2+d^2}+c}{2}} + (-teken(d))i\sqrt{\tfrac{\sqrt{c^2+d^2}-c}{2}}\right). \end{aligned}$$

Oftewel de conclusie die nu getrokken kan worden is dat y_2 niet de complex geconjugeerde hoeft te zijn van y_1. Dit kán wel het geval zijn maar er kan ook gelden $y_1 = -y_2$; hierbij heeft dus ook het reële deel van y_2 een ander teken vergeleken met het reële deel van y_1 en dus niet alleen het imaginaire deel.

3.7 Het derde snijpunt op $y^2 = x^3 - x$

Er is nu meerdere malen een koordemiddenoppervlak bij een kubische kromme geconstrueerd. Een interessante vraag is of dit ook andersom kan; kan bij een punt op het koordemiddenoppervlak de bijbehorende punten op de kubische kromme worden gevonden? En wanneer er een lijn tussen deze punten op de kromme wordt getrokken, kan dan het derde snijpunt gevonden worden? Dit wordt alleen besproken voor $y^2 = x^3 - x$. Eerst wordt de afbeelding van het koordemiddenoppervlak naar de kubische kromme gezocht. Er wordt een punt op het oppervlak genomen:

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

Het is belangrijk dat beseft wordt dat alle drie de coördinaten bekend zijn. De punten op de kubische kromme die gevonden dienen te worden zijn (x_1, y_1) en (x_2, y_2). De volgende definities maken de daarop volgende berekeningen overzichtelijker.

$$x_1 + x_2 = \rho \qquad x_1^2 + x_2^2 = \tau$$

Nu wordt er gezocht naar de waarden voor x_1 en x_2.

$$\rho^2 = (x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 = \tau + 2x_1x_2$$

$$x_2 = \frac{\rho^2 - \tau}{2x_1}$$

Nu wordt gebruikt gemaakt van $x_1 + x_2 = \rho$.

$$x_1 + \frac{\rho^2 - \tau}{2x_1} = \rho$$

$$x_1^2 - \rho x_1 + \frac{1}{2}(\rho^2 - \tau) = 0$$

$$x_1 = \frac{\rho \pm \sqrt{-\rho^2 + 2\tau}}{2}$$

$$x_2 = \rho - \frac{\rho \pm \sqrt{-\rho^2 + 2\tau}}{2}$$

In het eerste opzicht zijn er twee mogelijkheden voor x_1 en daarmee ook twee mogelijkheden voor x_2 maar wanneer de mogelijkheden worden uitgeschreven is te zien dat de waarden voor x_1 en x_2 toch te bepalen zijn. We weten

$$x_1 = \frac{\rho + \sqrt{-\rho^2 + 2\tau}}{2} \quad of \quad x_1 = \frac{\rho - \sqrt{-\rho^2 + 2\tau}}{2}.$$

Dus

$$x_2 = \rho - \frac{\rho + \sqrt{-\rho^2 + 2\tau}}{2} \quad of \quad x_2 = \rho - \frac{\rho - \sqrt{-\rho^2 + 2\tau}}{2}.$$

Maar nu is te zien dat als

$$x_1 = \frac{\rho + \sqrt{-\rho^2 + 2\tau}}{2} \quad dan \quad x_2 = \frac{\rho - \sqrt{-\rho^2 + 2\tau}}{2}.$$

En als

$$x_1 = \frac{\rho - \sqrt{-\rho^2 + 2\tau}}{2} \quad dan \quad x_2 = \frac{\rho + \sqrt{-\rho^2 + 2\tau}}{2}.$$

Welke x_1 ook gekozen wordt, x_1 en x_2 zullen altijd hetzelfde paar zijn.

Nu x_1 en x_2 bekend zijn kunnen de y-coördinaten van de te vinden punten bepaald worden. Stel er wordt gekozen voor $x_1 = \frac{\rho + \sqrt{-\rho^2 + 2\tau}}{2}$ dan geldt

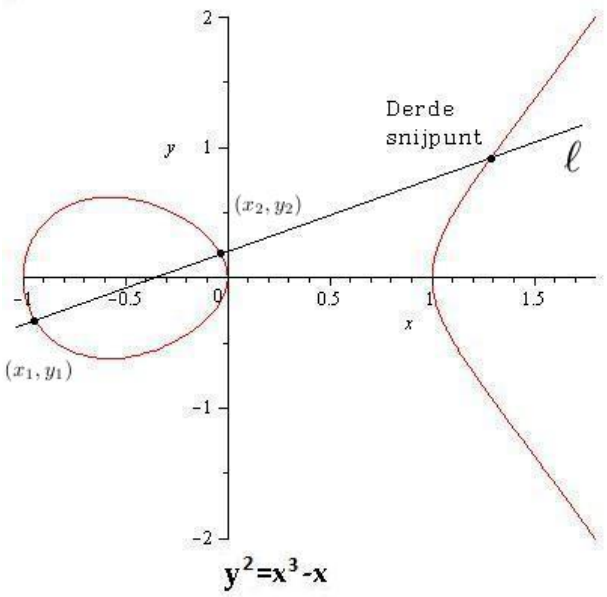
$$y_1 = \pm\sqrt{\left(\frac{\rho + \sqrt{-\rho^2 + 2\tau}}{2}\right)^3 - \left(\frac{\rho + \sqrt{-\rho^2 + 2\tau}}{2}\right)}.$$

En ook $x_2 = \frac{\rho - \sqrt{-\rho^2 + 2\tau}}{2}$ en daarmee

$$y_2 = \pm\sqrt{\left(\frac{\rho - \sqrt{-\rho^2 + 2\tau}}{2}\right)^3 - \left(\frac{\rho - \sqrt{-\rho^2 + 2\tau}}{2}\right)}.$$

De som van y_1 en y_2 is bekend en daarom is te bepalen welk teken er voor y_1 en y_2 hoort te staan om deze som kloppend te houden. Het puntenpaar behorende bij het gegeven koordemidden is nu gevonden.

Nu wordt het derde snijpunt bepaald. In de afbeelding hieronder is een voorbeeld te zien van zo'n derde snijpunt. Er wordt alleen gekeken naar de situatie waarbij de eerste twee punten beide niet een positieve x-waarde hebben. Wanneer beide x-waarden positief zijn is er ook geen derde snijpunt. Er zou nog kunnen worden gedacht aan de situatie waarin *één* x-waarde positief en *één* x-waarde negatief is; deze situatie is vergelijkbaar met de situatie die nu besproken wordt.



Afbeelding 10. Het derde snijpunt.

Het linkse liggende bekende punt wordt (x_1, y_1) genoemd; het rechtse punt wordt (x_2, y_2) genoemd. De lijn, ℓ, heeft dan de volgende vergelijking:

$$\ell : y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + constante.$$

Vervolgens wordt de constante bepaald door het punt (x_1, y_1) in te vullen.

$$constante = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1$$

Oftewel

$$\ell : y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1.$$

Wanneer de x-coördinaten hetzelfde zijn maar de y-coördinaat niet dan is ℓ een verticale lijn en is er geen derde snijpunt. Wanneer de twee punten gelijk aan elkaar zijn, wordt de raaklijn aan de kromme genomen. In dit geval wordt de richtingscoëfficient door de afgeleide van de vergelijking van de kromme, $y^2 = x^3 - x$, bepaald.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3 - x}}(3x^2 - 1) \quad voor \quad y_1 < 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^3 - x}}(3x^2 - 1) \quad \textit{voor} \quad y_1 > 0$$

Nu wordt de lijn, ℓ, gegeven door

$$\ell : y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cdot x + y_1 - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_1) \cdot x_1.$$

Het derde snijpunt ligt op de lijn, ℓ, en op de kubische kromme en voldoet dus aan beide vergelijkingen. Komen hier twee oplossingen uit, dan zijn dit de eerste twee punten en bestaat er geen derde snijpunt. Komen hier drie oplossingen uit dan zijn dit de eerste twee punten en het derde snijpunt.

4 Het klassieke probleem

Nu wordt het klassieke probleem onder handen genomen. Het klassieke probleem is het vinden van het koordemiddenoppervlak van de snijkromme tussen een elliptische cilinder en een ellipsoïde. Dit oppervlak is het in de inleiding genoemde gipsmodel. Echter wordt er eerst gekeken of dit klassieke probleem kan worden gevangen in de hiervoor beschreven kubische kromme.

4.1 Snijkromme vangen in kubische kromme

Om erachter te komen of dit probleem te vangen is in het probleem van de kubische krommen, wordt er onderzocht of de snijkromme te schrijven is als een kubische kromme, dus van de vorm in (4). Wanneer dit mogelijk is, zal dezelfde aanpak tot de vergelijking van het koordemiddenoppervlak leiden.

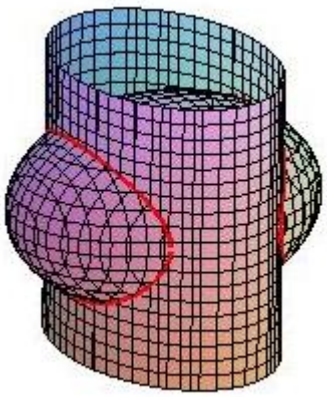
De algemene vergelijking van een elliptische cilinder is

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

De algemene vergelijking van een ellipsoïde is

$$\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{s^2} + \frac{z^2}{t^2} = 1.$$

Het gaat hier om de snijkromme tussen deze twee oppervlakken; de kromme voldoet dus aan beide vergelijkingen. Het is afhankelijk van de keuze van a, b, r, s en t of deze kromme daadwerkelijk bestaat. Wanneer de ellipsoïde volledig bevat is in de elliptische cilinder bestaat er geen snijkromme. In afbeelding 11 is een voorbeeld te zien waarbij er wel een snijkromme bestaat.



Afbeelding 11. De snijkromme tussen een elliptische cilinder en een ellipsoïde (appendix: B.8).

Er worden nieuwe parameters ingevoerd, zodat de gewenste schrijfvorm voor de kromme verkregen wordt. Eerst wordt de vergelijking voor de elliptische cilinder gebruikt; de vergelijking voor de ellipsoïde wordt er later bij gehaald. Hiertoe wordt gekozen voor

$$\gamma = \frac{x}{a}$$

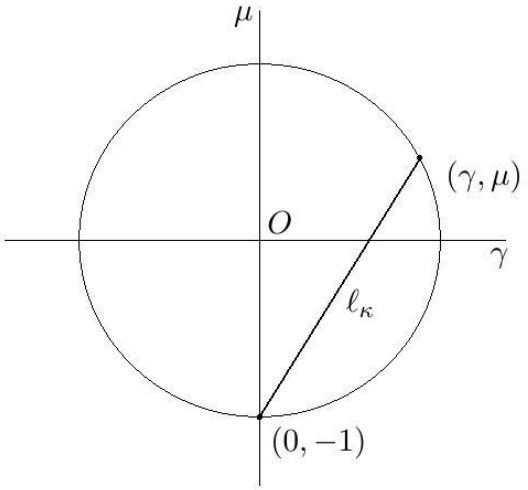
en

$$\mu = \frac{y}{b}.$$

Zo wordt de vergelijking van de elliptische cilinder

$$\gamma^2 + \mu^2 = 1.$$

Wanneer naar het grondvlak van de cilinder wordt gekeken verandert deze, met de invoering van de nieuwe parameters γ en μ, van een ellips naar een cirkel. Deze cirkel is weergegeven in afbeelding 12.



Afbeelding 12. Grondvlak cilinder na parametrisering.

De coördinaten van de cirkel worden op een nieuwe manier gedefinieerd, namelijk door een lijnstuk tussen een vast punt en een ander (willekeurig) punt op de cirkel. Zo wordt er gekozen om het punt $(0, -1)$ vast te kiezen en het lijnstuk wordt ℓ_κ genoemd. De helling van het lijnstuk bepaald nu het tweede punt op de cirkel; de helling wordt κ genoemd. De helling van ℓ_κ is

$$\kappa = \frac{\mu + 1}{\gamma}.$$

Oftewel voor ℓ_κ geldt

$$\mu = \kappa\gamma - 1.$$

Echter gaat het om de punten die op de cirkel maar ook op ℓ_κ liggen. Voor de doorsnijding tussen dit lijnstuk en de cirkel geldt, na invullen van de vergelijking van het lijnstuk in de vergelijking van de cirkel,

$$\gamma^2 + (\kappa\gamma - 1)^2 = 1.$$

Hiermee kan γ, als functie van κ, bepaald worden.

$$(\kappa^2 + 1)\gamma^2 - 2\kappa\gamma = 0$$

Dus

$$\gamma = 0 \quad \vee \quad \gamma = \frac{2\kappa}{\kappa^2 + 1}.$$

Bij beide oplossingen is μ te vinden.

$$\mu = \kappa\gamma - 1 = -1 \quad \vee \quad \mu = \frac{2\kappa^2}{\kappa^2+1} - 1 = \frac{\kappa^2-1}{\kappa^2+1}$$

Uiteraard is het punt $(0,-1)$ een oplossing, want vanuit dit uitgangspunt is het systeem opgebouwd. Nu kunnen er vergelijkingen gevonden worden voor x en y als functie van κ.

$$x = a\gamma = \frac{2a\kappa}{\kappa^2+1} \qquad y = b\mu = b\frac{\kappa^2-1}{\kappa^2+1}$$

Nu wordt de vergelijking van de ellipsoïde er bij gehaald en worden de hierboven gevonden functies voor x en y ingevuld.

$$\frac{z^2}{t^2} = 1 - \frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{s^2} = 1 - \frac{4a^2\kappa^2}{r^2(\kappa^2+1)^2} - \frac{b^2(\kappa^2-1)^2}{s^2(\kappa^2+1)^2}$$

Dit is dus de vergelijking voor de snijkromme, want de vergelijking van de elliptische cilinder zit hier via κ in verwerkt. Wanneer deze vergelijking wordt uitgewerkt volgt

$$\frac{z^2}{t^2} = \frac{(r^2s^2 - b^2r^2)\kappa^4 + (2r^2s^2 - 4a^2s^2 + 2b^2r^2)\kappa^2 + r^2s^2 - b^2r^2}{r^2(\kappa^2+1)^2s^2}.$$

Het geheel vermenigvuldigen met $r^2(\kappa^2+1)^2s^2$ geeft

$$\left(\frac{zr(\kappa^2+1)s}{t}\right)^2 = (r^2s^2 - b^2r^2)\kappa^4 + (2r^2s^2 - 4a^2s^2 + 2b^2r^2)\kappa^2 + r^2s^2 - b^2r^2.$$

En voor het gemak wordt er gekozen voor

$$w = \left(\frac{zr(\kappa^2+1)s}{t}\right).$$

Kortom, de vergelijking voor de snijkromme is nu

$$w^2 = (r^2s^2 - b^2r^2)\kappa^4 + (2r^2s^2 - 4a^2s^2 + 2b^2r^2)\kappa^2 + r^2s^2 - b^2r^2.$$

Deze vergelijking is nu bijna van de vorm van de kubische kromme. Het verschil is dat aan de rechterkant een vierdegraads vergelijking in plaats van de derdegraads vergelijking staat.

Van deze vierdegraads vergelijking wordt nu een derdegraads vergelijking gemaakt volgens de methode beschreven in (Cassels, J.W.S. 1991). Hierin is te lezen dat de kopcoëfficient van de vierdegraads vergelijking een kwadraat moet zijn om deze methode te kunnen gebruiken. Daarom wordt gesteld

$$m^2 = r^2s^2 - b^2r^2$$

en verder

$$n = 2r^2s^2 - 4a^2s^2 + 2b^2r^2.$$

Dit resulteert in de volgende vergelijking.

$$w^2 = m^2\kappa^4 + n\kappa^2 + m^2$$

Delen door m^2 geeft

$$\frac{w^2}{m^2} = \kappa^4 + \frac{n}{m^2}\kappa^2 + 1.$$

Vervolgens wordt de rechterkant van de vergelijking op een andere manier geschreven.

$$\frac{w^2}{m^2} = \left(\kappa^2 + \frac{n}{2m^2}\right)^2 - \frac{n^2}{4m^4} + 1.$$

Dus geldt

$$\left(\frac{w}{m} + \left(\kappa^2 + \frac{n}{2m^2}\right)\right)\left(\frac{w}{m} - \left(\kappa^2 + \frac{n}{2m^2}\right)\right) = -\frac{n^2}{4m^4} + 1.$$

Kies nu

$$T = \frac{w}{m} + \kappa^2 + \frac{n}{2m^2}.$$

Er geldt dus

$$\frac{w}{m} - \left(\kappa^2 + \frac{n}{2m^2}\right) = \frac{-\frac{n^2}{4m^4} + 1}{T} = \frac{-n^2 + 4m^4}{4m^4 T}.$$

Nu wordt alles vermenigvuldigd met -1 en wordt er T bij opgeteld.

$$2\left(\kappa^2 + \frac{n}{2m^2}\right) = T + \frac{n^2 - 4m^4}{4m^4 T}.$$

Er wordt nu vermenigvuldigt met T^2

$$2T^2\left(\kappa^2 + \frac{n}{2m^2}\right) = T^3 + \frac{n^2 - 4m^4}{4m^4}T.$$

Nu wordt voor de subtitutie $T\kappa = S$ gekozen.

$$2S^2 = T^3 - \frac{n}{m^2}T^2 + \frac{n^2 - 4m^4}{4m^4}T$$

Hier eindigt de methode beschreven in (Cassels, J.W.S. 1991); het is nu een derdegraad vergelijking geworden. Toch heeft de vergelijking nog niet de gewenste vorm. Daarom wordt het geheel vermenigvuldigd met 8.

$$16S^2 = 8T^3 - \frac{8n}{m^2}T^2 + 8\frac{n^2 - 4m^4}{4m^4}T$$

Tot slot worden er nog twee substituties ingevoerd, namelijk

$$R = 4S$$

en

$$Q = 2T.$$

Het resultaat is

$$R^2 = Q^3 - \frac{2n}{m^2}Q^2 + \frac{n^2 - 4m^4}{m^4}Q.$$

Het is nu gelukt om de vergelijking van de snijkromme in de vorm van (4) te schrijven. Deze snijkromme is dus te vangen in de kubische kromme. In het eerste opzicht lijkt de snijkromme veel ingewikkelder dan een kubische kromme. Dit is dus niet het geval; er is alleen moeite voor nodig om dit in te zien.

Echter maken de vele substituties het moeilijk om het koordemiddenoppervlak met de verkregen vergelijking te construeren. Het is niet het aantal substituties die het moeilijk maakt maar bijvoorbeeld dat in de nieuwe vergelijking waarden naar oneindig worden gestuurd terwijl bij de oorspronkelijk snijkromme dit nooit het geval is.

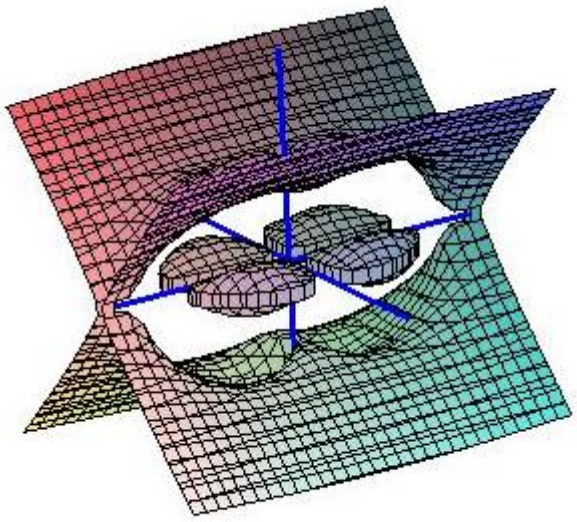
4.2 Koordemiddenoppervlak snijkromme

Het koordemiddenoppervlak van het klassieke probleem kan getekend worden met de computer. Afbeelding 13 laat het koordemiddenoppervlak zien van de snijkromme tussen de elliptische cilinder

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$$

en de ellipsoïde

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{2} = 1.$$



Afbeelding 13. Koordemiddenoppervlak K bij de snijkromme van een elliptische cilinder en een ellipsoïde (appendix: B.9).

De vergelijking (appendix: B.9) van dit oppervlak is

$$K : -225x^2z^4 + 1080x^2z^2 - 450y^2z^4 - 1200y^2z^2$$

$$-105x^4z^2 + 98x^4y^2 - 1568x^2y^2 + 196y^4x^2 + 420y^4z^2.$$

Het bovenstaande oppervlak heeft singulariteiten (appendix: B.10). De singulariteiten zitten net als in het vorige hoofdstuk bij de punten op K waarvoor geldt

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}z} = 0.$$

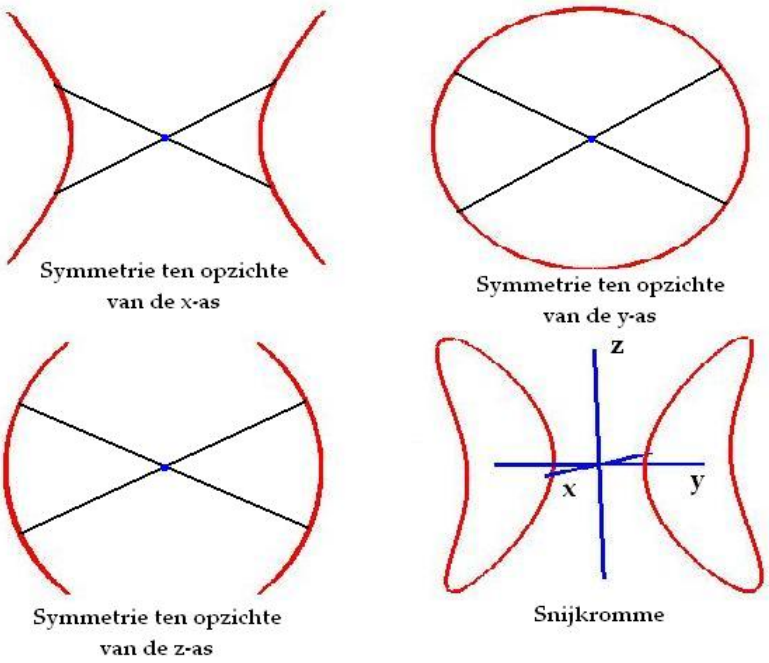
Dit geldt voor

$$(x, y, z) =$$

$$(x, 0, 0), (0, y, 0), (0, 0, z),$$

De drie sets met singulariteiten zijn, respectievelijk, de x-, y- en z-as; deze zijn in afbeelding 13 in het blauw weergegeven. De coördinaat-assen bestaan volledig uit singulariteiten, omdat de snijkromme symmetrisch is ten opzichte van deze assen. Zo is er,

net als in hoofdstuk 3, altijd een koordemidden dat uit twee verschillende puntenparen voortgebracht wordt op deze assen. In afbeelding 14 is die symmetrie goed te zien en is bij elke as een voorbeeld gegeven van zo'n dubbel koordemidden.



Afbeelding 14. Symmetriën ten opzichte van de coördinaat-assen (appendix: B.11).

Ook is op te merken dat het punt $(0, 0, 0)$ het koordemidden is van heel veel verschillende puntenparen.

In afbeelding 13 is goed te zien dat het oppervlak uit twee verschillende delen bestaat; het omringende en het deel dat wordt omringd. Het omringende deel bevat de koordemiddens die voortkomen uit complex geconjugeerde puntenparen die voldoen aan de snijkromme. Het deel dat wordt omringd vindt zijn oorsprong in de reële puntenparen op de snijkromme. (Dyck, W. 1892)

Het koordemiddenoppervlak bij de snijkromme tussen een elliptische cilinder en een ellipsoïde is nu gevonden en bestudeerd. Echter komt afbeelding 13 niet geheel overeen met het gispmodel op het voorblad.

5 Conclusie

In deze scriptie zijn de reële delen van verschillende koordemiddenoppervlakken gevonden. De eerste was eenvoudig, daarna volgden iets moeilijker te construeren oppervlakken en uiteindelijk is het klassieke probleem onder handen genomen. Het is nu ook duidelijk wat het gipsmodel voorstelt en hoe het tot stand komt. Het doel is nu bereikt.

De koordemiddens uit hoofdstuk 3 leken op de koordemiddens in hoofdstuk 2. Dit is niet erg opmerkelijk, want het is de keuze van de inbedding die deze overeenkomst veroorzaakt. Het klassieke probleem lijkt aanvankelijk een veel ingewikkelder probleem dan die van de kubische krommen. Daarom is op te merken dat een ogenschijnlijk ingewikkeld probleem te vangen is in het probleem van de kubische krommen.

Verder is het enigszins opvallend dat alleen reële en complex geconjugeerde puntenparen leiden tot een reëel koordemidden.

Tot slot kan er geconcludeerd worden dat het gipsmodel niet op de juist wijze in de vitrinekast in de Bernoulliborg stond. De afbeelding die met Maple geconstrueerd is en de afbeelding in de catalogus van Martin Schilling komen overeen. (Schilling, M. 1911) De foto op het voorblad is niet gelijk aan deze afbeeldingen: het omringde gedeelte moet negentig graden gedraaid worden om de verticale as.

Zoals hieronder, in afbeelding 15, is te zien is dit inmiddels gebeurd. Het gipsmodel is nu, veilig opgeborgen in de vitrinekast, op de juiste wijze te bewonderen op de vierde verdieping van de Bernoulliborg.

Afbeelding 15. Het gipsmodel op de juist wijze.

Referenties

[1] Cassels, J.W.S. 1991. *Lectures on Elliptic Curves. London Mathematical Society Student Texts 24*. Cambridge University Press, New York, 137p.

[2] Dyck, W. 1892. *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente: Nebst Nachtrag*. Universiteitsboekdrukkerij van Dr. C. Wolg & Sohn, München, 428p.

[3] van Geemen, B., Lenstra, H.W., Oort, F. & (toevoegingen van) Top, J. 2012. Algebraïsche Structuren. *Collegedictaat Rijksuniversiteit Groningen voor het vak 'Algebraïsche Structuren'*. Groningen, 237p.

[4] Rijksuniversiteit Groningen, 2012. Mathematical models of surfaces, http://www.math.rug.nl/models/.

[5] Schilling, M. 1911. *Catalog mathematischer Modelle für den höheren mathematischen Unterricht*. Verlag von Martin Schilling, Leipzig, 190p.

A Bijectie

Propositie:

$$\vartheta : C \times C/\sim \xrightarrow{\sim} M$$

is een bijectie.

Bewijs: Om aan te tonen dat de afbeelding ϑ bijectief is, moet aangetoond worden dat deze afbeelding surjectief en injectief is.

Het is duidelijk dat de afbeelding surjectief is, omdat de afbeelding op zijn beeld geprojecteerd wordt.

Aangezien het om de ongeordende paren gaat geldt dus $(p, q) = (q, p)$. Dit is zeker nodig om te bewijzen dat de afbeelding injectief is, want wanneer dit niet geval is wordt (p, q) op hetzelfde punt afgebeeld als (q, p).

Bestaat er een puntenpaar (k, l) zodanig dat ook $\vartheta(k, l) = \left(\frac{t+s}{2}, \frac{t^2+s^2}{2}, \frac{t^n+s^n}{2}\right)$? Wanneer dit wel het geval is, dan is ϑ niet injectief. Definieer $k = (u, u^2, u^n)$ en $l = (e, e^2, e^n)$. Dezelfde vraag is: als

$$\left(\frac{t+s}{2}, \frac{t^2+s^2}{2}, \frac{t^n+s^n}{2}\right) = \left(\frac{u+e}{2}, \frac{u^2+e^2}{2}, \frac{u^n+e^n}{2}\right)$$

geldt dan $(p, q) = (k, l)$, oftewel $t = u$ en $s = e$ of $t = e$ en $s = u$?

Er wordt gebruik gemaakt van het feit dat de eerste coördinaten van het koordemidden gelijk zijn aan elkaar. Er geldt $t + s = u + e$ dus

$$u = t + s - e. \tag{5}$$

Maar de tweede coördinaten zijn uiteraard ook gelijk aan elkaar, dus $t^2 + s^2 = u^2 + e^2$ en daarom

$$u^2 = t^2 + s^2 - e^2. \tag{6}$$

Wanneer vergelijking (5) in vergelijking (6) wordt ingevuld volgt

$$(t + s - e)^2 = t^2 + s^2 - e^2$$

$$(t + s - e)(t + s - e) = t^2 + st - et + st + s^2 - se - et - se + e^2.$$

Dus

$$-e^2 = 2st - 2et - 2se + e^2.$$

Nu is gemakkelijk te zien dat

$$2st - 2et - 2se + 2e^2 = 0.$$

Na delen door 2 volgt

$$st - et - se + e^2 = (e - s)(e - t) = 0.$$

Dus $e = s$ of $e = t$. Als $e = s$ dan moet gelden $u = t$, want er moet gelden $t + s = u + e$. En als $e = t$ dan moet gelden $u = s$, want er moet weer $t + s = u + e$ gelden.

Er is nu bewezen dat elk punt op M het beeld is van precies *één* puntenpaar op $C \times C/\sim$. Dus ϑ is surjectief en injectief en dus is ϑ bijectief.

B Maplecodes

B.1 Afbeelding koordemiddenoppervlak zonder complexe t en s

Dit is de maplecode die gebruikt is om afbeelding 2 te construeren.

```
> md := plot3d([(t+s)/2, (t^2+s^2)/2, (t^3+s^3)/2], t=-2..2, s=-2..2):
> display(md, sp);
```

B.2 Afbeelding koordemiddenoppervlak inclusief complex geconjugeerde t en s

Dit is de maplecode die gebruikt is om afbeelding 3 te construeren.

```
> sp := spacecurve([t, t^2, t^3], t=-2..2, color=red, thickness=3):
> mc := spacecurve(subs(t=1, [(t+s)/2, (t^2+s^2)/2, (t^3+s^3)/2]), s=-2..2, color=yellow, thickness=3):
> display(sp, mc, plot3d(3*x*y - 2*x^3, x=-2..2, y=-2..2));
```

B.3 Berekenen graad koordemiddenoppervlak

Dit is de maplecode die gebruikt is om de gegevens in voor tabel 1 te verkrijgen. Hierbij werd steeds een andere waarde voor n ingevoerd. Dit is het geval voor $n = 3$.

```
> n := 3: eliminate([2*x = t + s, 2*y = t^2 + s^2, 2*z = t^n + s^n], {t, s});
```

B.4 Afbeeldingen 2D-grafieken

Dit is de maplecode die is gebruikt om de grafieken uit afbeelding 4 te tekenen.

```
with(plots):
> display(implicitplot(y^2 = x^3 - x, x=-2..2, y=-2..2, numpoints=10000))
> display(implicitplot(y^2 = x^2*(x+1), x=-2..2, y=-2..2, numpoints=10000))
> display(implicitplot(y^2 = x^3 - 4*x + 4, x=-5..5, y=-4..4, numpoints=10000))
> display(implicitplot(y^2 = x^3, x=-2..2, y=-2..2, numpoints=10000))
> display(implicitplot(y^2 = x^2*(x-1), x=-2..2, y=-1..1, numpoints=10000))
```

B.5 Het vinden van de vergelijkingen van de koordemiddenoppervlakken van de kubische krommen

Dit is de maplecode die gebruikt is om de vergelijkingen van de koordemiddenoppervlakken te vinden bij de kubische krommen uit hoofdstuk 3. Alle vijf vergelijkingen zijn in de scriptie gedeeld door 8.

$$> \left(\frac{1}{2}\cdot\left(\eta_{11}^2+\xi_1-\xi_1\cdot\left(\xi_1^2-\frac{3}{2}\left(\xi_1^2-lamda\right)\right)\right)\right)^2-\frac{\left(\xi_1^2-lamda\right)}{2}\cdot\left(\left(\frac{\left(\xi_1^2-lamda\right)}{2}\right)^2-lamda+1\right)=0$$

$$\left(\frac{1}{2}\eta_{11}^2+\frac{1}{2}\xi_1-\frac{1}{2}\xi_1\left(-\frac{1}{2}\xi_1^2+\frac{3}{2}lamda\right)\right)^2-\frac{1}{2}\left(\xi_1^2-lamda\right)\left(\left(\frac{1}{2}\xi_1^2-\frac{1}{2}lamda\right)^2-lamda+1\right)=0$$

$$> eliminate\left(\left[2\cdot x=\xi_1,\ 2\cdot y=lamda,\ 2\cdot z=\eta_{11},\ \left(\frac{1}{2}\cdot\left(\eta_{11}^2+\xi_1-\xi_1\cdot\left(\xi_1^2-\frac{3}{2}\left(\xi_1^2-lamda\right)\right)\right)\right)^2-\frac{\left(\xi_1^2-lamda\right)}{2}\cdot\left(\left(\frac{\left(\xi_1^2-lamda\right)}{2}\right)^2-lamda+1\right)=0\right],\ \{\xi_1,\ lamda,\ \eta_{11}\}\right)$$

$$\left[\left\{lamda=2y,\ \eta_{11}=2z,\ \xi_1=2x\right\},\ \left\{-32z^4-32z^2x-64z^2x^3+96z^2xy+8x^2-32x^4+16x^2y+32x^6-24x^2y^2-8y^3+16y^2-8y\right\}\right]$$

$$> \left(\frac{1}{2}\cdot\left(\eta_{21}^2-\xi_1\cdot\left(lamda-\left(\frac{\left(\xi_1^2-lamda\right)}{2}\right)\right)-lamda\right)\right)^2-\left(\frac{\left(\xi_1^2-lamda\right)}{2}\right)^2\cdot\left(\left(\frac{\left(\xi_1^2-lamda\right)}{2}\right)+\xi_1+1\right)=0$$

$$\left(\frac{1}{2}\eta_{21}^2-\frac{1}{2}\xi_1\left(\frac{3}{2}lamda-\frac{1}{2}\xi_1^2\right)-\frac{1}{2}lamda\right)^2-\left(\frac{1}{2}\xi_1^2-\frac{1}{2}lamda\right)^2\left(\frac{1}{2}\xi_1^2-\frac{1}{2}lamda+\xi_1+1\right)=0$$

$$> eliminate\left(\left[2\cdot x=\xi_1,\ 2\cdot y=lamda,\ 2\cdot z=\eta_{21},\ \left(\frac{1}{2}\eta_{21}^2-\frac{1}{2}\xi_1\left(\frac{3}{2}lamda-\frac{1}{2}\xi_1^2\right)-\frac{1}{2}lamda\right)^2-\left(\frac{1}{2}\xi_1^2-\frac{1}{2}lamda\right)^2\left(\frac{1}{2}\xi_1^2-\frac{1}{2}lamda+\xi_1+1\right)=0\right],\ \{\xi_1,\ lamda,\ \eta_{21}\}\right)$$

$$\left[\left\{lamda=2y,\ \eta_{21}=2z,\ \xi_1=2x\right\},\ \left\{-32z^4+96z^2xy-64z^2x^3+32z^2y-24x^2y^2-32xy^2+32x^6-32x^3y+64x^5+32x^4-32x^2y-8y^3\right\}\right]$$

$$> \left(\frac{1}{2}\cdot\left(\eta_{31}^2-\xi_1\cdot\left(lamda-\frac{\left(\xi_1^2-lamda\right)}{2}\right)+4\cdot\xi_1-8\right)\right)^2-\left(\left(\frac{\left(\xi_1^2-lamda\right)}{2}\right)^3+4\cdot\left(\xi_1\cdot\left(lamda-\frac{\left(\xi_1^2-lamda\right)}{2}\right)\right)-4\cdot\frac{\left(\xi_1^2-lamda\right)}{2}\cdot lamda+16\cdot\frac{\left(\xi_1^2-lamda\right)}{2}-16\xi_1+16\right)=0$$

$$\left(\frac{1}{2}\eta_{31}^2-\frac{1}{2}\xi_1\left(\frac{3}{2}lamda-\frac{1}{2}\xi_1^2\right)+2\xi_1-4\right)^2-\left(\frac{1}{2}\xi_1^2-\frac{1}{2}lamda\right)^3-4\xi_1\left(\frac{3}{2}lamda-\frac{1}{2}\xi_1^2\right)+4\left(\frac{1}{2}\xi_1^2-\frac{1}{2}lamda\right)lamda-8\xi_1^2+8lamda+16\xi_1-16=0$$

$$> eliminate\left(\left[2\cdot x=\xi_1,\ 2\cdot y=lamda,\ 2\cdot z=\eta_{31},\ \left(\frac{1}{2}\eta_{31}^2-\frac{1}{2}\xi_1\left(\frac{3}{2}lamda-\frac{1}{2}\xi_1^2\right)+2\xi_1-4\right)^2-\left(\frac{1}{2}\xi_1^2-\frac{1}{2}lamda\right)^3-4\xi_1\left(\frac{3}{2}lamda-\frac{1}{2}\xi_1^2\right)+4\left(\frac{1}{2}\xi_1^2-\frac{1}{2}lamda\right)lamda-8\xi_1^2+8lamda+16\xi_1-16=0\right],\ \{\xi_1,\ lamda,\ \eta_{31}\}\right)$$

$$\left[\left\{lamda=2y,\ \eta_{31}=2z,\ \xi_1=2x\right\},\ \left\{-128y+128x^2-64z^2x^3-128z^2x-24x^2y^2+64x^2y+64y^2+96z^2xy-32z^4+32x^6-128x^4-8y^3+128z^2\right\}\right]$$

$$> \left(\frac{1}{2}\cdot\left(\eta_{41}^2-\xi_1\cdot\left(lamda-\frac{\left(\xi_1^2-lamda\right)}{2}\right)\right)\right)^2-\left(\frac{\left(\xi_1^2-lamda\right)}{2}\right)^3=0$$

$$\left(\frac{1}{2}\eta_{41}^2-\frac{1}{2}\xi_1\left(\frac{3}{2}lamda-\frac{1}{2}\xi_1^2\right)\right)^2-\left(\frac{1}{2}\xi_1^2-\frac{1}{2}lamda\right)^3=0$$

$$> eliminate\left(\left[2\cdot x=\xi_1,\ 2\cdot y=lamda,\ 2\cdot z=\eta_{41},\ \left(\frac{1}{2}\eta_{41}^2-\frac{1}{2}\xi_1\left(\frac{3}{2}lamda-\frac{1}{2}\xi_1^2\right)\right)^2-\left(\frac{1}{2}\xi_1^2-\frac{1}{2}lamda\right)^3=0\right],\ \{\xi_1,\ lamda,\ \eta_{41}\}\right)$$

$$\left[\left\{lamda=2y,\ \eta_{41}=2z,\ \xi_1=2x\right\},\ \left\{-32z^4+96z^2xy-64z^2x^3-24x^2y^2+32x^6-8y^3\right\}\right]$$

$$> \left(\frac{1}{2}\cdot\left(\eta_{51}^2-\xi_1\cdot\left(lamda-\left(\frac{\left(\xi_1^2-lamda\right)}{2}\right)\right)+lamda\right)\right)^2-\left(\frac{\left(\xi_1^2-lamda\right)}{2}\right)^2\cdot\left(\left(\frac{\left(\xi_1^2-lamda\right)}{2}\right)-\xi_1+1\right)=0$$

$$\left(\frac{1}{2}\eta_{51}^2-\frac{1}{2}\xi_1\left(\frac{3}{2}lamda-\frac{1}{2}\xi_1^2\right)+\frac{1}{2}lamda\right)^2-\left(\frac{1}{2}\xi_1^2-\frac{1}{2}lamda\right)^2\left(\frac{1}{2}\xi_1^2-\frac{1}{2}lamda-\xi_1+1\right)=0$$

$$> eliminate\left(\left[2\cdot x=\xi_1,\ 2\cdot y=lamda,\ 2\cdot z=\eta_{51},\ \left(\frac{1}{2}\eta_{51}^2-\frac{1}{2}\xi_1\left(\frac{3}{2}lamda-\frac{1}{2}\xi_1^2\right)+\frac{1}{2}lamda\right)^2-\left(\frac{1}{2}\xi_1^2-\frac{1}{2}lamda\right)^2\left(\frac{1}{2}\xi_1^2-\frac{1}{2}lamda-\xi_1+1\right)=0\right],\ \{\xi_1,\ lamda,\ \eta_{51}\}\right)$$

$$\left[\left\{lamda=2y,\ \eta_{51}=2z,\ \xi_1=2x\right\},\ \left\{-32z^4+96z^2xy-64z^2x^3-32z^2y-24x^2y^2+32xy^2+32x^6+32x^3y-64x^5+32x^4-32x^2y-8y^3\right\}\right]$$

B.6 Afbeeldingen koordemiddenoppervlakken kubische krommen

Dit is de maplecode die is gebruikt om de afbeeldingen 5 t/m 9 te construeren.

```
> display(spacecurve([t, t^2, sqrt(t^3 - t)], t=-2..2, color=red, thickness=3, numpoints=10000), spacecurve([t, t^2, -sqrt(t^3 - t)], t=-2..2, color=red,
    thickness=3, numpoints=10000), implicitplot3d((-32*z^4 - 32*z^2*x - 64*z^2*x^3 + 96*z^2*x*y + 8*x^2 - 32*x^4 + 16*x^2*y + 32*x^6 - 24*x^2*y^2 - 8*y^3 + 16*y^2
    - 8*y), x=-2..2, y=-2..2, z=-2..2, grid=[30, 30, 30]), spacecurve([x, -2*x^2 + 1, 0], x=-2..2, color=blue, thickness=3))

> display(spacecurve([t, t^2, sqrt(t^3 + t^2)], t=-2..2, color=red, thickness=3, numpoints=10000), spacecurve([t, t^2, -sqrt(t^3 + t^2)], t=-2..2, color=red,
    thickness=3, numpoints=10000), implicitplot3d((-32*z^4 + 96*z^2*x*y - 64*z^2*x^3 + 32*z^2*y - 24*x^2*y^2 - 32*x*y^2 + 32*x^6 - 32*x^3*y + 64*x^5 + 32*x^4
    - 32*x^2*y - 8*y^3), x=-2..2, y=-2..2, z=-2..2, grid=[20, 20, 20]), spacecurve([x, 2*x^2, sqrt(2*x + 1)*x], x=-2..2, color=blue, thickness=3),
    spacecurve([x, 2*x^2, -sqrt(2*x + 1)*x], x=-2..2, color=blue, thickness=3), spacecurve([x, -2*x^2 - 2*x, 0], x=-2..2, color=blue, thickness=3))

> display(spacecurve([t, t^2, sqrt(t^3 - 4*t + 4)], t=-3..2, color=red, thickness=3, numpoints=10000), spacecurve([t, t^2, -sqrt(t^3 - 4*t + 4)], t=-3..2, color
    =red, thickness=3, numpoints=10000), implicitplot3d((-128*y + 128*x^2 - 64*z^2*x^3 - 128*z^2*x - 24*x^2*y^2 + 64*x^2*y + 64*y^2 + 96*z^2*x*y - 32*z^4 + 32*x^6
    - 128*x^4 - 8*y^3 + 128*z^2), x=-2..2, y=-2..2, z=-2..2, grid=[30, 30, 30]), spacecurve([x, -2*x^2 + 4, 0], x=-2..2, color=blue, thickness=3))

> display(spacecurve([t, t^2, sqrt(t^3)], t=-2..2, color=red, thickness=3, numpoints=10000), spacecurve([t, t^2, -sqrt(t^3)], t=-2..2, color=red, thickness=3,
    numpoints=10000), implicitplot3d((-32*z^4 + 96*z^2*x*y - 64*z^2*x^3 - 24*x^2*y^2 + 32*x^6 - 8*y^3), x=-2..2, y=-2..2, z=-2..2, grid=[30, 30, 30]),
    spacecurve([x, -2*x^2, 0], x=-1..1, color=blue, thickness=3), spacecurve([[(z^2/2)^(1/3), 2*(z^2/2)^(2/3), z], z=-2..2, color=blue, thickness=3])

> display(spacecurve([t, t^2, sqrt(t^3 - t^2)], t=-2..2, color=red, thickness=3, numpoints=10000), spacecurve([t, t^2, -sqrt(t^3 - t^2)], t=-2..2, color=red,
    thickness=3, numpoints=10000), implicitplot3d((-32*z^4 + 96*z^2*x*y - 64*z^2*x^3 - 32*z^2*y - 24*x^2*y^2 + 32*x*y^2 + 32*x^6 + 32*x^3*y - 64*x^5 + 32*x^4
    - 32*x^2*y - 8*y^3), x=-2..2, y=-2..2, z=-2..2, grid=[20, 20, 20]), spacecurve([x, 2*x^2, sqrt(2*x-1)*x], x=-2..2, color=blue, thickness=3,
    numpoints=1000), spacecurve([x, 2*x^2, -sqrt(2*x-1)*x], x=-2..2, color=blue, thickness=3, numpoints=1000), spacecurve([x, -2*x^2 + 2*x, 0], x=
    -2..2, color=blue, thickness=3))
```

B.7 Singulariteiten koordemiddenoppervlakken kubische krommen

Dit is de maplecode die is gebruikt om de singulariteiten te bepalen van de kubische krommen uit hoofdstuk 3. Sommige punten liggen niet op het koordemiddenoppervlak; dit zijn dus geen singulariteiten.

```
> solve({diff(-32*z^4-32*z^2*x-64*z^2*x^3+96*z^2*x*y+8*x^2-32*x^4+16*x^2*y+32*x^6-24*x^2*y^2-8*y^3+16*y^2-8*y=0,x),
  diff(-32*z^4-32*z^2*x-64*z^2*x^3+96*z^2*x*y+8*x^2-32*x^4+16*x^2*y+32*x^6-24*x^2*y^2-8*y^3+16*y^2-8*y=0,y),
  diff(-32*z^4-32*z^2*x-64*z^2*x^3+96*z^2*x*y+8*x^2-32*x^4+16*x^2*y+32*x^6-24*x^2*y^2-8*y^3+16*y^2-8*y=0,z)},{x,y,z})
```

$$\{x = x, y = -2x^2 + 1, z = 0\}, \left\{x = 0, y = \frac{1}{3}, z = 0\right\}, \left\{x = RootOf(-1 + 3_Z^2), y = \frac{1}{3}, z = 0\right\}$$

```
> solve({diff(-32*z^4+96*z^2*x*y-64*z^2*x^3+32*z^2*y-24*x^2*y^2-32*x*y^2+32*x^6-32*x^3*y+64*x^5+32*x^4-32*x^2*y-8*y^3=0,x),
  diff(-32*z^4+96*z^2*x*y-64*z^2*x^3+32*z^2*y-24*x^2*y^2-32*x*y^2+32*x^6-32*x^3*y+64*x^5+32*x^4-32*x^2*y-8*y^3=0,y),
  diff(-32*z^4+96*z^2*x*y-64*z^2*x^3+32*z^2*y-24*x^2*y^2-32*x*y^2+32*x^6-32*x^3*y+64*x^5+32*x^4-32*x^2*y-8*y^3=0,z)},{x,y,z})
```

$$\{x = x, y = -2x^2 - 2x, z = 0\}, \{x = x, y = 2x^2, z = RootOf(_Z^2 - 2x - 1, label = _L2)\, x\}, \left\{x = -\frac{1}{3}, y = \frac{2}{9}, z = 0\right\}$$

```
> solve({diff(-128*y+128*x^2-64*z^2*x^3-128*z^2*x-24*x^2*y^2+64*x^2*y+64*y^2+96*z^2*x*y-32*z^4+32*x^6-128*x^4-8*y^3+128*z^2=0,x),
  diff(-128*y+128*x^2-64*z^2*x^3-128*z^2*x-24*x^2*y^2+64*x^2*y+64*y^2+96*z^2*x*y-32*z^4+32*x^6-128*x^4-8*y^3+128*z^2=0,y),
  diff(-128*y+128*x^2-64*z^2*x^3-128*z^2*x-24*x^2*y^2+64*x^2*y+64*y^2+96*z^2*x*y-32*z^4+32*x^6-128*x^4-8*y^3+128*z^2=0,z)},{x,y,z})
```

$$\{x = x, y = -2x^2 + 4, z = 0\}, \left\{x = 0, y = \frac{4}{3}, z = 0\right\}, \left\{x = 0, y = \frac{4}{3}, z = RootOf(-2 + _Z^2)\right\}, \left\{x = 2\, RootOf(-1 + 3_Z^2, label = _L3), y = \frac{4}{3}, z = 0\right\}$$

```
> solve({diff(-32*z^4+96*z^2*x*y-64*z^2*x^3-24*x^2*y^2+32*x^6-8*y^3=0,x),
  diff(-32*z^4+96*z^2*x*y-64*z^2*x^3-24*x^2*y^2+32*x^6-8*y^3=0,y),
  diff(-32*z^4+96*z^2*x*y-64*z^2*x^3-24*x^2*y^2+32*x^6-8*y^3=0,z)},{x,y,z})
```

$$\{x = x, y = -2x^2, z = 0\}, \left\{x = RootOf(2_Z^3 - z^2), y = 2\, RootOf(2_Z^3 - z^2)^2, z = z\right\}$$

```
> solve({diff(-32*z^4+96*z^2*x*y-64*z^2*x^3-32*z^2*y-24*x^2*y^2+32*x*y^2+32*x^6+32*x^3*y-64*x^5+32*x^4-32*x^2*y-8*y^3=0,x),
  diff(-32*z^4+96*z^2*x*y-64*z^2*x^3-32*z^2*y-24*x^2*y^2+32*x*y^2+32*x^6+32*x^3*y-64*x^5+32*x^4-32*x^2*y-8*y^3=0,y),
  diff(-32*z^4+96*z^2*x*y-64*z^2*x^3-32*z^2*y-24*x^2*y^2+32*x*y^2+32*x^6+32*x^3*y-64*x^5+32*x^4-32*x^2*y-8*y^3=0,z)},{x,y,z})
```

$$\{x = x, y = -2x^2 + 2x, z = 0\}, \{x = x, y = 2x^2, z = RootOf(_Z^2 - 2x + 1, label = _L6)\, x\}, \left\{x = \frac{1}{3}, y = \frac{2}{9}, z = 0\right\}$$

B.8 Elliptische cilinder, ellipsoïde en snijkromme

Dit is de maplecode die gebruikt is om afbeelding 11 te construeren.

```
> display(implicitplot3d(((1/3)*x^2+(1/5)*y^2+(1/2)*z^2-1),x=-3..3,y=-3..3,z=-3..3,grid=[30,30,30]),
  implicitplot3d(((1/4)*x^2+(1/2)*y^2-1),x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2,grid=[20,20,20]),
  spacecurve([(2*2*lamda)/(lamda^2+1),sqrt(2)*((lamda^2-1)/(lamda^2+1)),sqrt(2-(32/3)*(lamda^2/(lamda^2+1)^2)-(4/5)*((lamda^2-1)^2/(lamda^2+1)^2))],
  lamda=-20..20,color=red,thickness=3,numpoints=100000),
  spacecurve([(2*2*lamda)/(lamda^2+1),sqrt(2)*((lamda^2-1)/(lamda^2+1)),-sqrt(2-(32/3)*(lamda^2/(lamda^2+1)^2)-(4/5)*((lamda^2-1)^2/(lamda^2+1)^2))],
  lamda=-20..20,color=red,thickness=3,numpoints=100000))
```

B.9 Vergelijking en afbeelding koordemiddenoppervlak snijkromme

Dit is de maplecode die gebruikt is om de vergelijking te vinden van het koordemiddenoppervlak van de snijkromme van een elliptische cilinder en een ellipsoïde en om afbeelding 13 te construeren.

```
> eliminate({x1 + x2 - x, y1 + y2 - y, z1 + z2 - z, x1^2 + 2 y1^2 - 4, x2^2 + 2 y2^2 - 4, 10 x1^2 + 6 y1^2 + 15 z1^2 - 30, 10 x2^2 + 6 y2^2 + 15 z2^2 - 30}, {x1, x2, y1, y2, z1, z2});
```

$$\left[\left\{x1 = \frac{1}{80}\,\frac{920\,x^6 + 1502\,x^4y^2 + 1305\,z^2x^4 - 676\,y^4x^2 + 5408\,x^2y^2 + 225\,x^2z^4 - 1080\,x^2z^2 - 420\,z^2y^4 + 450\,y^2z^4 + 1200\,y^2z^2 + 2400\,z^2x^2y^2}{\left(13\,x^4 + 26\,x^2y^2 + 15\,x^2z^2 + 30\,y^2z^2\right)x}, x2\right.$$

$$= \frac{1}{80}\,\frac{120\,x^6 + 578\,x^4y^2 - 105\,z^2x^4 + 676\,y^4x^2 - 5408\,x^2y^2 - 225\,x^2z^4 + 1080\,x^2z^2 + 420\,z^2y^4 - 450\,y^2z^4 - 1200\,y^2z^2}{\left(13\,x^4 + 26\,x^2y^2 + 15\,x^2z^2 + 30\,y^2z^2\right)x}, y1 =$$

$$-\frac{1}{160}\,\frac{400\,x^6 - 578\,x^4y^2 + 705\,z^2x^4 - 2756\,y^4x^2 + 5408\,x^2y^2 + 225\,x^2z^4 - 1080\,x^2z^2 - 2820\,z^2y^4 + 450\,y^2z^4 + 1200\,y^2z^2}{y\left(13\,x^4 + 26\,x^2y^2 + 15\,x^2z^2 + 30\,y^2z^2\right)}, y2 =$$

$$-\frac{-400\,x^6 - 1502\,x^4y^2 - 705\,z^2x^4 - 1404\,y^4x^2 - 2400\,z^2x^2y^2 - 5408\,x^2y^2 - 225\,x^2z^4 + 1080\,x^2z^2 - 1980\,z^2y^4 - 450\,y^2z^4 - 1200\,y^2z^2}{2080\,x^4y + 4160\,x^2y^3 + 2400\,z^2x^2y + 4800\,z^2y^3}, z1 =$$

$$-\frac{1}{1200}\,\frac{1}{\left(13\,x^4 + 26\,x^2y^2 + 15\,x^2z^2 + 30\,y^2z^2\right)z}\left(2800\,x^6 + 3234\,x^4y^2 - 2865\,z^2x^4 - 4732\,y^4x^2 + 37856\,x^2y^2 - 7425\,x^2z^4 - 7560\,x^2z^2\right.$$

$$\left. - 2940\,z^2y^4 - 14850\,y^2z^4 + 8400\,y^2z^2 - 7200\,z^2x^2y^2\right), z2$$

$$= \frac{1}{1200}\,\frac{1}{\left(13\,x^4 + 26\,x^2y^2 + 15\,x^2z^2 + 30\,y^2z^2\right)z}\left(2800\,x^6 + 3234\,x^4y^2 + 12735\,z^2x^4 - 4732\,y^4x^2 + 37856\,x^2y^2 + 10575\,x^2z^4 - 7560\,x^2z^2\right.$$

$$\left.\left. - 2940\,z^2y^4 + 21150\,y^2z^4 + 8400\,y^2z^2 + 24000\,z^2x^2y^2\right)\right\}, \{(-9986400\,z^4x^4y^2 - 2592000\,z^4x^2y^2 - 11681280\,x^4y^2z^2 + 12979200\,x^2y^4z^2$$

$$- 7311616\,x^4y^6 - 12308608\,x^6y^4 + 456976\,x^4y^8 + 176400\,y^8z^4 - 1008000\,y^6z^4 - 24387840\,x^4z^2y^4 + 567840\,x^2z^2y^8 - 6165120\,y^6z^2x^2$$

$$- 14385600\,y^4z^4x^2 + 1538576\,x^6y^6 + 1835844\,x^8y^4 - 4326400\,x^8y^2 + 910400\,x^{10}y^2 + 1174500\,z^6x^4y^2 + 3839400\,z^4x^4y^4 + 2979900\,z^4x^6y^2$$

$$- 12380640\,z^2x^6y^2 + 2981520\,z^2x^4y^6 + 4811640\,z^2x^6y^4 + 2859420\,z^2x^8y^2 + 1263600\,z^4x^2y^6 + 891000\,z^6x^2y^4 + 1080000\,z^6y^4 - 378000\,z^6y^6$$

$$- 864000\,x^8z^2 - 1522800\,x^6z^4 - 486000\,x^4z^6 - 432000\,y^2z^6x^2 + 202500\,y^4z^8 + 202500\,z^8x^2y^2 + 317250\,x^6z^6 + 677025\,x^8z^4 + 564000\,x^{10}z^2$$

$$+ 50625\,z^8x^4 + 160000\,x^{12} + 29246464\,x^4y^4 + 1166400\,z^4x^4 + 1440000\,z^4y^4)\,(-225\,x^2z^4 + 1080\,x^2z^2 - 450\,y^2z^4 - 1200\,y^2z^2 + 420\,z^2y^4 - 105\,z^2x^4$$

$$\left. + 98\,x^4y^2 + 196\,y^4x^2 - 1568\,x^2y^2)\right\}\Big]$$

```
> display(implicitplot3d(((-225 x^2 z^4 + 1080 x^2 z^2 - 450 y^2 z^4 - 1200 y^2 z^2 - 105 x^4 z^2 + 98 x^4 y^2 - 1568 x^2 y^2 + 196 y^4 x^2 + 420 y^4 z^2)), x = -5..5, y = -5..5, z = -3.5..3.5, grid = [40, 40, 40]), spacecurve([x, 0, 0], x = -5..5, color = blue, thickness = 3), spacecurve([0, y, 0], y = -5..5, color = blue, thickness = 3), spacecurve([0, 0, z], z = -5..5, color = blue, thickness = 3));
```

B.10 Singulariteiten snijkromme

Dit is de maplecode die gebruikt is om de singulariteiten te vinden van het koordemiddenoppervlak van de snijkromme van een elliptische cilinder en een ellipsoïde.

```
> solve({diff(-225 x^2 z^4 + 1080 x^2 z^2 - 450 y^2 z^4 - 1200 y^2 z^2 - 105 x^4 z^2 + 98 x^4 y^2 - 1568 x^2 y^2 + 196 y^4 x^2 + 420 y^4 z^2 = 0, x), diff(-225 x^2 z^4 + 1080 x^2 z^2 - 450 y^2 z^4 - 1200 y^2 z^2 - 105 x^4 z^2 + 98 x^4 y^2 - 1568 x^2 y^2 + 196 y^4 x^2 + 420 y^4 z^2 = 0, y), diff(-225 x^2 z^4 + 1080 x^2 z^2 - 450 y^2 z^4 - 1200 y^2 z^2 - 105 x^4 z^2 + 98 x^4 y^2 - 1568 x^2 y^2 + 196 y^4 x^2 + 420 y^4 z^2 = 0, z)}, {x, y, z})
```

$$\{x = 0, y = 0, z = z\},\ \{x = x, y = 0, z = 0\},\ \{x = 0, y = y, z = 0\},\ \{x = 2\,RootOf(-6 + 7\,_Z^2, label = _L2), y = 0, z = 2\,RootOf(5\,_Z^2 - 2, label = _L1)\},\ \left\{x\right.$$

$$= \frac{4}{3}\,RootOf(-23 + 7\,_Z^2, label = _L11), y = \frac{2}{3}\,RootOf(-38 + 7\,_Z^2, label = _L8), z = \frac{8}{3}\,RootOf(-1 + 15\,_Z^2, label = _L6)\Big\},\ \{x = 4\,RootOf(-1$$

$$+ 3\,_Z^2, label = _L14), y = 2\,RootOf(3\,_Z^2 - 2, label = _L12), z = 0\},\ \left\{x = 0, y = 2\,RootOf(21\,_Z^2 - 5, label = _L17), z = \frac{2}{3}\,RootOf(2 + _Z^2, label\right.$$

$$\left. = _L16)\right\}$$

Echter liggen alleen de eerste drie sets met singulariteiten op het oppervlak K. De andere sets zijn dus geen singulariteiten van K, omdat ze niet op K liggen.

B.11 Afbeelding singulariteiten snijkromme

Dit is de maplecode die gebruikt is om figuren in afbeelding 14 te construeren. De verschillende figuren zijn alle vier vanuit een ander hoek bekeken.

```
> display(spacecurve([2*2*lamda/(lamda^2+1), sqrt(2)*(lamda^2-1)/(lamda^2+1), sqrt(2-32/3*lamda^2/(lamda^2+1)^2-4/5*(lamda^2-1)^2/(lamda^2+1)^2)], lamda=-25..25, color=red,
  thickness=3, numpoints=100000), spacecurve([2*2*lamda/(lamda^2+1), sqrt(2)*(lamda^2-1)/(lamda^2+1), -sqrt(2-32/3*lamda^2/(lamda^2+1)^2-4/5*(lamda^2-1)^2/(lamda^2+1)^2)], lamda
  =-25..25, color=red, thickness=3, numpoints=100000), spacecurve([x, 0, 0], x=-2..2, color=blue, thickness=3), spacecurve([0, y, 0], y=-1..1,
  color=blue, thickness=3), spacecurve([0, 0, z], z=-1..1, color=blue, thickness=3))
```