



rijksuniversiteit  
groningen

faculteit wiskunde en  
natuurwetenschappen

# Soliton: een duik in een bijzondere golf

Kim van Oost



# **Bachelorscriptie Technische Wiskunde**

**8 januari 2010**





# Soliton: een duik in een bijzondere golf

## Samenvatting

Solitonen zijn bijzondere golven, die nogal vormvast zijn. In mijn bachelorscriptie heb ik gekeken naar de wiskunde achter solitonen. Solitonen worden beschreven door de Korteweg-de Vries-vergelijking. Door deze vergelijking om te werken tot een Sturm-Liouville-probleem kunnen we exacte oplossingen vinden. In mijn voordracht zal ik de oplossingsmethode toelichten en twee voorbeelden uitwerken.

Bachelorscriptie Technische Wiskunde

Auteur: Kim van Oost

Begeleiders: R.W.C.P. Verstappen

Datum: 8 januari 2010

Instituut voor Wiskunde en Informatica

Postbus 407

9700 AK Groningen



# Inhoudsopgave

<b>1</b>	<b>Inleiding</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>KdV</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Oplossing solitonen</b>	<b>5</b>
3.1	Connectie KdV en Sturm-Liouville . . . . .	5
3.2	‘Inverse scattering’-methode . . . . .	6
3.3	Sturm-Liouville-probleem oplossen . . . . .	7
3.4	Discrete Spectrum . . . . .	8
3.5	Continue Spectrum . . . . .	9
3.6	1 Soliton . . . . .	11
3.7	2 Solitonen . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Voorbeelden van solitonen</b>	<b>17</b>
<b>5</b>	<b>Conclusie</b>	<b>19</b>
<b>6</b>	<b>Bibliografie</b>	<b>21</b>
<b>7</b>	<b>Bijlage</b>	<b>23</b>





# Hoofdstuk 1

## Inleiding

In 1834 was er een man die boten aan het bestuderen was bij het Edinburgh-Glasgow kanaal. Terwijl hij dit deed, gebeurde het volgende: De boot stopte plotseling, maar een groot gedeelte van het water bleef zelfs na stilstand van de boot nog in beweging. De golf die ontstond ging er met grote snelheid vandoor. De man vond dit nogal bijzonder en daarom klom hij op zijn paard en besloot de golf te volgen langs het kanaal. Het viel hem op dat deze golf nauwelijks van vorm en snelheid veranderde.

De man, John Scott Russell, was zo gefascineerd door dit verschijnsel dat hij een groot deel van zijn leven besteedde om de eigenschappen van deze bijzondere golf, de soliton, te bestuderen. Dit is hem zelf helaas nooit gelukt.





## Hoofdstuk 2

# KdV

Als we het hebben over solitonen, kunnen we niet om de KdV-vergelijking heen. In dit hoofdstuk laten we de afleiding van de KdV-vergelijking zien. De KdV-vergelijking is vernoemd naar Diederik Johannes Korteweg en zijn student Gustav de Vries, die de vergelijking samen hebben ontwikkeld in 1895.

We beginnen met de eendimensionale golfvergelijking:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

waar geldt dat  $u(x, t)$  de amplitude van de golf is en  $c$  een positieve constante. De welbekende, algemene oplossing van deze eendimensionale golfvergelijking is:

$$u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

met  $f$  en  $g$  willekeurige functies. Deze oplossing wordt vaak de d'Alembert-oplossing genoemd. De functies  $f$  en  $g$  kunnen worden bepaald met behulp van de gegeven begincondities. De afleiding van d'Alembert is goed te volgen in de bijlage.

Wanneer je golfvergelijkingen probeert af te leiden, worden er meestal een aantal veronderstellingen gedaan om de vergelijkingen te versimpelen. Soms zijn deze veronderstellingen heel extreem, er blijft een hele simpele vergelijking over, en soms zijn deze veronderstellingen minder extreem. Je kunt je waarschijnlijk wel voorstellen dat hoe minder extreem de veronderstellingen zijn, hoe meer natuurkundig detail er in de vergelijking overblijft. Hierbij kan bijvoorbeeld worden gedacht aan de volgende drie verschillende golfvergelijkingen:

- de dispersieve golfvergelijking:  $u_t + u_x + u_{xxx} = 0$
- de dissipatieve golfvergelijking  $u_t + u_x - u_{xx} = 0$
- de niet-lineaire golfvergelijking  $u_t + (1 - u)u_x = 0$

Nu kun je je misschien ook wel voorstellen dat, zolang we maar aannemelijke veronderstellingen doen in een gegeven natuurkundig probleem, we een vergelijking krijgen die zowel

niet-lineair als dispersief is of niet-lineair en dissipatief. Bijvoorbeeld:

$$u_t + (1 + u)u_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.1)$$

of

$$u_t + (1 + u)u_x - u_{xx} = 0 \quad (2.2)$$

Vergelijking (2.1) is een variant van de Korteweg-de Vries-vergelijking en vergelijking (2.2) is de Burgers-vergelijking.

Wij gaan het voornamelijk over de Korteweg-de Vries-vergelijking hebben (2.1). Deze KdV-vergelijking kun je nog een beetje transformeren door zelf wat constantes te kiezen, zodat je bijvoorbeeld uitkomt op:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (2.3)$$

Vergelijking (2.3) is de meest voorkomende vorm van de KdV-vergelijking.

De KdV-vergelijking is voor veel dingen erg belangrijk, onder andere voor de wiskundige beschrijving van solitonen. In het volgende hoofdstuk wordt de beweging van deze solitonen beschreven en kun je zien dat de KdV-vergelijking hier een belangrijk aandeel in heeft.

## Hoofdstuk 3

# Oplossing solitonen

Allereerst moet worden gezegd dat het doel van dit hoofdstuk is, om uiteindelijk de oplossing van zowel een enkele soliton als de oplossing van twee solitonen te vinden. Dit gaat in verschillende stappen, die per paragraaf beschreven zullen worden. Alle tussenstapjes zullen niet in de tekst voorkomen, aangezien dit niet prettig leest, maar voor wie toch graag wat meer details over de tussenstapjes wil weten; in de bijlage staan al deze stapjes uitgewerkt en daarom zal hier ook regelmatig naar verwezen worden.

### 3.1 Connectie KdV en Sturm-Liouville

We gaan kijken of we een connectie tussen de KdV-vergelijking en de Sturm-Liouville-vergelijking kunnen maken. Het blijkt namelijk dat wanneer je de Sturm-Liouville-vergelijking eenmaal hebt, je via de methode ‘inverse scattering’ op de oplossing voor solitonen kan uitkomen. We hebben dus de KdV-vergelijking (2.3) en de Sturm-Liouville-vergelijking:

$$\psi_{xx} + (\lambda - u)\psi = 0 \tag{3.1}$$

Om deze connectie te kunnen laten zien, maken we gebruik van de Miura-transformatie,  $u = v^2 + v_x$ . Als we deze transformatie substitueren in de KdV-vergelijking, kom je uiteindelijk uit op het volgende:  $v_t - 6v^2v_x + v_{xxx}$ , ook wel de mKdV (modified KdV) genoemd. Dus  $v$  is een oplossing van de mKdV-vergelijking.

Neem nu aan dat  $v = \psi_x/\psi$  en vul dit in in de Miura-transformatieformule. Je komt dan uit op:  $\psi_{xx} - u\psi = 0$  wat al heel erg lijkt op de Sturm-Liouville-vergelijking. Het enige verschil tussen de twee vergelijkingen is dat er bij vergelijking (3.1) een term  $(u - \lambda)$  staat, waar wij  $u$  hebben.

Daarom proberen we nu of we op de Sturm-Liouville-vergelijking uitkomen als we in de voorgaande vergelijkingen de term  $u$  steeds vervangen door  $u - \lambda$ . Dit is gedaan en via de stapjes die beschreven staan in de bijlage kun je zien dat we uiteindelijk uitkomen op de Sturm-Liouville-vergelijking!

### 3.2 ‘Inverse scattering’-methode

Om de ‘inverse scattering’-methode uit te leggen, beginnen we met het uitleggen van de ‘scattering’-methode. Dit doen we omdat de ‘scattering’-methode een methode is die bekend is, want het is in principe hetzelfde als het oplossen van een eigenwaardeprobleem.

#### ‘Scattering’-probleem

Bij dit probleem probeer je bij een gegeven  $u$ , een  $\lambda$  en  $\psi$  te berekenen, waarbij je aanneemt dat  $u$  begrensd is.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)| dx < \infty$$

Zoals te zien is, is dit een eigenwaardeprobleem, want je wilt de eigenwaardes en eigenfuncties gaan uitrekenen.

#### ‘Inverse scattering’-probleem

Bij de ‘inverse scattering’-methode doen we het tegenovergestelde. Dus bij een gegeven  $\lambda$  en  $\psi$ , berekenen we onze  $u$ . In dit geval laten we  $x \rightarrow \pm\infty$

Dit is de methode die we hieronder in verschillende stapjes gaan uitwerken. We willen immers een  $u(x, t)$  gaan berekenen.

Om de ‘inverse scattering’-methode uit te leggen beginnen we met de golfvergelijking:

$$\phi_{xx} - \phi_{zz} = 0$$

Deze kun je met behulp van Fouriertransformatie omschrijven naar:

$$\psi_{xx} + k^2\psi = 0 \tag{3.2}$$

waarbij de Fouriertransformatieformules als volgt zijn:

$$\begin{aligned} \phi(x, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, k) e^{-ikz} dk \\ \psi(x, k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, z) e^{ikz} dz \end{aligned}$$

Merk op dat (3.2) erg lijkt op de Sturm-Liouville-vergelijking, die wij graag willen oplossen, neem in dit geval  $\lambda = k^2$ .

$$\psi_{xx} + (k^2 - u)\psi = 0 \tag{3.3}$$

Oftewel als we de oplossing voor vergelijking (3.2) weten, kunnen we deze toepassen op de Sturm-Liouville-vergelijking!

Vergelijking (3.2) klopt zodra geldt dat  $\psi \sim e^{ikx}$  voor  $x \rightarrow +\infty$ . Neem aan dat de oplossing als volgt is:

$$\psi(x, k) = e^{ikx} + \int_x^\infty K(x, z)e^{ikz} dz \quad (3.4)$$

Maar zoals gezegd moeten wij niet (3.2) oplossen, maar de Sturm-Liouville-vergelijking (3.3). Vullen we nu (3.4) in in (3.3) dan krijgen we:

$$-e^{ikx} \left( u + 2 \frac{d\hat{K}}{dx} \right) + \int_x^\infty (K_{xx} - K_{zz} - uK) e^{ikz} dz = 0 \quad (3.5)$$

waarbij  $\hat{K}(x) = K(x, x)$ .

Vergelijking (3.5) geldt alleen als  $u + 2 \frac{d\hat{K}}{dx} = 0$  en  $K_{xx} - K_{zz} - uK = 0$ . Nu zijn we er bijna, want ons doel was immers om  $u$  te berekenen:

$$u = -2 \frac{d\hat{K}}{dx}$$

Om het een beetje overzichtelijk te houden, zijn de belangrijkste punten hieronder nog even kort samengevat.

- We willen  $u$  berekenen van de KdV-vergelijking
- Daarom moeten we  $\psi$  berekenen van de Sturm-Liouville-vergelijking
- Als we  $\psi$  weten, kunnen we  $K$  berekenen
- Als we  $K$  weten, kunnen we  $u$  berekenen

Dit is dus de methode die we nu gaan toepassen. In de volgende paragraaf gaan we proberen om onze  $\psi$  van de Sturm-Liouville-vergelijking te berekenen.

### 3.3 Sturm-Liouville-probleem oplossen

We hadden inmiddels een connectie tussen de KdV-vergelijking (2.3) en de Sturm-Liouville-vergelijking (3.1) weten te maken. Nu zien we dat in de laatste vergelijking nog steeds de term  $u$  voorkomt, die we graag willen oplossen; dit is immers de oplossing van de KdV-vergelijking. Dus deze term  $u$  is nog onbekend en daarom kunnen we vergelijking (3.1) nog niet oplossen. Nu gaan we proberen deze vergelijking te versimpelen naar een vergelijking die we wel kunnen oplossen. Hiervoor gaan we allereerst de volgende vergelijking definiëren:

$$R(x, t) = \psi_t + u_x \psi - 2(u + 2\lambda)\psi_x \quad (3.6)$$

Het blijkt namelijk dat we hier iets mee kunnen waardoor we vergelijking (3.1) kunnen versimpelen. Hiervoor moeten we wel een aantal stapjes doen.

We beginnen met de Sturm-Liouville-vergelijking waarbij  $u(x, t)$  voldoet aan de KdV-vergelijking. Vervolgens differentiëren we deze Sturm-Liouville-vergelijking zowel naar  $x$  als naar  $t$ . Het

blijkt nu handig te zijn dat we proberen  $\frac{\partial}{\partial x}(\psi_x R - \psi R_x)$  uit te werken. Hier lijkt in eerste instantie een gigantische vergelijking uit te komen, maar veel termen vallen weg doordat ze voldoen aan (2.3) of aan (3.1) en dus 0 worden. Verder kunnen we een aantal termen elimineren via de vergelijkingen die we hebben uitgerekend door (3.1) te differentiëren naar  $x$  en  $t$ . In de bijlage zijn deze stapjes helemaal uitgewerkt.

Als we deze enorme vergelijking uitgerekend en versimpeld hebben, houden we de volgende vergelijking over:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\psi_x R - \psi R_x) = \lambda_t \psi^2 \quad (3.7)$$

En vergelijking (3.7) is een vergelijking die we kunnen oplossen.

Dus als we nu even terugkijken, hebben we het volgende gedaan. We zijn begonnen met de KdV-vergelijking, die we willen oplossen. Dit gaan we doen aan de hand van de Sturm-Liouville-vergelijking, waar helaas nog een term  $u$  instaat, die we niet weten. Daarom hebben we deze Sturm-Liouville-vergelijking met behulp van (3.6) om weten te schrijven naar een eenvoudiger vergelijking, die we wel kunnen oplossen (3.7).

Nu willen we graag een oplossing proberen te vinden voor  $\psi$ . Daarvoor gaan we zowel naar het discrete als continue spectrum kijken. Vergelijking (3.7) kan voor zowel  $\lambda < 0$  (discrete spectrum) als voor  $\lambda > 0$  (continue spectrum) apart behandeld worden.

### 3.4 Discrete Spectrum

Eerst kijken we naar het discrete spectrum, waarvoor geldt dat  $\lambda < 0$ , daarom nemen we  $\lambda = -k_n^2$ . Verder stellen we nog  $\psi = \psi_n$  (voor  $n = 1, 2, \dots, N$ ). Dit is om aan te geven dat je meerdere eigenwaardes en eigenfuncties kunt hebben. Als we nu vergelijking (3.7) gaan integreren naar  $x$ , komen we uit op de volgende vergelijking:

$$[\psi_{nx}R_n - \psi_n R_{nx}]_{-\infty}^{\infty} = -(k_n^2)_t \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2 dx \quad (3.8)$$

Er moet nog wel even gezegd worden dat de term  $R_n$  bestaat uit de termen  $\psi_n$  en  $k_n$ , vanwege vergelijking (3.6). Verder zijn de eigenfuncties,  $\psi_n$ , genormaliseerd volgens  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2 dx = 1$ . Omdat de eigenfuncties  $\psi_n$  genormaliseerd zijn, en hun oppervlaktes dus niet oneindig groot kunnen worden, weten we dat  $\psi_n$  naar 0 gaat zodra  $|x| \rightarrow \pm\infty$ . Omdat  $\psi_n$  naar 0 gaat, moet ook  $R_n$  naar 0 gaan, omdat we zojuist gezegd hadden dat  $R_n$  onder andere van  $\psi_n$  afhangt. Verder is het nogal logisch dat zodra  $\psi_n$  en  $R_n$  naar 0 gaan, hun afgeleides naar  $x$  ook naar 0 gaan. Dat betekent dat de linkerkant van vergelijking (3.8) op 0 uitkomt. Daarom moet  $(k_n^2)_t$  nu ook wel 0 zijn, waaruit volgt dat  $k_n^2 = c$ , waarbij  $c$  constant is.

Als we nu even terugkijken naar vergelijking (3.7) kunnen we zien dat deze vergelijking nog eenvoudiger is dan we aanvankelijk dachten. Als we nu vergelijking (3.7) opnieuw integreren naar  $x$  en we nemen  $k_n$  een constante, dan komen we uit op:

$$\psi_{nx}R_n - \psi_n R_{nx} = g_n(t) \quad (3.9)$$

waar  $g_n$  (met  $n = 1, 2, \dots, N$ ) willekeurige functies van  $t$  zijn. De oplossing hing immers eerst van zowel  $x$  als  $t$  af en we hebben net gezien dat de integratie van  $x$ , 0 oplevert, dus vandaar



dat de oplossing nu alleen nog maar afhangt van  $t$ .

We willen nu deze functie  $g_n(t)$  proberen te vinden.

Laten we vergelijking (3.9) nogmaals naar  $x$  integreren, dan krijg je:

$$R_n/\psi_n = h_n(t) \quad (3.10)$$

waar  $h_n$  (met  $n = 1, 2, \dots, N$ ) wederom willekeurige functies van  $t$  zijn.

Als we vergelijking (3.10) vermenigvuldigen met  $\psi_n^2$  en voor  $R_n$  vergelijking (3.6) invullen komen we op een mooie vergelijking uit, die we met behulp van de Sturm-Liouville-vergelijking uiteindelijk kunnen omschrijven naar:

$$\frac{1}{2}(\psi_n^2)_t + (u\psi_n^2 - 2\psi_{nx}^2 + 4k_n^2\psi_n^2)_x = h_n\psi_n^2$$

De precieze stapjes zijn goed te volgen in de bijlage.

Nu gaan we de voorgaande vergelijking ook naar  $x$  integreren, we willen immers de oplossing voor  $\psi_n$  weten, om uiteindelijk uit te komen op:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2 dx \right) = h_n \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2 dx$$

We weten al dat de eigenfuncties  $\psi_n$  genormaliseerd zijn en deze term komt zowel links als rechts van bovenstaande vergelijking voor. De vergelijking wordt dan gereduceerd tot:  $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} 1 = h_n$  en daaruit kun je zien dat  $h_n = 0$ , oftewel

$$R_n = \psi_{nt} + u_x \psi_n - 2(u - 2k_n^2)\psi_{nx} = 0 \quad (3.11)$$

Uiteindelijk willen we toewerken naar een oplossing voor  $\psi_n(x; t)$ . Deze kan nu verkregen worden door middel van de methode ‘Scheiden van variabelen’, van vergelijking (3.11). De oplossing is

$$\psi_n(x; t) \sim c_n(t)e^{-k_n x} \quad \text{als } x \rightarrow +\infty \quad (3.12)$$

Als je deze oplossing weer invult in (3.11) kun je te weten komen wat de constante  $c_n$  is. Je komt uit op  $\frac{dc_n}{dt} - 4k_n^3 c_n = 0$  en deze kun je integreren naar  $t$  tot:

$$c_n(t) = c_n(0)e^{4k_n^3 t} \quad (3.13)$$

waarbij  $c_n(0)$  met  $(n = 1, 2, \dots, N)$  de normalisatieconstanten zijn op  $t = 0$ .

### 3.5 Continue Spectrum

Nu gaan we kijken naar het continue spectrum waarvoor geldt dat  $\lambda > 0$ , dus  $\lambda = k^2$ . Verder geldt  $\psi = \hat{\psi}$ . We beginnen opnieuw met vergelijking (3.7) om deze net als in het discrete geval naar  $x$  te integreren en uit te komen op  $\hat{\psi}_x \hat{R} - \hat{\psi} \hat{R}_x = g(t; k)$ .

Deze vergelijking lijkt natuurlijk heel erg op vergelijking (3.9) uit het discrete geval. Ook nu willen we graag weten wat voor waarde de constante  $g(t; k)$  heeft.

We beginnen met de continue eigenfunctie, waarbij we aannemen dat die gegeven wordt door  $\hat{\psi}(x; t, k) \sim a(k; t)e^{-ikx}$  als  $x \rightarrow -\infty$ . De andere term die je normaal gesproken bij zo'n

continue eigenfunctie verwacht,  $b(k; t)e^{ikx}$ , valt weg zodra je  $x \rightarrow -\infty$ .

Om ook nog een vergelijking voor  $\hat{R}(x, t; k)$  te vinden, moeten we deze continue eigenfunctie gaan invullen in formule (3.6). Als we dit gedaan hebben en we laten  $x \rightarrow -\infty$  en  $u \rightarrow 0$  (en daardoor ook  $u_x \rightarrow 0$ ), dan komen we uit op:

$$\hat{R}(x, t; k) \sim \left( \frac{da}{dt} + 4ik^3 a \right) e^{-ikx}$$

Nu hebben we alles wat we nodig zijn om de constante  $g(t; k)$  te berekenen, dus laten we dat dan ook maar doen.

Als we  $\hat{\psi}_x \hat{R} - \hat{\psi} \hat{R}_x$  uitrekenen, zien we dat beide termen tegen elkaar wegvallen, oftewel  $g(t; k) = 0$ , voor alle  $t$ . Als we nu nog een keer gaan integreren naar  $x$  krijgen we  $\hat{R}/\hat{\psi} = h(t; k)$  oftewel  $\hat{R} = h\hat{\psi}$ . Zie de overeenkomst met het discrete geval (3.10) in de vorige paragraaf.

Omdat we de vergelijkingen voor  $\hat{R}$  en  $\hat{\psi}$  zojuist al hebben uitgerekend, kunnen we deze gaan invullen voor  $\hat{R} = h\hat{\psi}$ . We komen uit op:

$$\frac{da}{dt} + 4ik^3 a = ha \quad (3.14)$$

Tot nu toe gaat deze paragraaf ervan uit dat  $x \rightarrow -\infty$ . Maar wat gebeurt er als we ook nog rekening houden met het geval dat  $x \rightarrow +\infty$ ?

Dan wordt de continue eigenfunctie  $\hat{\psi} \sim e^{-ikx} + b(k; t)e^{ikx}$ . Dit is een combinatie van de oplossing die we al hadden (neem  $a(k; t) = 1$ ) waar je de oplossing die je krijgt wanneer  $x \rightarrow +\infty$  bij opgetelt. Ook deze continue eigenfunctie kun je weer invullen in (3.6) en dat levert:

$$\hat{R}(x, t; k) \sim \frac{db}{dt} e^{ikx} + 4ik^3 (e^{-ikx} - b e^{ikx})$$

Nu gaan we de formules voor  $\hat{R}$  en  $\hat{\psi}$  invullen in  $\hat{R} = h\hat{\psi}$  en als we verder nog rekening houden met het feit dat  $e^{ikx}$  en  $e^{-ikx}$  lineair onafhankelijk van elkaar zijn, komen we uit op het volgende:

$$\frac{db}{dt} - 4ik^3 b = hb \quad (3.15)$$

en  $h(t; k) = 4ik^3$ .

Het enige wat we nog moeten doen, is de vergelijkingen (3.14) en (3.15) oplossen. Doordat geldt dat  $h(t; k) = 4ik^3$ , wordt (3.14) gereduceerd tot  $\frac{da}{dt} = 0$  oftewel  $a(k; t) = a(k; 0)$ . De oplossing voor  $b(k; t) = b(k; 0)e^{8ik^3 t}$

### Samenvattend:

We hebben tot nu toe oplossingen laten zien voor de KdV-vergelijking met behulp van de ‘scattering’-methode. De belangrijkste vergelijkingen die we gevonden hebben, nadat we  $\psi$  wisten, zijn:

$$\left. \begin{aligned} k_n &= \text{constant}; & c_n &= c_n(0)e^{4k_n^3 t} \\ b(k; t) &= b(k; 0)e^{8ik^3 t} \end{aligned} \right\}$$

Voorgaande vergelijkingen hebben we nodig om de functie  $F(X; t)$  uit te kunnen rekenen.

$$F(X; t) = \sum_{n=1}^N c_n^2(0) e^{8k_n^3 t - k_n X} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k; 0) e^{8ik^3 t + ikX} dk \quad (3.16)$$

Deze functie  $F(X; t)$  heb je namelijk nodig om de Marchenko-vergelijking uit te kunnen rekenen, waarbij we uiteindelijk op een oplossing uitkomen.

$$K(x, z; t) + F(x + z; t) + \int_x^{\infty} K(x, y; t) F(y + z; t) dy = 0 \quad (3.17)$$

Zo kun je zien dat we, doordat we  $\psi$  weten, we constantes hebben kunnen uitrekenen, die we vervolgens moeten invullen in  $F(X; t)$ . En als we  $F(X; t)$  eenmaal weten, kunnen we  $K(x, t)$  uitrekenen via de Marchenko-vergelijking.

De oplossing van de KdV-vergelijking wordt nu gegeven door  $u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} \hat{K}(x, t)$  waarbij  $\hat{K}(x, t) = K(x, x, t)$ .

Laten we dan nu eens gaan kijken naar twee voorbeelden van solitonen, waarbij we er beide keren vanuit gaan dat  $u(x, 0)$  een  $\text{sech}^2$ -functie is en  $b(k; 0) = 0$ .

### 3.6 1 Soliton

We beginnen met de oplossing van een enkele soliton. We kiezen  $u(x, 0) = -2\text{sech}^2(x)$  en  $b(k; 0) = 0$  en vullen deze  $u$  in in (3.1), de Sturm-Liouville-vergelijking. Deze wordt dan:  $\psi_{xx} + (\lambda + 2\text{sech}^2(x))\psi = 0$ . Deze vergelijking die afhangt van  $x$  gaan we oplossen door de vergelijking om te schrijven naar een vergelijking van  $T$ , waarbij  $T = \tanh(x)$ . Dan komen we uit op:

$$\frac{d}{dT} \left\{ (1 - T^2) \frac{d\psi}{dT} \right\} + \left( 2 + \frac{\lambda}{1 - T^2} \right) \psi = 0$$

Dit is een bekende Legendre-vergelijking, waarvan we de oplossing weten.

De enige begrensde oplossing voor  $\lambda = -k^2 (< 0)$  is, als geldt dat  $k = k_1 = 1$ .

Nu we de oplossing weten, kunnen we de boel weer terugschrijven naar een functie van  $x$ .

De corresponderende eigenfunctie is

$$\psi_1(x) \propto P_1^1(\tanh(x)) = -\text{sech}(x)$$

waarbij  $P_1$  een Legendre-polynoom van de eerste graad is.

En omdat geldt dat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sech}^2(x) dx = 2$$

wordt de genormaliseerde eigenfunctie:

$$\psi_1(x) = 2^{-1/2} \text{sech}(x)$$

Uiteindelijk geldt dat  $\psi_1(x) = 2^{1/2} e^{-x}$  als  $x \rightarrow +\infty$ . Via de vergelijkingen (3.12) en (3.13) komen we uit op  $c_1(t) = 2^{1/2} e^{4t}$

Achtereenvolgens moeten er nog een aantal dingen gebeuren om tot de oplossing te komen. We moeten een oplossing van  $F(X; t)$  vinden, zodat we die kunnen invullen in de Marchenko-vergelijking (3.17), om vervolgens een oplossing van  $K(x, t)$  te krijgen. Dan zijn we er bijna, want  $u(x, t) = -2\frac{\partial}{\partial x}K(x, t)$  en we hoeven dus nu alleen nog de vergelijking voor  $K(x, t)$  in te vullen en te vereenvoudigen.

Als we deze stappen nu gaan uitvoeren krijgen we:  $F(X; t) = 2e^{8t-X}$

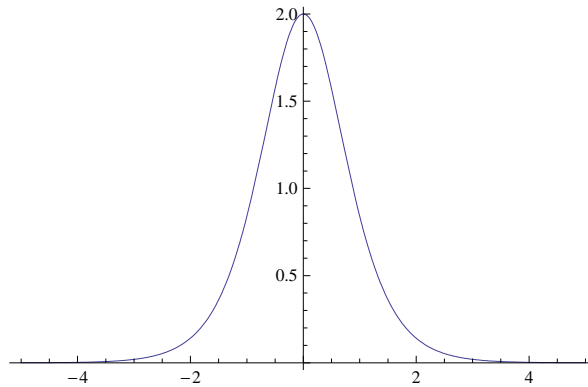
Deze invullen in de Marchenko-vergelijking levert:

$$K(x, z; t) + 2e^{8t-(x+z)} + 2 \int_x^\infty K(x, y; t)e^{8t-(y+z)} dy = 0$$

Nu gaan we gebruik maken van de substitutie  $K(x, z; t) = L(x, t)e^{-z}$  zodat we de term  $e^{-z}$  eruit kunnen delen. Dit willen we graag doen, omdat we willen dat de oplossing geldt voor alle  $z$ .

De oplossing  $u(x, t) = -2\frac{\partial}{\partial x}L(x, t)e^{-x} = -2\text{sech}^2(x - 4t)$ .

Deze oplossing beschrijft een golf met amplitude 2 en voortplantingssnelheid 4, zie figuur 3.1. Alle tussenstapjes die hier gemaakt worden, zijn te vinden in de bijlage.



Figuur 3.1: De oplossing voor 1 soliton

### 3.7 2 Solitonen

Nu gaan we een voorbeeld laten zien van twee solitonen. De oplosmethode is geheel analoog aan die van een enkele soliton.

We beginnen met  $u(x, 0) = -6\text{sech}^2(x)$  en  $b(k; 0) = 0$  waarna we  $u$  weer gaan invullen in de Sturm-Liouville-vergelijking. We krijgen  $\psi_{xx} + (\lambda + 6\text{sech}^2(x))\psi = 0$  op  $t = 0$ . Deze vergelijking afhankelijk van  $x$  gaan we weer omschrijven naar een vergelijking afhankelijk van  $T$ , waarbij  $T = \tanh(x)$ . Dan komen we uit op:

$$\frac{d}{dT} \left\{ (1 - T^2) \frac{d\psi}{dT} \right\} + \left( 6 + \frac{\lambda}{1 - T^2} \right) \psi = 0$$

Deze vergelijking heeft begrensde oplossingen voor  $\lambda = -k^2 (< 0)$  als  $k_1 = 1$  of  $k_2 = 2$ .

We kunnen deze vergelijking weer terugschrijven naar een vergelijking afhankelijk van  $x$ .

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &\propto P_2^1(\tanh(x)) = -3\tanh(x)\operatorname{sech}(x) \\ \psi_2(x) &\propto P_2^2(\tanh(x)) = 3\operatorname{sech}^2(x)\end{aligned}$$

Dit zijn Legendre-polynomen van de tweede graad.

Nu zijn de genormaliseerde eigenfuncties:

$$\psi_1(x) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)} \tanh(x)\operatorname{sech}(x) \quad \text{en} \quad \psi_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{sech}^2(x) \quad (3.18)$$

Uiteindelijk geldt dat  $\psi_1(x) \sim \sqrt{6}e^{-x}$  en  $\psi_2(x) \sim 2\sqrt{3}e^{-2x}$  als  $x \rightarrow +\infty$ . Via vergelijking (3.12) komen we uit op  $c_1(0) = \sqrt{6}$  en  $c_2(0) = 2\sqrt{3}$  en via (3.13) krijgen we:  $c_1(t) = \sqrt{6}e^{4t}$  en  $c_2(t) = 2\sqrt{3}e^{32t}$ . De functie  $F(X;t)$  wordt nu:

$$F(X;t) = 6e^{8t-X} + 12e^{64t-2X}$$

die we gaan invullen in de Marchenko-vergelijking om uiteindelijk uit te komen op:

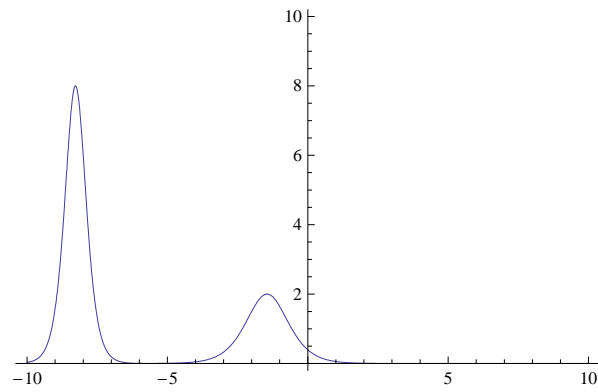
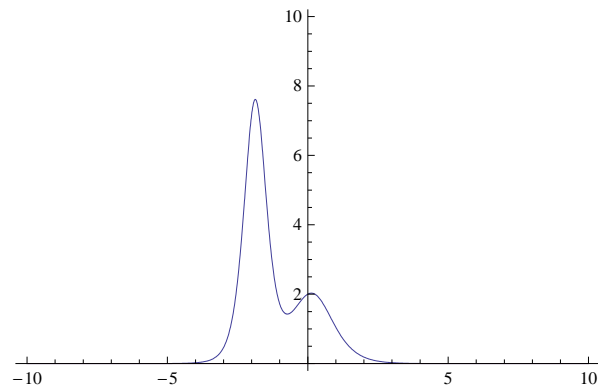
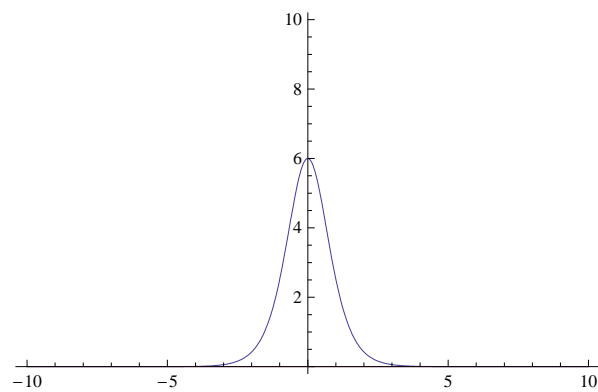
$$\begin{aligned}K(x, z; t) + 6e^{8t-(x+z)} + 12e^{64t-2(x+z)} \\ + \int_x^\infty K(x, y; t) \left(6e^{8t-(y+z)} + 12e^{64t-2(y+z)}\right) dy = 0\end{aligned}$$

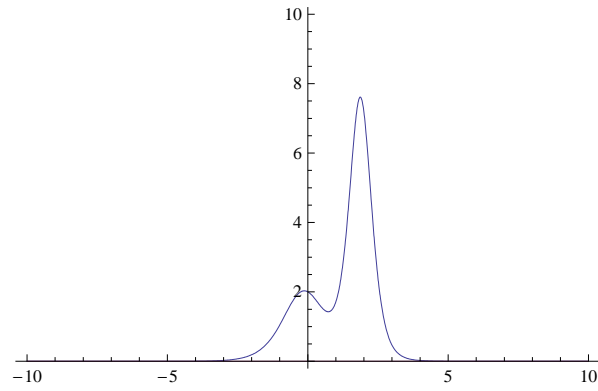
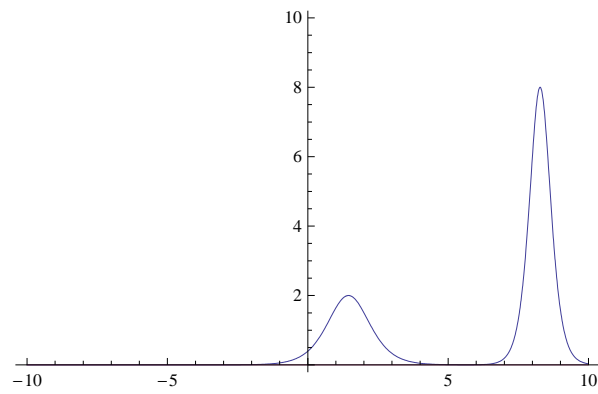
We gaan net als bij de enkele soliton weer een substitutie voor de term  $K(x, z; t)$  gebruiken, namelijk  $K(x, z; t) = L_1(x, t)e^{-z} + L_2(x, t)e^{-2z}$ . Als we dit invullen in de gevonden Marchenko-vergelijking, kunnen we zowel de term  $e^{-z}$  als de term  $e^{-2z}$  elimineren. De uiteindelijke oplossing wordt:

$$u(x, t) = -2\frac{\partial}{\partial x}(L_1(x, t)e^{-x} + L_2(x, t)e^{-2x}) \quad (3.19)$$

$$= -12\frac{3 + 4\cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)}{(3\cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t))^2} \quad (3.20)$$

Ook hier zijn de vele tussenstapjes goed te volgen in de bijlage.

Figuur 3.2: De oplossing voor 2 solitonen op  $t = -0.5$ Figuur 3.3: De oplossing voor 2 solitonen op  $t = -0.1$ Figuur 3.4: De oplossing voor 2 solitonen op  $t = -0$

Figuur 3.5: De oplossing voor 2 solitonen op  $t = 0.1$ Figuur 3.6: De oplossing voor 2 solitonen op  $t = 0.5$





## Hoofdstuk 4

# Voorbeelden van solitonen

### Tsunami

Een tsunami, zoals de zien op de voorpagina, is een voorbeeld van een soliton. Op een gegeven moment komt deze golf echter op land terecht waardoor de golf niet meer verdergaat.

### Wave in voetbalstadion

Op zaterdag 19 juli 2008 troffen de wetenschap en voetbal elkaar in de Kuip, het stadion van Feyenoord. Dit ter ere van het 100-jarig bestaan van de club en het 200-jarig bestaan van het KNAW (Koninklijke Nederlandse Academie van Wetenschappen). Academielid GertJan van Heijst heeft onderzocht of de menselijke wave zich net zo gedraagt als een tsunami, een soliton dus. Er werden daarbij twee verschillende experimenten gedaan:

#### 1) een enkele golf

Hierbij moesten de mensen in één van de vakken na het aftellen van de presentator massaal gaan staan en weer zitten. Resultaat? Er onstond een golf die rechtsom door het stadion liep, met ongeveer constante snelheid.

#### 2) twee golven

Bij dit experiment moest iedereen op zijn/haar tien burens aan de rechterkant en tien burens aan de linkerkant letten, en gaan staan als deze omhoog kwamen. Zoals je kunt begrijpen, gingen er deze keer twee verschillende golven lopen, waarvan eentje linksom en eentje rechtsom ging. Uiteraard kwamen deze twee golven dan ook in botsing met elkaar, waarna ze gewoon ieder hun eigen weg weer gingen.

Door deze twee experimenten te doen, lijkt het erop dat een wave door een voetbalstadion ook daadwerkelijk gemeenschappelijke eigenschappen met een soliton heeft.



## Hoofdstuk 5

# Conclusie

Solitonen zijn dus bijzondere golven. Achter de beweging en de oplossing van deze golven gaat een heleboel wiskunde schuil. Hieronder zijn nog even kort alle stapjes te zien, die nodig zijn om tot een oplossing te komen.

- Begin met de KdV-vergelijking
- Maak een connectie met de Sturm-Liouville-vergelijking
- Gebruik nu de ‘inverse scattering’-methode om het Sturm-Liouville-probleem op te lossen
- Ga naar oplossingen zoeken in zowel het discrete en het continue spectrum
- Vul de constantes die je hebt gevonden in in de vergelijking voor  $F(X; t)$
- Vul deze  $F(X; t)$  weer in in de Marchenko-vergelijking
- De oplossing is nu  $u(x, t) = -2 \frac{\partial}{\partial x} \hat{K}(x, t)$

Solitonen behouden dus dezelfde vorm en snelheid!

Er zijn nog meerdere oplossingsmethoden die de beweging van solitonen beschrijven. In dit verhaal zijn we begonnen met de KdV-vergelijking maar je kunt ook oplossingen vinden met de Sine-Gordon-vergelijking of de niet-lineaire Schrödinger-vergelijking.



## Hoofdstuk 6

# Bibliografie

- P.G. Drazin en R.S. Johnson, *Solitons: an introduction*, Cambridge University Press, Britain (1989)
- <http://kasmana.people.cofc.edu/SOLITONPICS/default.html>
- <http://www.kennislink.nl/publicaties/soliton-in-het-stadion>
- <http://www.kennislink.nl/publicaties/tsunami-de-onstuitbare-golf>
- <http://www.knaw200.nl/Pages/DEF/669.html>
- <http://en.wikipedia.org/wiki/Soliton>
- <http://large.stanford.edu/courses/2008/ph210/rosen1/>
- [http://www.scientific-computing.com/features/feature.php?feature\\_id=42](http://www.scientific-computing.com/features/feature.php?feature_id=42)
- [http://www.societerealiste.net/img/m\\_a/Soliton/0-John\\_Scott\\_Russell.jpg](http://www.societerealiste.net/img/m_a/Soliton/0-John_Scott_Russell.jpg)
- <http://www.naturalsciences.be/common/images/active/sciencenews/tsunami/tsunami.jpg>
- <http://images.google.com/imgres?imgurl=http://www.electricscotland.com>



## Hoofdstuk 7

# Bijlage

Afleiding d'Alembert:

$$\begin{aligned}u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0 \text{ for } -\infty < x < \infty \text{ and } t > 0 \\u(x, 0) &= u_0(x) \\u_t(x, 0) &= u_1(x)\end{aligned}$$

Nu gaan we achtereenvolgens een aantal dingen afleiden waarbij we beginnen met de algemene oplossing:

$$\begin{aligned}u(x, t) &= f(x - ct) + g(x + ct) \\u_t(x, t) &= -cf'(x - ct) + cg'(x + ct) \\u(x, 0) &= f(x) + g(x) = u_0(x) \\u_t(x, 0) &= -cf'(x) + cg'(x) = u_1(x) \\ \int_0^x -f'(x) + g'(x) &= \frac{1}{c} \int_0^x u_1(\xi) d\xi \\ -f'(x) + g'(x) &= \frac{1}{c} \int_0^x u_1(\xi) d\xi\end{aligned}$$

Combineer nu de vergelijkingen voor  $u(x, 0)$  en  $u_t(x, 0)$ :

$$\begin{aligned}2f(x) &= u_0(x) - \frac{1}{c} \int_0^x u_1(\xi) d\xi \\f(x) &= \frac{1}{2} u_0(x) - \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(\xi) d\xi \\f(x - ct) &= \frac{1}{2} u_0(x - ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^0 u_1(\xi) d\xi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2g(x) &= u_0(x) + \frac{1}{c} \int_0^x u_1(\xi) d\xi \\
g(x) &= \frac{1}{2} u_0(x) + \frac{1}{2c} \int_0^x u_1(\xi) d\xi \\
g(x+ct) &= \frac{1}{2} u_0(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_0^{x+ct} u_1(\xi) d\xi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= f(x-ct) + g(x+ct) \\
&= \frac{1}{2} [u_0(x-ct) + u_0(x+ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\xi) d\xi
\end{aligned}$$

### Connectie KdV en Sturm-Liouville

KdV-vergelijking:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \quad (7.1)$$

De Sturm-Liouville-vergelijking:

$$\psi_{xx} + (\lambda - u)\psi = 0 \quad (7.2)$$

Om een connectie tussen (7.1) en (7.2) te laten zien, maken we gebruik van de Miura-transformatie:

$$u = v^2 + v_x \quad (7.3)$$

Substitutie van Miura in de KdV-vergelijking:

$$(v^2 + v_x)_t - 6(v^2 + v_x)(v^2 + v_x)_x + (v^2 + v_x)_{xxx} = 0$$

geeft:

$$2vv_t + v_{xt} - 6(v^2 + v_x)(2vv_x + v_{xx}) + 6v_x v_{xx} + 2vv_{xxx} + v_{xxxx} = 0$$

Dit kun je schrijven als:

$$\left(2v + \frac{\partial}{\partial x}\right)(v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx}) = 0$$

Dus  $v$  is een oplossing van:

$$v_t - 6v^2 v_x + v_{xxx} = 0$$

Dit noem je ook wel mKdV (modified KdV) Neem aan dat:

$$v = \frac{\psi_x}{\psi} \quad (7.4)$$

Deze substitutie invullen in (7.3) geeft:

$$\psi_{xx} - u\psi = 0 \quad (7.5)$$

Het enige verschil tussen (7.2) en (7.5) is dat er in (7.2) een term  $(u - \lambda)$  staat waar in (7.5) een  $u$  staat.



Nu gaan we in alle voorgaande vergelijking  $u$  vervangen door  $(u - \lambda)$ .  
De KdV-vergelijking wordt dan:

$$u_t - 6(u - \lambda)u_x + u_{xxx} = 0 \quad (7.6)$$

Vul (7.3) in in (7.6) en je komt uit op:

$$(2v + \frac{\partial}{\partial x})(v_t - 6(v^2 - \lambda)v_x + v_{xxx}) = 0$$

waarbij  $v$  dus een oplossing is van:

$$v_t - 6(v^2 - \lambda)v_x + v_{xxx} = 0$$

Vul nu (7.4) in in (7.3) en we krijgen:

$$\psi_{xx} - u\psi = 0$$

Nu hadden we  $u$  vervangen door  $(u - \lambda)$ , dit invullen geeft uiteindelijk de Sturm-Liouville:

$$\psi_{xx} + (\lambda - u)\psi = 0 \quad (7.7)$$

### **Sturm-Liouville-probleem**

We beginnen met Sturm-Liouville:

$$\psi_{xx} + (\lambda - u)\psi = 0$$

Differentiëren naar  $x$  geeft:

$$\psi_{xxx} - u_x\psi + (\lambda - u)\psi_x = 0 \quad (7.8)$$

Differentiëren naar  $t$  geeft:

$$\psi_{xxt} + (\lambda_t - u_t)\psi + (\lambda - u)\psi_t = 0 \quad (7.9)$$

waar  $u(x, t)$  voldoet aan de KdV-vergelijking:

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$$

Definieer nu:

$$R(x, t) = \psi_t + u_x\psi - 2(u + 2\lambda)\psi_x \quad (7.10)$$

En reken  $\frac{\partial}{\partial x}(\psi_x R - \psi R_x)$  uit via de volgende stappen:

$$\psi_x R = \psi_x \psi_t + u_x \psi \psi_x - 2u \psi_x^2 - 4\lambda \psi_x^2$$

en

$$\psi R_x = \psi \psi_{xt} + u_{xx} \psi^2 - u_x \psi \psi_x - 2u \psi \psi_{xx} - 4\lambda \psi \psi_{xx}$$

Dus

$$\psi_x R - \psi R_x = \psi_x \psi_t - 2u \psi_x^2 - 4\lambda \psi_x^2 - \psi \psi_{xt} - u_{xx} \psi^2 + 2u \psi \psi_{xx} + 4\lambda \psi \psi_{xx} + 2u_x \psi \psi_x$$

Nu geldt dat:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\psi_x R - \psi R_x) = \psi_{xx}(\psi_t - 4\lambda\psi_x - 2u\psi_x + 4u_x\psi) + \psi(4\lambda\psi_{xxx} - \psi_{xxt} - u_{xxx}\psi + 2u\psi_{xxx})$$

We gaan de termen  $\psi_{xxx}$  en  $\psi_{xxt}$  elimineren d.m.v. de vergelijkingen (7.8) en (7.9). Dan krijgen we:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\psi_x R - \psi R_x) &= \psi_{xx}(\psi_t - 4\lambda\psi_x - 2u\psi_x + 4u_x\psi) - u_{xxx}\psi^2 + \\ &\psi(4\lambda + 2u)(u_x\psi + (u - \lambda)\psi_x) + \psi((\lambda_t - u_t)\psi + (\lambda - u)\psi_t) \end{aligned} \quad (7.11)$$

Kijk nu even weer naar de Sturm-Liouville-vergelijking (7.2) en je kunt zien dat de volgende termen wegvallen:

- $(\psi_{xx} + (\lambda - u)\psi)\psi_t = 0$
- $((-2u - 4\lambda)\psi_{xx} + (2u + 4\lambda)(u - \lambda)\psi)\psi_x = 0$
- $(4u_x\psi_{xx} + (4u - 4\lambda)u_x\psi)\psi = 0$

Vergelijking (7.11) is nu gereduceerd tot:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\psi_x R - \psi R_x) = \psi^2(\lambda_t - u_t + 6uu_x - u_{xxx})$$

En omdat  $u$  aan de KdV-vergelijking (7.1) voldoet, houden we uiteindelijk over:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\psi_x R - \psi R_x) = \lambda_t \psi^2 \quad (7.12)$$

### Discrete spectrum:

Voor het discrete spectrum stellen we  $\lambda = -k_n^2$  en  $\psi = \psi_n$  (voor  $n = 1, 2, \dots, N$ ). Vergelijking (7.12) integreren naar  $x$  levert:

$$[\psi_{nx}R_n - \psi_n R_{nx}]_{-\infty}^{\infty} = -(k_n^2)_t \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2 dx \quad (7.13)$$

$\psi_n$  is genormaliseerd volgens:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2 dx = 1$$

Hieruit kunnen we afleiden dat  $\psi_n$  (en daardoor ook  $R_n$ ) naar 0 gaan, zodra  $|x| \rightarrow \infty$  anders wordt de oppervlakte van de integraal nooit 1, maar zal die oneindig groot worden.

Omdat  $\psi_n$  en  $R_n$  allebei 0 worden, en daarom hun afgeleides naar  $x$  ook, zien we dat de linkerkant van vergelijking (7.13) op 0 uitkomt. Daarom geldt nu dat ook  $(k_n)_t \rightarrow 0$  en  $k_n = c$ , waarbij  $c$  een constante is.

Vergelijking (7.12) opnieuw integreren naar  $x$ , en we nemen  $k_n$  een constante, dan krijgen we:

$$\psi_{nx}R_n - \psi_n R_{nx} = g_n(t) \quad (7.14)$$

met  $g_n(n = 1, 2, \dots, N)$  functies van  $t$  en omdat  $\psi_n$  en  $R_n \rightarrow 0$  als  $|x| \rightarrow \infty, \forall n$ , geldt  $g_n = 0, \forall t$ . Als je vergelijking (7.14) integreert, krijg je:

$$\frac{R_n}{\psi_n} = h_n(t) \quad (7.15)$$

met  $h_n(n = 1, 2, \dots, N)$ , functies van  $t$ .

Vergelijking (7.15) vermenigvuldigen we met  $\psi_n^2$  en we kijken even terug naar vergelijking (7.10) dan zien we dat dat  $R_n(x, t) = \psi_{nt} + u_x \psi_n - 2(u + 2\lambda)\psi_{nx}$ . Verder hebben we gesteld dat  $\lambda = -k_n^2$ . Als we nu de volgende vergelijking willen uitschrijven  $R_n \psi_n = h_n \psi_n^2$ , dan levert ons dat:

$$\psi_n(\psi_{nt} + u_x \psi_n - 2u\psi_{nx} + 4k_n^2 \psi_{nx}) = h_n \psi_n^2$$

en met behulp van vergelijking (7.2) is dit hetzelfde als:

$$\frac{1}{2}(\psi_n^2)_t + (u\psi_n^2 - 2\psi_{nx}^2 + 4k_n^2 \psi_n^2)_x = h_n \psi_n^2 \quad (7.16)$$

Zie nu de uitleg van deze stap.

We willen graag aantonen dat:

$$R_n/\psi_n = h_n(t)$$

hetzelfde is als:

$$h_n \psi_n^2 = \frac{1}{2}(\psi_n^2)_t + (u\psi_n^2 - 2\psi_{nx}^2 + 4k_n^2 \psi_n^2)_x$$

Begin met:

$$\begin{aligned} h_n(t) &= R_n/\psi_n \\ h_n \psi_n^2 &= R_n \psi_n \\ h_n \psi_n^2 &= \psi_n(\psi_{nt} + u_x \psi_n - 2u\psi_{nx} - 4\lambda\psi_{nx}) \\ h_n \psi_n^2 &= \psi_n \psi_{nt} + u_x \psi_n^2 - 2u\psi_n \psi_{nx} + 4k_n^2 \psi_n \psi_{nx} \end{aligned} \quad (7.17)$$

Neem nu:

$$\begin{aligned} h_n \psi_n^2 &= \frac{1}{2}(\psi_n^2)_t + (u\psi_n^2 - 2\psi_{nx}^2 + 4k_n^2 \psi_n^2)_x \\ h_n \psi_n^2 &= \psi_n \psi_{nt} + u_x \psi_n^2 + 2u\psi_n \psi_{nx} - 4\psi_{nx} \psi_{nxx} + \\ &\quad 8k_n^2 \psi_n \psi_{nx} \end{aligned} \quad (7.18)$$

En (7.17) was:

$$h_n \psi_n^2 = \psi_n \psi_{nt} + u_x \psi_n^2 - 2u\psi_n \psi_{nx} + 4k_n^2 \psi_n \psi_{nx}$$

Nu verschillen (7.17) en (7.18) nogal.

Tel bij (7.17) de volgende termen op:

$$\begin{aligned} 0 &= 4u\psi_n \psi_{nx} + 4k_n^2 \psi_n \psi_{nx} - 4\psi_{nx} \psi_{nxx} \\ 0 &= 4\psi_{nx} \psi_{nxx} + (\lambda - u)4\psi_{nx} \psi_n \end{aligned}$$

Dus ze zijn hetzelfde!

Nu gaan we vergelijking (7.16) ook naar  $x$  integreren. Dat betekent dat de term  $(u\psi_n^2 - 2\psi_{nx}^2 + 4k_n^2\psi_n^2)_x$  gewoon de term  $u\psi_n^2 - 2\psi_{nx}^2 + 4k_n^2\psi_n^2$  wordt. En deze term valt uiteindelijk weg, omdat we eerder al geconstateerd hadden dat de term  $\psi_n \rightarrow 0$  voor  $|x| \rightarrow \infty$  en daarom ook de term  $\psi_{nx} \rightarrow 0$ .

Dus dan houden we over:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2 dx \right) = h_n \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2 dx$$

Omdat zowel rechts als links de term  $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2$  voorkomt, en wij weten dat die term 1 is (genormaliseerd), komen we uit op  $\frac{1}{2} \frac{d}{dt} 1 = h_n$  oftewel,  $h_n = 0$ .

Nu dus:

$$R_n = \psi_{nt} + u_x \psi_n - 2(u - 2k_n^2) \psi_{nx} = 0 \quad (7.19)$$

Met behulp van de methode ‘Scheiden van variabelen’ komen we uit op:

$$\psi_n(x; t) \sim c_n(t) e^{-k_n x} \quad \text{als } x \rightarrow +\infty \quad (7.20)$$

En we nemen aan dat  $u \rightarrow 0$  als  $x \rightarrow \infty$ .

Deze oplossing voor  $\psi_n(x, t)$  invullen in (7.19) levert ons:

$$\frac{dc_n}{dt} - 4k_n^3 c_n = 0$$

oftewel als je bovenstaande vergelijking integreert naar  $t$  krijg je:

$$c_n(t) = c_n(0) e^{4k_n^3 t} \quad (7.21)$$

waar  $c_n(0)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  de normalisatieconstanten zijn op  $t = 0$ .

### Continue spectrum:

Voor het continue spectrum stellen we  $\lambda = k^2$  en  $\psi = \hat{\psi}$ . Als we nu weer vergelijking (7.12) integreren naar  $x$  krijgen we:

$$\hat{\psi}_x \hat{R} - \hat{\psi} \hat{R}_x = g(t; k) \quad (7.22)$$

Deze lijkt erg op vergelijking (7.14) uit het discrete spectrum. Als continue eigenfunctie nemen we:  $\hat{\psi}(x; t, k) \sim a(k; t) e^{-ikx}$  als  $x \rightarrow -\infty$ . De term  $b(k; t)$  valt weg zodra we  $x \rightarrow -\infty$ . Als we nu deze eigenfunctie gaan invullen in vergelijking (7.10), dan komen we uit op het volgende:

$$\hat{R}(x, t; k) \sim \left( \frac{da}{dt} + 4ik^3 a \right) e^{-ikx}$$

als  $x \rightarrow -\infty$  en  $u$  en daardoor ook  $u_x$  naar 0 gaan! Als we nu ook weer  $\hat{\psi}_x \hat{R} - \hat{\psi} \hat{R}_x$  uitrekenen, krijgen we:

$$-ika e^{-2ikx} \left( \frac{da}{dt} + 4ik^3 a \right) + ika e^{-2ikx} \left( \frac{da}{dt} + 4ik^3 a \right) = 0$$

Daarom geldt:  $g(t; k) = 0$ , voor alle  $t$ . Zie vergelijking (7.22).

Vergelijking (7.22) integreren naar  $x$  levert:  $\hat{R}/\hat{\psi} = h(t; k)$  oftewel  $\hat{R} = h\hat{\psi}$ . Nu kunnen we de vergelijking voor  $\hat{R}$  en  $\hat{\psi}$  hier invullen en dan komen we uit op:

$$\frac{da}{dt} + 4ik^3 a = ha \quad (7.23)$$

Dit alles geldt voor  $x \rightarrow -\infty$

Wat gebeurt er als  $x \rightarrow +\infty$ ?

Dan nemen we als eigenfunctie  $\hat{\psi}(x; t, k) \sim e^{-ikx} + b(k; t)e^{ikx}$  die we ook gaan invullen in vergelijking (7.10). Dit levert:

$$\hat{R}(x, t; k) \sim \frac{db}{dt}e^{ikx} + 4ik^3(e^{-ikx} - be^{ikx})$$

Via de vergelijking  $\hat{R} = h\hat{\psi}$  komen we dan uit op:

$$\frac{db}{dt}e^{ikx} + 4ik^3(e^{-ikx} - be^{ikx}) = h(e^{-ikx} + be^{ikx})$$

Omdat  $e^{ikx}$  en  $e^{-ikx}$  lineair onafhankelijk zijn van elkaar, krijgen we twee condities:

$$\frac{db}{dt} - 4ik^3b = hb \quad (7.24)$$

en  $h(t; k) = 4ik^3$ .

Nu geldt dan ook dat vergelijking (7.23) wordt versimpeld tot  $\frac{da}{dt} = 0$ . Deze vergelijking integreren levert:  $a(k; t) = a(k; 0)$ .

Vergelijking (7.24) integreren naar  $t$  levert:  $b(k; t) = b(k; 0)e^{8ik^3t}$

De belangrijkste vergelijkingen die we tot nu toe hebben gevonden zijn:

$$\left. \begin{aligned} k_n &= \text{constant}; & c_n &= c_n(0)e^{4k_n^3t} \\ b(k; t) &= b(k; 0)e^{8ik^3t} \end{aligned} \right\}$$

De functie  $F(X; t)$ , die nodig is voor de Marchenko-vergelijking, wordt gegeven door:

$$F(X; t) = \sum_{n=1}^N c_n^2(0)e^{8k_n^3t - k_n X} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} b(k; 0)e^{8ik^3t + ikX} dk \quad (7.25)$$

De Marchenko-vergelijking is:

$$K(x, z; t) + F(x + z; t) + \int_x^{\infty} K(x, y; t)F(y + z; t)dy = 0 \quad (7.26)$$

De oplossing voor de KdV-vergelijking wordt dan gegeven door:

$$u(x, t) = -2\frac{\partial}{\partial x}\hat{K}(x, t) \text{ en } \hat{K}(x, t) = K(x, x, t).$$

## 1 soliton

We beginnen met  $u(x, 0) = -2\text{sech}^2(x)$  en we nemen  $b(k; 0) = 0$ .

De Sturm-Liouville-vergelijking op  $t = 0$  wordt dan:

$$\psi_{xx} + (\lambda + 2\text{sech}^2(x))\psi = 0$$

Dit gaan we omschrijven naar:

$$\frac{d}{dT} \left\{ (1 - T^2) \frac{d\psi}{dT} \right\} + \left( 2 + \frac{\lambda}{1 - T^2} \right) \psi = 0$$

waarbij  $T = \tanh(x)$ .

Dit is namelijk een bekende Legendre-vergelijking, waarvan we de oplossing kunnen vinden. De enige begrensde oplossing voor  $\lambda = -k^2 (< 0)$  is, als geldt als  $k = k_1 = 1$ .

Nu kunnen we deze weer terugtransformeren naar een functie van  $x$ . De corresponderende eigenfunctie is:

$$\psi_1(x) \propto P_1^1(\tanh(x)) = -\operatorname{sech}(x)$$

en omdat geldt dat:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sech}^2(x) dx = 2$$

wordt de genormaliseerde eigenfunctie:

$$\psi_1(x) = 2^{-1/2} \operatorname{sech}(x)$$

Via de achtereenvolgende stappen:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= 2^{-1/2} \operatorname{sech}(x) \\ &= 2^{-1/2} \frac{2}{e^x + e^{-x}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2}} \frac{1}{e^x + e^{-x}} \\ &= \sqrt{2} \frac{1}{e^x + e^{-x}} \\ &= \sqrt{2} \frac{1}{e^x} \quad \text{als } x \rightarrow \infty \\ &= \sqrt{2} e^{-x} \end{aligned}$$

geldt dan uiteindelijk:  $\psi_1(x) \sim 2^{1/2} e^{-x}$  als  $x \rightarrow +\infty$ .

Via (7.20) wordt  $c_1(0) = 2^{1/2}$  en wordt de vergelijking (7.21):

$$c_1(t) = 2^{1/2} e^{4t}$$

Als we dit gaan invullen in vergelijking (7.25) krijgen we:

$$F(X; t) = 2e^{8t-X}$$

De Marchenko-vergelijking (7.26) wordt dan:

$$K(x, z; t) + 2e^{8t-(x+z)} + 2 \int_x^{\infty} K(x, y; t) e^{8t-(y+z)} dy = 0 \quad (7.27)$$

Maak nu de substitutie:  $K(x, z; t) = L(x, t) e^{-z}$ .

Vul deze substitutie in in vergelijking (7.27) en we komen uit op:

$$L(x, t) e^{-z} + 2e^{8t-(x+z)} + 2 \int_x^{\infty} L(x, t) e^{-y} e^{8t-(y+z)} dy = 0 \quad (7.28)$$

Deel nu vergelijking (7.28) door de term  $e^{-z}$  en je krijgt:

$$L + 2e^{8t-x} + 2Le^{8t} \int_x^{\infty} e^{-2y} dy = 0$$

Zoals je kunt zien is de term  $e^{-z}$  eruitgedeeld. We willen namelijk dat de oplossing geldt voor alle  $z$ . Doe achtereenvolgens de volgende stappen:

$$\begin{aligned} \int_x^\infty e^{-2y} dy &= 0 \\ \Rightarrow \left[-\frac{1}{2}e^{-2y}\right]_x^\infty &= \frac{1}{2}e^{-2x} \\ \Rightarrow L + 2e^{8t-x} + Le^{8t-2x} &= 0 \\ \Rightarrow L(1 + e^{8t-x}) &= -2e^{8t-x} \\ \Rightarrow L &= \frac{-2e^{8t-x}}{1+e^{8t-x}} \end{aligned}$$

en de oplossing voor de KdV-vergelijking wordt dan:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, t) \\ &= -2 \frac{\partial}{\partial x} L(x, t) e^{-x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{4e^{8t-2x}}{1 + e^{8t-2x}} \right) \\ &= \frac{8e^{8t-2x}}{(1 + e^{8t-2x})^2} \\ &= -2 \operatorname{sech}^2(x - 4t) \end{aligned} \tag{7.29}$$

Vergelijking (7.29) beschrijft een golf met amplitude 2 en voortplantingssnelheid 4.

## 2 solitonen

We beginnen met  $u(x, 0) = -6 \operatorname{sech}^2(x)$  en  $b(k; 0) = 0$ .

De Sturm-Liouville-vergelijking wordt in dit geval  $\psi_{xx} + (\lambda + 6 \operatorname{sech}^2(x))\psi = 0$  op  $t = 0$ .

Oftewel:

$$\frac{d}{dT} \left\{ (1 - T^2) \frac{d\psi}{dT} \right\} + \left( 6 + \frac{\lambda}{1 - T^2} \right) \psi = 0$$

waarbij  $T = \tanh(x)$ .

Bovenstaande vergelijking heeft begrensde oplossingen voor  $\lambda = -k^2 (< 0)$  als  $k_1 = 1$  of  $k_2 = 2$ .

Via de volgende Legendre-polynomen komen we uit op:

$$\begin{aligned} \psi_1(x) \propto P_2^1(\tanh(x)) &= -3 \tanh(x) \operatorname{sech}(x) \\ \psi_2(x) \propto P_2^2(\tanh(x)) &= 3 \operatorname{sech}^2(x) \end{aligned}$$

Nu zijn de genormaliseerde eigenfuncties:

$$\psi_1(x) = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)} \tanh(x) \operatorname{sech}(x) \quad \text{en} \quad \psi_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{sech}^2(x) \tag{7.30}$$

Uiteindelijk geldt dan  $\psi_1(x) \sim \sqrt{6}e^{-x}$  en  $\psi_2(x) \sim 2\sqrt{3}e^{-2x}$  als  $x \rightarrow +\infty$ .

Via (7.20) wordt  $c_1(0) = \sqrt{6}$  en  $c_2(0) = 2\sqrt{3}$  en via vergelijking (7.21) kom je uit op:

$$c_1(t) = \sqrt{6}e^{4t} \quad \text{en} \quad c_2(t) = 2\sqrt{3}e^{32t}.$$

De functie  $F(X; t)$  wordt dan:

$$F(X; t) = 6e^{8t-X} + 12e^{64t-2X}$$

De Marchenko-vergelijking is dan als volgt:

$$\begin{aligned} K(x, z; t) + 6e^{8t-(x+z)} + 12e^{64t-2(x+z)} \\ + \int_x^\infty K(x, y; t) \left( 6e^{8t-(y+z)} + 12e^{64t-2(y+z)} \right) dy = 0 \end{aligned} \quad (7.31)$$

Neem nu  $K(x, z; t) = L_1(x, t)e^{-z} + L_2(x, t)e^{-2z}$  en substitueer dit in de bovenstaande vergelijking:

$$\begin{aligned} L_1(x, t)e^{-z} + L_2(x, t)e^{-2z} + 6e^{8t-(x+z)} + 12e^{64t-2(x+z)} \\ + \int_x^\infty (L_1(x, t)e^{-y} + L_2(x, t)e^{-2y}) \left( 6e^{8t-(y+z)} + 12e^{64t-2(y+z)} \right) dy = 0 \end{aligned} \quad (7.32)$$

Als we nu de coëfficiënten van  $e^{-z}$  en  $e^{-2z}$  verzamelen, kunnen we vergelijking (7.32) gaan opsplitsen in de volgende twee vergelijkingen.

$$\begin{cases} L_1 + 6e^{8t-x} + 6e^{8t} \left( L_1 \int_x^\infty e^{-2y} dy + L_2 \int_x^\infty e^{-3y} dy \right) = 0 \\ L_2 + 12e^{64t-2x} + 12e^{64t} \left( L_1 \int_x^\infty e^{-3y} dy + L_2 \int_x^\infty e^{-4y} dy \right) = 0 \end{cases}$$

Als we deze integralen uitrekenen komen we uiteindelijk uit op:

$$\begin{cases} L_1 + 6e^{8t-x} + 3L_1e^{8t-2x} + 2L_2e^{8t-3x} = 0 \\ L_2 + 12e^{64t-2x} + 4L_1e^{64t-3x} + 3L_2e^{64t-4x} = 0 \end{cases}$$

Nu kun je de termen  $L_1$  en  $L_2$  gaan uitrekenen, dit kost veel omschrijfwerk waarna je uiteindelijk uitkomt op:

$$\begin{cases} L_1(x, t) = 6(e^{72t-5x} - e^{8t-x})/D \\ L_2(x, t) = -12(e^{64t-2x} + e^{72t-4x})/D \end{cases}$$

waarbij  $D(x, t) = 1 + 3e^{8t-2x} + 3e^{64t-4x} + e^{72t-6x}$ .

De oplossing:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -2 \frac{\partial}{\partial x} K(x, t) \\ &= -2 \frac{\partial}{\partial x} (L_1(x, t)e^{-x} + L_2(x, t)e^{-2x}) \\ &= -2 \frac{\partial}{\partial x} \{ (6e^{72t-6x} - 6e^{8t-2x} - 12e^{64t-4x} - 12e^{72t-6x})/D \} \\ &= 12 \frac{\partial}{\partial x} \{ (e^{72t-6x} + e^{8t-2x} - 2e^{64t-4x})/D \} \\ &= -12 \frac{3 + 4\cosh(2x - 8t) + \cosh(4x - 64t)}{(3\cosh(x - 28t) + \cosh(3x - 36t))^2} \end{aligned}$$