rijksuniversiteit groningen
faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen

Over het vermoeden van Erdős-Straus

Bacheloronderzoek Wiskunde

Juli 2014

Student: H.K. Kruizinga

Eerste Begeleider: Prof. Dr. J. Top

Tweede Begeleider: Prof. Dr. H.W. Broer

Samenvatting

We bekijken het vermoeden van Erdős-Straus (dat de breuk $\frac{4}{n}$ voor elke gehele $n > 1$ te schrijven is als som van drie stambreuken: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$) vanuit de invalshoek van de algebraïsche meetkunde. Dit vermoeden kunnen we dan bekijken als het vinden van gehele punten op het oppervlak $4xyz = n(yz+xz+xy)$. We gebruiken de lijnen die op dit oppervlak liggen om het oppervlak te parameteriseren. Verder kijken we naar de manier waarop dit vermoeden wordt gecontroleerd en hoe de grens waarvoor we weten dat het vermoeden klopt ($1 < n \leq 10^{17}$) opgehoogd zou kunnen worden.

1 Introductie

Erdős en Straus formuleerden rond 1948 het volgende vermoeden: [3]

Vermoeden 1.1. *Voor alle gehele $n > 1$, bestaan er $x, y, z \in \mathbb{Z}_{>0}$ zodanig dat:*

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}. \tag{1}$$

Het heet een vermoeden en geen theorema omdat het nog onbewezen is. De mensen die zich ermee bezig gehouden hebben, hebben wel oplossingen gevonden voor bepaalde soorten n, maar nooit voor allemaal.

Als we een oplossing weten voor n, zoals $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, dan hebben we automatisch een oplossing voor kn voor alle $k \in \mathbb{Z}_{>0}$. Deze oplossing wordt namelijk gegeven door: $\frac{4}{kn} = \frac{1}{ka} + \frac{1}{kb} + \frac{1}{kc}$. Hieruit volgt dat het vermoeden bewezen is voor alle n dan en slechts dan als het bewezen is voor alle p priem. Verder is dit vermoeden bewezen voor bepaalde restklassen modulo m, zoals $n \equiv 2 \bmod 3$ en $n \equiv 3 \bmod 4$. Door dit soort restklassen te combineren, blijven (bijvoorbeeld) alleen de volgende n over:

$$n \in \{1, 121, 169, 289, 361, 529\} \bmod 840. \tag{2}$$

Met bovenstaande informatie is het vermoeden al bewezen voor $n < 1009$, omdat 121, 169, 289, 361, 529, 841 en 961 kwadraten zijn van priemgetallen die niet bevat zijn in vergelijking (2). [7]

Voor een grotere grens zijn computers handige hulpmiddelen. Dit vermoeden is dan ook vaak gecontroleerd met behulp van de computer tot een steeds weer hogere grens. Het is bijvoorbeeld gecontroleerd tot $2 \cdot 10^{14}$ door Bello-Hernández, Benito en Fernández. [1] En een sterker vermoeden, waarbij er eisen zitten aan de vorm van de oplossing, is gecontroleerd tot 10^{17} door Mizony en Gardes. [5]

2 Algebraïsche meetkunde

Vergelijking (1) kunnen we ook zien als een zogenaamd kubisch oppervlak. Om dat kubische oppervlak te krijgen, vermenigvuldigen we beide zijden van de vergelijking met $pxyz$ (waar we in dit geval nemen dat $n = p$). Dit resulteert in een (kubisch) oppervlak in $\mathbb{A}^3$ (de affiene ruimte):

$$4xyz = p(yz + xz + xy). \tag{3}$$

Uit bovenstaande vergelijking blijkt dat minstens één van x, y, z deelbaar moet zijn door p. Ook geldt dat x, y, z niet allemaal deelbaar kunnen zijn door p, want anders zou gelden:

$$4 = \frac{1}{x/p} + \frac{1}{y/p} + \frac{1}{z/p} \leq 3.$$

Er zijn dus twee soorten oplossingen: degene met $p \mid x$ en $p \nmid y, z$ en degene met $p \nmid x$ en $p \mid y, z$ (en hun permutaties). Christian Elsholtz en Terence Tao noemen in hun artikel de eerste soort type I oplossingen en de tweede soort type II oplossingen. [2] Deze notatie zal in de rest van het artikel ook gebruikt worden.

Mizony en Gardes hebben gecontroleerd dat er voor $1 < n \leq 10^{17}$ altijd een type II oplossing is. En ze hebben daarmee een sterker vermoeden dan dat van Erdős-Straus gecontroleerd. [5]

Propositie 2.1. *Er is een $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ zodanig dat voor alle priemgetallen $p \neq 2$ geldt dat:*

$$yz + xz + xy = 16k \quad \textit{en} \quad xyz = 4kp.$$

Bewijs. Uit vergelijking (3) zien we dat $yz + xz + xy \equiv 0 \bmod 4$ voor $p \neq 2$. Dit geeft de volgende gevallen (en hun permutaties, die we buiten beschouwing laten):

- $yz \equiv 0 \bmod 4, \quad xz \equiv 0 \bmod 4 \quad$ en $\quad xy \equiv 0 \bmod 4,$
- $yz \equiv 0 \bmod 4, \quad xz \equiv 1 \bmod 4 \quad$ en $\quad xy \equiv 3 \bmod 4,$
- $yz \equiv 0 \bmod 4, \quad xz \equiv 2 \bmod 4 \quad$ en $\quad xy \equiv 2 \bmod 4,$
- $yz \equiv 1 \bmod 4, \quad xz \equiv 1 \bmod 4 \quad$ en $\quad xy \equiv 2 \bmod 4,$
- $yz \equiv 2 \bmod 4, \quad xz \equiv 3 \bmod 4 \quad$ en $\quad xy \equiv 3 \bmod 4.$

Omdat voor de eerste drie gevallen geldt dat $yz \equiv 0 \bmod 4$, geldt ook dat $xyz \equiv 0 \bmod 4$.

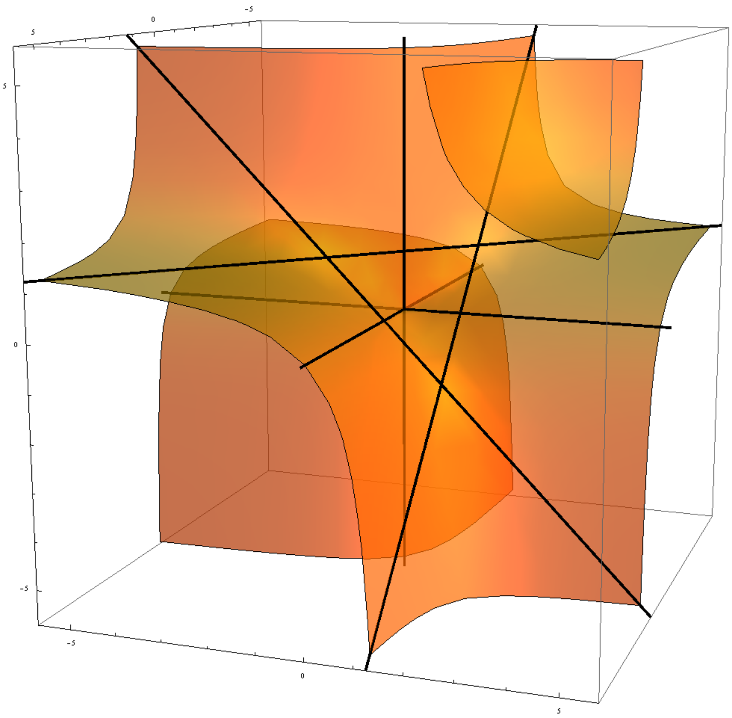
Bij de vierde en vijfde gevallen vermenigvuldigen we de drie vergelijkingen zodat in beide gevallen geldt dat:

$$(xyz)^2 \equiv 2 \bmod 4.$$

Maar dit leidt tot een tegenspraak, want een kwadraat kan nooit gelijk zijn aan $2 \bmod 4$. Dus dit betekent dat alleen de eerste drie gevallen mogelijk zijn. Daarom geldt dat $4 \mid xyz$ voor $p \neq 2$ en hieruit volgt dat $16 \mid yz + xz + xy$. Dus er bestaat een $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ zodanig dat $yz + xz + xy = 16k$ en door dit in te vullen in vergelijking (3) zien we dat ook moet gelden dat $xyz = 4kp$. $\square$

Vanuit het bewijs merken we op dat $yz \equiv 0 \bmod 4$. Dit betekent dat of y en/of $z \equiv 0 \bmod 4$ of $y \equiv z \equiv 2 \bmod 4$, zien we dat het tweede geval nooit kan gelden. En hieruit volgt dat oplossingen van één van de volgende vormen moet zijn:

- Twee van x, y en z zijn equivalent aan $0 \bmod 4$ (de overgeblevene kan dat ook zijn, maar hoeft niet).



Figuur 1: Het oppervlak in $\mathbb{A}^3$ met $p = 5$ en zes lijnen.

- Twee van x, y en z zijn equivalent aan $2 \bmod 4$ (de overgeblevene is in ieder geval niet equivalent aan $0 \bmod 4$).

Dat laatste is het geval omdat de hoogste macht van elke priemfactor die voorkomt in x, y of z, ook bij minstens één ander moet voorkomen. [6]

We zullen in de volgende definitie de projectieve ruimte introduceren, inclusief de nieuwe notatie die dit met zich meebrengt. Hiermee kunnen we het vermoeden vanaf een andere invalshoek bekijken.

Definitie 2.1. *Een kubisch oppervlak in $\mathbb{P}^3$ (de projectieve ruimte) wordt gegeven door de nulpunten van een irreducibele homogene veelterm f van graad 3:*

$$S : \{(x : y : z : w)|f(x, y, z, w) = 0\} \subset \mathbb{P}^3.$$

Hier is $\mathbb{P}^3(K)$ de projectieve ruimte, wat gegeven wordt door $K^4\backslash\{0\}/\sim$, waarbij $(x : y : z : w) \sim (\lambda x : \lambda y : \lambda z : \lambda w)$, voor $\lambda(\neq 0) \in K^*$.

Door vergelijking (3) te homogeniseren met w, krijgen we een kubisch oppervlak in de projectieve ruimte $\mathbb{P}^3$. In dit geval hebben we het kubisch oppervlak S met

$$f(x, y, z, w) = 4xyz - pw(yz + xz + xy) = 0. \tag{4}$$

Merk op dat als we $w = 1$ invullen, dat we dan weer het oppervlak in de affiene ruimte krijgen.

Een belangrijk resultaat in de algebraïsche meetkunde is dat op elk niet-singuliere kubisch oppervlak 27 lijnen liggen. [8] Een singulier kubisch oppervlak is óf een regeloppervlak (wat bestaat uit alleen maar lijnen) óf een oppervlak met minder dan 27 lijnen.

Als we naar singulariteiten zoeken op het kubisch oppervlak S, dan vinden we de singuliere punten $(1:0:0:0)$, $(0:1:0:0)$, $(0:0:1:0)$ en $(0:0:0:1)$. We willen nu de lijnen vinden die op het oppervlak liggen. Een lijn wordt in de projectieve ruimte gegeven door:

$$(a+bt : c+dt : e+ft : g+ht).$$

We kunnen alle lijnen bereiken door eerst lijnen te proberen waarbij de x-coördinaat gelijk aan 0 is, dan de lijnen waarbij de y-coördinaat gelijk aan 0 is en vervolgens nemen we lijnen van de vorm $(1 : t : e+ft : g+ht)$. Door deze drie soorten lijnen in te vullen in vergelijking (4), bereiken we alle mogelijke lijnen.

Dit resulteert in de lijnen $(0:0:*:*)$, met zijn vijf andere permutaties en in de lijnen $(1:-1:pt:4t)$, $(1:pt:-1:4t)$, $(pt:1:-1:4t)$. In totaal zijn er dus 9 lijnen die op het oppervlak S liggen. Deze lijnen kunnen we herschrijven als

$$\begin{aligned} x = y &= 0, \quad & y = z &= 0, \quad & x + y = pw - 4z &= 0,\\ x = z &= 0, \quad & y = w &= 0, \quad & x + z = pw - 4y &= 0,\\ x = w &= 0, \quad & z = w &= 0, \quad & y + z = pw - 4x &= 0. \end{aligned}$$

Wanneer we $w = 1$ nemen houden we dus zes lijnen over (zie figuur 1). Deze lijnen leveren helaas geen oplossingen voor het vermoeden, omdat er dan waarden nul of negatief worden. We zullen later in het artikel de lijnen die op het kubisch oppervlak liggen wel gebruiken om een parameterisatie te doen.

2.1 Cayley oppervlak

Ons oppervlak vertoont overeenkomsten met het Cayley oppervlak, gegeven door

$$xyz + yzw + xzw + xyw = 0.$$

Het Cayley oppervlak heeft namelijk ook 4 singulariteiten en 9 lijnen. Bovendien zijn de oppervlakken isomorf door het volgende isomorfisme (van het Cayley oppervlak naar S):

$$(x : y : z : w) \mapsto (x : y : z : -pw/4).$$

We kunnen nu het vermoeden anders formuleren:

Vermoeden 2.1.1. *Voor alle gehele $n > 1$, bestaat er een punt op het Cayley oppervlak, gegeven door:*

$$(a : b : c : -n/4) \sim (4a : 4b : 4c : -n),$$

met $a, b, c \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Met deze notatie volgt ook heel simpel dat het vermoeden alleen voor alle p priem bewezen hoeft te worden. Er geldt immers voor alle $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ dat $(ka : kb : kc : -kn/4) \sim (a : b : c : -n/4)$.

Omdat $(a : b : c : -p/4) \sim (4a : 4b : 4c : -p)$ en omdat de coördinaten op het Cayley oppervlak onderling wisselbaar zijn, willen we dus de punten vinden op het oppervlak met gehele coördinaten, waarvan er drie positief zijn en deelbaar door 4 en waarvan één gegeven wordt door $-p$, met p priem. Dit zijn dus nogal specifieke gehele punten op het Cayley oppervlak.

De 9 lijnen die we hadden gevonden op het kubisch oppervlak S gaven geen oplossingen, maar de kwadratische krommen doen dat wel. Zij geven een oplossing voor $n = 3 \bmod 4$. Om dit te vinden, moeten we kwadratische krommen invullen in het oppervlak. Kwadratische krommen zijn van de volgende vorm:

$$(at^2 + bst + cs^2 : dt^2 + est + fs^2 : gt^2 + hst + is^2 : jt^2 + kst + ls^2) \in \mathbb{P}^3.$$

Door dit in te vullen in het Cayley oppervlak, krijgen we 7 vergelijkingen in 12 variabelen. Dit geeft de vrijheid om een aantal variabelen vast te kiezen. We gebruiken het programma Maple om achter een kwadratische kromme te komen. Daarin nemen we $j = l = 0$ en $k = -\frac{1}{4}$, zodat $w = -\frac{p}{4}$ voor $s = 1$ en $t = p$ of andersom. Dan vinden we bijvoorbeeld een kromme, gegeven door:

$$x = \frac{h}{4h-1} st, \tag{5}$$

$$y = gt^2 + hst, \tag{6}$$

$$z = h(st + \tfrac{h}{g}s^2), \tag{7}$$

$$w = -\tfrac{1}{4}st. \tag{8}$$

Uit vergelijking (5) blijkt dan dat dit een oplossing geeft voor $p = 4h - 1$, dus $p = 3 \bmod 4$. Nemen we bijvoorbeeld $s = 1$, $t = p$ en $g = 1$, dan vinden we de volgende oplossing voor $p = 3 \bmod 4$:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{\frac{5p+1}{4}p} + \frac{1}{\frac{p+1}{4}} + \frac{1}{\frac{p+1}{4}\frac{5p+1}{4}} = \frac{4}{p}. \tag{9}$$

2.2 Parameterisatie

We zullen het kubisch oppervlak S parameteriseren in $\mathbb{A}^3$. Voor het parameteriseren hebben we twee kruisende lijnen nodig, we nemen bijvoorbeeld $l_1 : y = z = 0$ en $l_2 : x + y = p - 4z = 0$. Deze herschrijven we in vectoren: $l_1(s) = (0, s, 0)$ en $l_2(t) = (t, -t, p/4)$. We nemen een lijn die deze twee lijnen snijdt en dan maken we gebruik van het feit dat (bijna) alle lijnen (die een kubisch oppervlak snijden) het oppervlak drie keer snijden. De lijn die beide lijnen snijdt, wordt gegeven door

$$l(v) = \left(tv, s - (s+t)v, \tfrac{p}{4}v\right). \tag{10}$$

Dit vullen we in bij vergelijking (3), zodat we krijgen dat

$$-pt(s+t)v^3 + p(2st + \tfrac{1}{4}ps + t^2)v^2 - ps(\tfrac{1}{4}p + t)v = 0,$$

oftewel

$$pv(v-1)(-t(s+t)v+s(\tfrac{1}{4}p+t))=0.$$

Hier geven $v=0$ en $v=1$ de punten die worden gesneden met de lijnen l_1 en l_2. Voor het derde punt, geldt dat:

$$v=\frac{s(\frac{1}{4}p+t)}{t(s+t)}$$

Daaruit halen we met vergelijking (10) dat:

$$x=\frac{s(4t+p)}{4(s+t)}, \tag{11}$$
$$y=-\frac{ps}{4t}, \tag{12}$$
$$z=\frac{ps(4t+p)}{16t(s+t)}. \tag{13}$$

Omdat we gehele oplossingen van vergelijking (1) zoeken, geldt $y>0$. Dit geeft twee mogelijkheden: $s>0$ en $t<0$ of $s<0$ en $t>0$ ($t=0$ kan niet en $s=0$ geeft een triviale oplossing). We zien dat $z=\frac{p}{4t}x$, dus valt de eerste mogelijkheid af. We willen bovendien dat $x,z>0$ en omdat de noemers van x en z negatief zijn, geldt $s+t<0$. Dus samenvattend hebben we dat

$$s<0<t<|s|.$$

Als we nu $u=-s$ in de vergelijkingen (11-13) substitueren, volgt (voor $0<t<u$):

$$x=\frac{u(4t+p)}{4(u-t)}, \tag{14}$$
$$y=\frac{pu}{4t}, \tag{15}$$
$$z=\frac{pu(4t+p)}{16t(u-t)}. \tag{16}$$

We willen dus uitzoeken welke waarden van $t,u\in\mathbb{Q}_{>0}$ gehele oplossingen x, y, z geven.

We moeten het probleem versimpelen om er iets uit te halen. We nemen dus $t,u\in\mathbb{N}_{>0}$ en $\text{ggd}(t,u)=1$. Nu volgt uit vergelijking (16) dat $u=16u'$. Uit vergelijking (15) blijkt dat $t\mid p$, zodat $t=p$ of $t=1$. In het eerste geval volgt dat $16u'-p\mid 5$, dus dit levert oplossingen voor $p=11 \bmod 16$ en voor $p=15 \bmod 16$. In het tweede geval volgt dat $16u'-1\mid 4+p$ en dit levert oplossingen voor $p=4 \mod 16k-1$.

We kijken nu naar oplossingen die al bekend zijn en we zoeken daar de waarden van t en u bij. We merken op uit de vergelijkingen (14-16) dat $4tz=px$ en zu=xy. Dus volgt:

$$t=\frac{px}{4z}, \tag{17}$$
$$u=\frac{xy}{z}. \tag{18}$$

Een oplossing voor $p = 2 \bmod 3$ is bekend:

$$\frac{4}{p} = \frac{1}{\frac{p+1}{3}p} + \frac{1}{p} + \frac{1}{\frac{p+1}{3}}. \tag{19}$$

Wanneer we deze waarden van x, y en z invullen in de vergelijkingen (17-18), volgt dat

$$t = \tfrac{1}{4}p^2, \quad u = p^2 \text{ voor } p \equiv 2 \bmod 3.$$

Een ander voorbeeld is $p = 3 \bmod 4$, waarbij een oplossing gegeven wordt door vergelijking (9). Dit geeft

$$t = \frac{p^2}{p+1}, \quad u = p \text{ voor } p \equiv 3 \bmod 4.$$

Een algemener resultaat is verwoord in het volgende theorema.

Theorema 2.1. *Voor een priemgetal $p \neq 2$ corresponderen alle type I oplossingen met een tripel (a, b, c), waarbij $ggd(a, b) = 1$, $c \mid a + b$ en $4ab \mid cp + 1$. Type II oplossingen corresponderen met (a, b, c), waarbij eveneens $ggd(a, b) = 1$, $c \mid a + b$, maar $4ab \mid p + c$.*

Dit theorema komt uit de eerste versie van het artikel van Christian Elsholtz en Terence Tao. [2]

De oplossingen worden gegeven door:

$$\frac{4}{p} = \frac{1}{\frac{pc+1}{4}p} + \frac{1}{\frac{pc+1}{4a}\frac{a+b}{c}} + \frac{1}{\frac{pc+1}{4b}\frac{a+b}{c}}, \tag{20}$$

$$\frac{4}{p} = \frac{1}{\frac{p+c}{4}} + \frac{1}{\frac{p+c}{4a}\frac{a+b}{c}p} + \frac{1}{\frac{p+c}{4b}\frac{a+b}{c}} \tag{21}$$

Wanneer we dit invullen in de vergelijkingen (17-18), krijgen we

$$t = \frac{p^2bc}{4(a+b)}, \quad u = \frac{bp(pc+1)}{4a} \text{ voor type I oplossingen,}$$

$$t = \frac{bc}{4(a+b)}, \quad u = \frac{b(p+c)}{4a} \text{ voor type II oplossingen.}$$

Omdat voor type I oplossingen geldt dat $\mathrm{ggd}(a, b) = 1$, $c \mid a + b$ en $4ab \mid cp + 1$, zijn er d, $e \in \mathbb{Z}_>0$ zodanig dat $ce = a + b$ en $4abd = cp + 1$. Nu kunnen we t en u herschrijven als

$$t = \frac{p^2b}{4e}, \quad u = pb^2d.$$

Zo geldt ook voor type II oplossingen dat er d, $e \in \mathbb{Z}_>0$ zijn zodanig dat $ce = a+b$ en $4abd = p + c$. Dus krijgen we:

$$t = \frac{b}{4e}, \quad u = b^2d.$$

We hebben hier we een vaste volgorde van x, y en z gekozen, de volgorde van vergelijkingen (20-21). Dus voor deze keuze moet u altijd een geheel getal zijn, terwijl t 'meestal' wel een breuk is (in ieder geval al voor $e \neq 1$ of voor $b \nmid 4$).

Met dit theorema kunnen we verklaren waarom vergelijking (2) er zo uitziet. We hadden al oplossingen voor $p \equiv 2 \bmod 3$ en voor $p \equiv 3 \bmod 4$ gevonden, als we deze twee combineren hebben we oplossingen voor alle $p \not\equiv 1 \bmod 12$. We kijken nu naar de restklassen modulo 24. Als we $a = 1$, $b = 2$ en $c = 3$ nemen voor de type I oplossingen, dan zien we dat dit een oplossing geeft voor $p \equiv 5 \bmod 8$, namelijk:

$$\frac{4}{p} = \frac{1}{\frac{3p+1}{4}p} + \frac{1}{\frac{3p+1}{4}} + \frac{1}{\frac{3p+1}{8}}.$$

Dit geeft nu oplossingen voor alle $p \not\equiv 1 \bmod 24$. We willen nu kijken naar restklassen modulo 5, maar omdat dit in eerste instantie niet lukt, kijken we naar restklassen modulo 20. We nemen $a = 1$, $b = 5$ en $c = 3$, dit geeft oplossingen voor $p \equiv 13, 17 \bmod 20$, namelijk:

$$\frac{4}{p} + \frac{1}{\frac{3p+1}{4}p} + \frac{1}{\frac{3p+1}{2}} + \frac{1}{\frac{3p+1}{10}}.$$

Door dit weer te combineren, hebben we oplossingen voor alle $p \not\equiv 1, 49 \bmod 120$. Nu willen we kijken naar restklassen modulo 7. We nemen $a = 1$, $b = 14$ en $c = 15$, zodat we een oplossing krijgen voor $p \equiv 41 \bmod 56$, gegeven door:

$$\frac{4}{p} = \frac{1}{\frac{15p+1}{4}p} + \frac{1}{\frac{15p+1}{4}} + \frac{1}{\frac{15p+1}{56}}.$$

We nemen $a = 2$, $b = 21$ en $c = 23$, zodat we een oplossing krijgen voor $p \equiv 73, 145 \bmod 168$, gegeven door:

$$\frac{4}{p} = \frac{1}{\frac{23p+1}{4}p} + \frac{1}{\frac{23p+1}{8}} + \frac{1}{\frac{23p+1}{84}}.$$

Dit samen geeft oplossingen voor alle $p \not\equiv 1, 121, 169, 289, 361, 529 \bmod 840$. Dat juist de kwadraten modulo 840 overblijven heeft een reden, wat we later in het artikel aandacht aan zullen besteden.

3 Controle vermoeden

De gebruikelijke manier om het vermoeden te controleren is om eerst de getallen n waarvoor oplossingen bekend zijn weg te filteren. Vervolgens wordt er een computer-algoritme gebruikt die voor de resterende getallen kijkt of het vermoeden klopt.

Grappig om op te merken is dat de computer-controles uit eerdere jaren de wet van Moore (de rekenkracht van computers verdubbelt elke 12 tot 24 maanden) ongeveer volgen. [4]

3.1 Filters

Veel filters die gebruikt worden om het vermoeden van Erdős-Straus te controleren filteren bepaalde congruentieklassen weg, waarvan oplossingen bekend zijn.

Een restklasse $p \equiv r \bmod q$ (waarbij we aannemen dat $\mathrm{ggd}(r, q) = 1$) is oplosbaar door polynomen als er polynomen $x(p)$, $y(p)$ en $z(p)$ bestaan zodanig dat deze polynomen gehele waarden aannemen voor n groot genoeg en zodanig dat:

$$\frac{4}{p} = \frac{1}{x(p)} + \frac{1}{y(p)} + \frac{1}{z(p)}.$$

Voorbeelden van zulke restklassen die oplosbaar zijn door polynomen zijn $p = 2 \bmod 3$ (zie vergelijking (19)) en $p = 3 \bmod 4$ (zie vergelijking (9)).

Het probleem dat we hier tegenkomen zijn kwadraten modulo q.

Theorema 3.1. *Als $p \equiv r \bmod q$ een kwadraat modulo q is, dan is p niet oplosbaar zijn door polynomen.*

Het bewijs kan gevonden worden in het artikel van Schinzel. [9] Dit verklaart ook waarom er kwadraten overbleven in vergelijking (2).

In het volgende theorema, die komt uit het artikel van Christian Elsholtz en Terence Tao [2], worden deze restklassen, die wel oplosbaar zijn, geclassificeerd. Deze bevatten niet de restklassen $p \equiv r \bmod q$, waarbij r een kwadraat modulo q is, wegens theorema 3.1.

Theorema 3.2. *Als een restklasse $r \bmod q$, met $ggd(r, q) = 1$, oplosbaar is door polynomen, dan vallen voldoende grote priemgetallen $p \equiv r \bmod q$ allen onder één van de volgende eisen (waar $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}_{>0}$ steeds vast gekozen worden):*

$$p \equiv -f \bmod 4ad \qquad \textit{met } f \mid 4a^2d + 1, \tag{22}$$

$$p \equiv -f \bmod 4ac \textit{ en } p = -c/a \bmod f \qquad \textit{met } ggd(4ac, f) = 1, \tag{23}$$

$$p \equiv -f \bmod 4cd \textit{ en } p^2 = -4c^2d \bmod f \qquad \textit{met } ggd(4cd, f) = 1, \tag{24}$$

$$p \equiv -1/e \bmod 4ab \qquad \textit{met } e \mid a + b \textit{ en } ggd(4ab, e) = 1, \tag{25}$$

$$p \equiv -e \bmod 4ab \qquad \textit{met } e \mid a + b \textit{ en } ggd(4ab, e) = 1, \tag{26}$$

$$p \equiv -4a^2d \bmod f \qquad \textit{met } 4ad \mid f + 1, \tag{27}$$

$$p \equiv -4a^2d - e \bmod 4ade \qquad \textit{met } ggd(4ad, e) = 1. \tag{28}$$

Bovendien is elk van de bovenstaande eisen oplosbaar door polynomen. De eisen (22-25) horen bij type I oplossingen en de eisen (26-28) bij type II oplossingen.

Bewijs. We zullen grotendeels het bewijs van Christian Elsholtz en Terence Tao volgen. Eerst zullen we het theorema voor type I oplossingen bewijzen.

We nemen de driedimensionale variëteit Σ^I in de zes-dimensionale affiene ruimte, gegeven door alle $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{C}^6$, waarbij

$$4abcd = pa + pb + c, \tag{29}$$

$$ce = a + b, \tag{30}$$

$$4acd = p + f. \tag{31}$$

Uit deze drie vergelijkingen volgen ook de volgende zes vergelijkingen:

$$4abd = pe + 1, \tag{32}$$

$$4acde = pe + 4a^2d + 1, \tag{33}$$

$$4bcde = pe + 4b^2d + 1, \tag{34}$$

$$ef = 4a^2d + 1, \tag{35}$$

$$bf = pa + c, \tag{36}$$

$$p^2 + 4c^2d = f(4bcd - n). \tag{37}$$

Deze zullen later in het bewijs nog van pas komen. Nu kan Σ^I bijvoorbeeld beschreven worden door

$$\Sigma^I = \{(a, \tfrac{pa+c}{4acd-p}, c, d, \tfrac{4a^2d+1}{4acd-p}, 4acd-p) : a, c, d \in \mathbb{C}^3, 4acd \neq p\}.$$

Als we $x = abdp$, $y = acd$ en $z = bcd$ invullen in S, krijgen we vergelijking (29). Dus zien we dat de afbeelding $\pi^I : (a, b, c, d, e, f) \mapsto (abdp, acd, bcd)$ punten van Σ^I afbeeldt op S. Nu hebben we een lemma nodig:

Lemma 3.1. *Voor type I oplossingen bestaat er een unieke $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{N} \cap \Sigma^I$, met $ggd(abcd, p) = 1$ en met a, b en c onderling priem, zodanig dat $\pi^I(a, b, c, d, e, f) = (x, y, z)$.*

Bewijs. Er geldt dat π^I niet injectief is, maar $\bar{\pi}^1 : (\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda^{-2}d, e, f) \mapsto (abdp, acd, bcd)$ is dat wel. En omdat a, b en c relatief priem moeten zijn, is de uniciteit bewezen.

Nu zullen we het bestaan van een (a, b, c, d, e, f) aantonen. We nemen $\mathrm{ggd}(x, y, z) = d$, zodat we x, y en z kunnen herschrijven als

$$x = pdx', \quad y = dy', \quad \text{en } z = dz',$$

waarbij $\mathrm{ggd}(x', y', z') = 1$. Wanneer we dit invullen in S, krijgen we het volgende:

$$4dx'y'z' = y'z' + px'z' + px'y'. \tag{38}$$

We herschrijven dit op de volgende drie manieren:

$$\begin{aligned} x'y'(4dz' - p) &= z'(y' + px'), \\ x'z'(4dy' - p) &= y'(z' + px'), \\ y'z'(4dx' - 1) &= px'(y' + z'). \end{aligned}$$

Om de bovenstaande vergelijkingen en omdat y' en z' relatief priem zijn met p, geldt dat $z' \mid x'y'$, $y' \mid x'z'$ en $x' \mid y'z'$.

Dit betekent dat een factor in één van x', y' en z' ook in een ander moet voorkomen. Omdat zo'n factor bovendien niet in alle drie kan voorkomen (omdat $\mathrm{ggd}(x', y', z') = 1$), moeten x', y' en z' wel van de volgende vorm zijn:

$$x' = ab, \quad y' = ac \quad \text{en } z' = bc,$$

Waarbij a, b en c onderling priem zijn. Dit vullen we in in vergelijking (38), zodat volgt

$$4abcd = pa + pb + c.$$

Omdat y' en z' geen gemene delers hebben met p, heeft c ook geen gemene delers met p, dus volgt uit $(4abd - 1)c = pa + pb$ dat $c \mid a + b$. Hieruit volgt dat er een $e \in \mathbb{Z}_{>0}$ bestaat, met $ce = a + b$. Ook volgt uit $(4acd - p)b = pa - c$, dat $b \mid pa + c$. Dus bestaat er een $f \in \mathbb{Z}_{>0}$, zodanig dat $f = \frac{pa+c}{b} = 4acd - n$.

En omdat $\pi^I : (a, b, c, d, e, f) \mapsto (abdp, acd, bcd) = (x, y, z)$, is het lemma bewezen. □

Nu zijn de volgende uitspraken equivalent (waarbij a, b, c, d, e en $f \in \mathbb{Z}_{>0}$):

- Er bestaat een type I oplossing.

- Er bestaan a, b, c en d zodanig dat $4abcd = pa + pb + c$ en $\mathrm{ggd}(c, p) = 1$.
- Er bestaan a, b en e zodanig dat $e \mid a + b$ en $4ab \mid pe + 1$.
- Er bestaan a, c, d en e zodanig dat $pe + 1 = 4ad(ce - a)$ en $\mathrm{ggd}(c, p) = 1$.
- Er bestaan a, c, d en f zodanig dat $p = 4acd - f$ en $f \mid 4a^2d + 1$ en $\mathrm{ggd}(c, p) = 1$.
- Er bestaan a, c, d en e zodanig dat $pe = (4bcde - 1) - 4b^2d$ en $\mathrm{ggd}(c, p) = 1$.

Deze punten werden ook al apart in andere literatuur genoemd. Hier staan ze bij elkaar. Ze volgen allen uit Σ^I.

Nu zullen we bewijzen dat de eerste vier punten van theorema 3.1 oplosbaar zijn door polynomen. Daarvoor zoeken we polynomen $(a = a(p), b = b(p), c = c(p), d = d(p), e = e(p), f = f(p)) \in \Sigma^I$, die voor p groot genoeg, gehele en positieve waarden aannemen.

- Voor p in de verzameling (22), nemen we:

$$(a, b, c, d, e, f) := \left(a, \frac{p+f}{4ad}e - a, \frac{p+f}{4ad}, d, \frac{4a^2d+1}{f}, f\right).$$

- Voor p in de verzameling (23), nemen we

$$(a, b, c, d, e, f) := \left(a, \frac{pa+c}{f}, c, \frac{p+f}{4ac}, \frac{pa+af+c}{fc}, f\right),$$

  omdat $f \mid pa + c$ en $c \mid p + f$ en $\mathrm{ggd}(c, f) = 1$.

- Voor p in de verzameling (24), nemen we

$$(a, b, c, d, e, f) := \left(\frac{p+f}{4cd}, \frac{p^2+4c^2d+pf}{4cdf}, c, d, \frac{(p+f)^2+4c^2d}{4c^2df}, f\right),$$

  omdat $4cd \mid p + f$ en $f \mid p^2 + 4c^2d$ en $\mathrm{ggd}(4c^2d, f) = 1$.

- Voor p in de verzameling (25), nemen we

$$(a, b, c, d, e, f) := \left(a, b, \frac{a+b}{e}, \frac{pe+1}{4ab}, e, 4a\frac{a+b}{e}\frac{pe+1}{4ab} - 1\right).$$

Nu zullen we bewijzen dat alle restklassen $r \bmod q$, die oplosbaar zijn door polynomen (type I oplossingen), geschreven kunnen worden als één van de eerste vier punten van theorema 3.1. Als $p = r \bmod q$ oplosbaar is door polynomen, kunnen we dit schrijven als:

$$\frac{4}{p} = \frac{1}{x(p)} + \frac{1}{y(p)} + \frac{1}{z(p)},$$

waar $x(p)$, $y(p)$ en $z(p)$ gehele waarden aannemen voor p groot genoeg. We nemen hier aan dat $y(p) \leq z(p)$ (dat mag, wegens symmetrie). Volgens lemma 3.1 hebben we nu dat $(x, y, z) = (abdp, acd, bcd)$, voor $(a = a(p), b = b(p), c = c(p), d = d(p), e = e(p), f = f(p)) \in \Sigma^I$, waarbij geldt dat $a(p)$, $b(p)$ en $c(p)$

onderling priem zijn. Dus geldt dat $d = d(p)$ de grootste gemene deler van $x(p)$, $y(p)$ en $z(p)$ is. En volgt met het Euclidisch algoritme dat d inderdaad een polynoom van p is. Delen we $x(p)$, $y(p)$ en $z(p)$ door $d(p)$ dan volgt dat ook $a = a(p)$, $b = b(p)$ en $c = c(p)$ polynomen van p zijn (omdat bijvoorbeeld $\text{ggd}(x(p)/d(p), y(p)/d(p)) = a(p)$). En volgens de constructie zijn $e(p)$ en $f(p)$ ook polynomen van p.

Omdat $y \leq z$, geldt dat $acd \leq bcd$, dus $a \leq b$. Samen met vergelijking (30), komt hieruit dat $b < ce \leq 2b$. Met vergelijking (36), volgt dan dat

$$ap < bf \leq ap + \tfrac{2b}{e} = ap + \tfrac{2}{ef}bf. \tag{39}$$

Wegens vergelijking (35) geldt dat $ef \equiv 1 \bmod 4$ en omdat $e = f = 1$ niet kan (dan zou gelden dat $b = pa + c = pa + a + b$), volgt hieruit dat $ef \geq 5$. We combineren dit met vergelijking (39), zodat volgt dat $bf \leq \frac{5}{3}ap$. Hier halen we weer vergelijking (36) bij, zodat geldt dat $c \leq \frac{2}{3}ap$, dus $bcd < abdp$, oftewel $y \leq z < x$. En met behulp van vergelijking (1) zien we dat

$$\frac{4}{3p} \leq \frac{1}{y} < \frac{4}{p},$$

waaruit volgt dat $\frac{p}{4} < acd \leq \frac{3p}{4}$. Dus er geldt dat minstens twee van $a(p)$, $c(p)$ en $d(p)$ constante functies zijn. En omdat $ap < bf \leq \frac{5}{3}ap$, geldt dat $f(p)$ hoogstens graad 1 heeft.

We gaan de verschillende gevallen bij langs:

- We nemen a en d als constante functies. Dan zorgt vergelijking (35) ervoor dat ook e en f constante functies zijn en dat $f \mid 4a^2d + 1$. En door vergelijking (31) krijgen we dat $p \equiv -f \bmod 4ad$.

- We nemen a en c als constante functies en $\text{graad}(f) = 0$. Dan volgt uit vergelijking (31) dat $p \equiv -f \bmod 4ac$ en uit vergelijking (36) dat $p \equiv -\frac{c}{a} \bmod f$. En omdat p een groot genoeg priemgetal is, moet gelden dat $\text{ggd}(4ac, f) = 1$.

- We nemen a en c als constante functies en $\text{graad}(f) = 1$. We hadden al eerder gevonden dat $bf \leq \frac{5}{3}ap$, dus b moet ook een constante functie zijn. En omdat $ce \leq 2b$, moet ook e een constante functies zijn. Dan volgt uit vergelijking (30) volgt dat $e \mid a + b$ en uit vergelijking (32) volgt dat $p \equiv -\frac{1}{e} \bmod 4ab$ en omdat p een groot genoeg priemgetal is, moet gelden dat $\text{ggd}(4ab, e) = 1$.

- We nemen c en d als constante functies en $\text{graad}(f) = 0$. Dan volgt uit vergelijking (31) dat $p \equiv -f \bmod 4cd$. En uit vergelijking (37) volgt dat $p^2 \equiv -4c^2d \bmod f$. En dus moet gelden dat $\text{ggd}(4cd, f) = 1$.

- We nemen c en d als constante functies en $\text{graad}(f) = 1$. Dan volgt uit vergelijking (37) dat $p^2 + 4c^2d$ ontbonden kan worden in $f(p)$ en $4bcd - p$, maar $p^2 + 4c^2d$ is irreducibel, dus geeft dit een tegenspraak.

We kijken nu naar type II oplossingen, het bewijs gaat ongeveer hetzelfde als het bewijs van de type I oplossingen, daarom slaan we een aantal stappen over. In dit geval kijken we naar de driedimensionale variëteit Σ^{II} in de zesdimensionale affiene ruimte, gegeven door alle $(a,b,c,d,e,f) \in \mathbb{C}^6$, waarbij

$$4abcd = a + b + pc, \tag{40}$$
$$ce = a + b, \tag{41}$$
$$4acd = f + 1. \tag{42}$$

Hieruit volgen weer een aantal vergelijkingen die later nuttig zijn:

$$4abd = p + e, \tag{43}$$
$$4acde = p + 4a^2d + e, \tag{44}$$
$$4bcde = p + 4b^2d + e, \tag{45}$$
$$ef = p + 4a^2d, \tag{46}$$
$$bf = pc + a, \tag{47}$$
$$4c^2d + 1 = f(4bcd - 1). \tag{48}$$

We zien dat de variëteiten Σ^I en Σ^{II} verwant met elkaar zijn, want tussen Σ^I en Σ^{II} bestaat de bijectie

$$(a,b,c,d,e,f) \mapsto (a, b, \tfrac{c}{p^2}, pd, p^2e, \tfrac{f}{p}).$$

En zo nemen we in hier de afbeelding $\pi^{II} : (a,b,c,d,e,f) \mapsto (abd, acdp, bcdp)$. En door dezelfde argumenten te gebruiken als bij het bewijs van type I oplossingen krijgen we dat de volgende dingen equivalent (waarbij a, b, c, d, e en $f \in \mathbb{Z}_{>0}$):

- Er bestaat een type II oplossing.
- Er bestaan a, b en e zodanig dat $e \mid a+b$ en $4ab \mid p+e$ en $\mathrm{ggd}(\frac{p+e}{4}, n) = 1$.
- Er bestaan a, b, c en d zodanig dat $4abcd = a + b + pc$ en $\mathrm{ggd}(abd, p) = 1$.
- Er bestaan a, b en d zodanig dat $4abd \mid b + pc$ en $\mathrm{ggd}(abd, p) = 1$.
- Er bestaan a, c, d en e zodanig dat $p = (4acd-1)e - 4a^2d$ en $\mathrm{ggd}(\frac{p+e}{4}, p) = 1$.
- Er bestaan a, c, d en f zodanig dat $p = 4ad(ce-a) - e = e(4acd-1) - 4a^2d$ en $\mathrm{ggd}(ad(ce-a), p) = 1$.

Ook deze punten werden ook al apart in eerdere literatuur genoemd.

Nu volgt ook weer dat

- Voor p in de verzameling (26), nemen we
$$(a,b,c,d,e,f) := \left(a, b, \frac{a+b}{e}, \frac{p+e}{4ab}, e, \frac{a+b}{e}\frac{n+e}{b} - 1\right).$$
- Voor p in de verzameling (27), nemen we
$$(a,b,c,d,e,f) := \left(a, \frac{f+1}{4ad}\frac{p+4a^2d}{f} - 1, \frac{f+1}{4ad}, d, \frac{p+4a^2d}{f}, f\right).$$

- Voor p in de verzameling (28), nemen we

$$(a,b,c,d,e,f) := \left(a, \frac{p+e}{4ad}, \frac{p+4a^2d+e}{4ade}, d, e, \frac{p+4a^2d}{e}\right).$$

Dus nu hebben we bewezen dat de laatste drie punten van theorema 3.1 oplosbaar zijn door polynomen.

Nu zullen we bewijzen dat alle voldoende grote $p \equiv r \bmod q$, die oplosbaar zijn door polynomen (type II oplossingen), geschreven kunnen worden als één van de laatste drie punten van theorema 3.1.

We volgen hierin nog steeds het bewijs van de type I oplossingen. We hebben weer dat $a \leq b$ en dat $b < ce \leq 2b$. Door vergelijking (40) krijgen we nu dat

$$pc < 4abcd \leq pc + 2b \leq 2abcd,$$

dus

$$\frac{1}{4}p < abd \leq \frac{1}{2}p.$$

Door $b < ce \leq 2b$ krijgen we nu dat

$$\frac{1}{4}p < acde \leq p.$$

Dus in dit geval moet gelden dat drie van $a(p)$, $c(p)$, $d(p)$ en $e(p)$ constante functies moeten zijn. Dit geeft de volgende gevallen:

- We nemen a, c en e als constante functies. Dan volgt wegens vergelijking (41) dat b ook een constante functie is en dat $e \mid a+b$. En uit vergelijking (43) volgt dat $p \equiv -e \bmod 4ab$, dus $\mathrm{ggd}(e, 4ab) = 1$.
- We nemen a, c en d als constante functies. Dan volgt uit vergelijking (42) dat ook f een constante functie moet zijn en dat $ad \mid f+1$. En wegens vergelijking (46) geldt nu dat $p \equiv -4a^2d \bmod f$.
- We nemen a, d en e als constante functies. Dan volgt uit vergelijking (44) dat $p \equiv -4a^2d - e \bmod 4ade$, dus $\mathrm{ggd}(4ad, e) = 1$.
- We nemen c, d en e als constante functies. Dan volgt uit vergelijking (41) dat a en b begrensd moeten zijn, dus moeten zij ook constante functies zijn. Dus dit geval valt onder de vorige gevallen.

En hiermee is het theorema bewezen voor type I en type II oplossingen.

□

We weten dat we de getallen van de vorm $n \notin \{1, 121, 169, 289, 361, 529\}$ mod 840 kunnen wegfilteren. Verder kunnen getallen die niet priem zijn (zoals kwadraten) worden weggefilterd. Met behulp van punt (27) van theorema 3.1, kunnen we zien welke getallen modulo $f = 3 + 4k$ we verder nog kunnen wegzeven.

Voorbeelden.

$$\begin{aligned} \{7, 8, 10\} &\bmod 11, \\ \{14, 15, 18\} &\bmod 19, \\ \{7, 10, 11, 15, 17, 19, 20, 21, 22\} &\bmod 23. \end{aligned}$$

Voor een langere lijst van congruentieklassen van deze vorm, zie de website van Allan Swett. [10] Hij controleerde met behulp van bovenstaande gegevens het vermoeden voor $1 < n \leq 10^{14}$ in 1999.

We zullen nu nog een aantal voorbeelden geven van filters die we met behulp van theorema 3.1 gemaakt hebben

Voorbeelden. *We nemen bij punt (22) dat* $ad = 29$*, dan krijgen we als filters:*

$$\{77, 103, 107, 113, 115\} \bmod 116.$$

Als we bij punt (25) nemen dat $ab = 13$*, dan krijgen we:*

$$\{37, 51\} \bmod 52.$$

Als we bij punt (28) nemen dat $ade = 5 \cdot 37$*, dan krijgen we:*

$$\{439, 592, 603, 683, 739\} \bmod 740.$$

3.2 Algoritme

Nadat er een filter door de getallen is gehaald, moet het vermoeden nog gecontroleerd worden voor de overgebleven getallen. Daarvoor worden computeralgoritmes gebruikt.

In het artikel van Bello-Hernández, Benito en Fernández wordt een effectief algoritme beschreven dat oplossingen zoekt voor het vermoeden van Erdős-Straus. [1] Het gaat als volgt:

1. Begin met $j = 1$ en $q = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor$.
2. Laat dan $x_j = q + j$, $\kappa_j = \frac{4}{n} - \frac{1}{x_j}$ en $y_j = \left\lceil \frac{1}{\kappa_j} \right\rceil$.
3. Stop als $\frac{4}{n} - \frac{1}{x_j} - \frac{1}{y_j} = 0$ of als $\frac{1}{\frac{4}{n} - \frac{1}{x_j} - \frac{1}{y_j}} \in \mathbb{Z}$, anders laat $j \hookleftarrow j + 1$ en ga terug naar 2.

Er wordt gestart bij $x_1 = \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1$ omdat $\frac{4}{n} > \frac{1}{x}$, dus $x > \frac{n}{4}$.

Het algoritme pakt de kleinst mogelijke y_j waarvoor nog geldt dat $\frac{4}{n} \geq \frac{1}{x_j} + \frac{1}{y_j}$ en kijkt of daar een gehele z_j bij past. Dit is eigenlijk de Fibonacci-Sylvester expansie van $\frac{4x_j - p}{px_j}$. [11]

We hebben met behulp van deze beschrijving een Mathematica-code gemaakt die oplossingen zoekt voor een lijstje getallen:

```
Do[
 Do[
   If[
     Element[1/(4/p - 1/x - 1/(Ceiling[1/(4/p - 1/x)])),
     Integers],
     Print[x, ",", Ceiling[1/(4/p - 1/x)], ",",
     1/(4/p - 1/x - 1/(Ceiling[1/(4/p - 1/x)]))];
     Break[]],
 {x, Ceiling[p/4], Ceiling[p/4] + 10000}],
{p, {list_primes}]
```

De bovengrens voor x kan worden verhoogd als het niet meer voldoet. Dit algoritme zorgt ervoor dat x en y relatief kleine getallen blijven en dat op die manier z juist relatief groot is.

Bello-Hernández, Benito en Fernández bewijzen in hun artikel dat dit algoritme convergeert voor $n = abc - a - b$, waarbij $bc \equiv 1 \bmod 4$. Dit zijn de punten van de vorm $(1, ce-1, c, \frac{ef-1}{4}, e, f)$ op Σ^I, die gegeven was door vergelijkingen (29-31). In het bijzonder geldt dus dat het algoritme convergeert voor $n = abc - a - b$, met $b \equiv c \equiv 3 \bmod 4$, omdat $b \equiv c \equiv 1 \bmod 4$ geeft dat $n \equiv 3 \bmod 4$ en voor dit geval is het vermoeden al bewezen.

4 Discussie

Een manier om de grens waarvoor het vermoeden is gecontroleerd te verleggen is om de tactiek toe te passen die veel anderen ook hebben toegepast, maar dan extremer. Eerst wordt er een grens gesteld die gehaald moet worden. Dan worden de getallen met filters, die met behulp van theorema 3.1 gemaakt kunnen worden, verwijderd uit de lijst met getallen. Bij het filteren door restklassen lopen we dan onvermijdelijk tegen het probleem aan van de kwadraten modulo q (die niet door polynomen oplosbaar waren, dus ook niet een een restklasse vallen die weggefilterd kan worden). Hierdoor blijven er altijd getallen over, zodat daarvoor een algoritme, zoals beschreven in dit artikel, nodig is.

Als we zouden filteren met weinig restklassen, dan kost dat relatief weinig tijd en moeite. Maar dan houden we veel getallen over die we nog moeten controleren met een algoritme, wat veel tijd kost. Als we juist zouden filteren met veel restklassen, dan kost dat relatief veel tijd. Maar er blijven in dat geval weinig getallen over, die gecontroleerd moeten worden, wat weinig tijd kost. De vraag is dus door hoeveel (en welke) restklassen we moeten filteren om zo efficiënt mogelijk een hogere grens te halen.

Bij de hoogste bovengrens die we zijn tegengekomen is er gekozen om veel tijd te besteden aan het filteren. Mizony en Gardes gebruiken twee methodes, die ze in C++ hebben geschreven, één die sneller werkt voor 'kleine' restklassen $r \bmod q$ (waarbij q relatief klein is) en één die sneller werkt voor 'grote' restklassen. Zij houden 42462 restklassen modulo $116396280 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$ over. En wanneer ze verder gaan met de twee methodes weten ze dit uiteindelijk te beperken tot 76 getallen onder de 10^{17}. Deze uitzonderingen kunnen vrij snel gecontroleerd worden door een algoritme zoals beschreven in dit artikel. Dit is gecontroleerd in 80 seconden met het algoritme beschreven door Bello-Hernández, Benito en Fernández. Maar het voorwerk (het uitvoeren van de methodes) kost de computer een paar dagen tijd. De eerste en de tweede methode zouden elk 24 uur hebben geduurd. [5]

In het artikel van Mizony en Gardes worden ook variaties op deze methode beschreven, maar deze methode is nog altijd het meest effectief.

Referenties

[1] Manuel Bello-Hernández, Manuel Benito en Emilio Fernández. „On egyptian fractions". In: *arXiv preprint arXiv:1010.2035* (2010).

[2] Christian Elsholtz en Terence Tao. „Counting the number of solutions to the Erdős–Straus equation on unit fractions". In: *Journal of the Australian Mathematical Society* 94.01 (2013), p. 50–105.

[3] Paul Erdos e.a. „E. Straus 1921-83". In: *Rocky Mountain Journal of Mathematics* 15.2 (1985), p. 331–342.

[4] Marie-Line Gardes. „Étude de processus de recherche de chercheurs, élèves et étudiants, engagés dans la recherche d'un problème non résolu en théorie des nombres". Proefschrift. Université Claude Bernard-Lyon I, 2013.

[5] M. Mizony en M.L. Gardes. „Un point sur la conjecture d'Erdős-Straus". In: *http://math.univ-lyon1.fr/~mizony/SurErdos_Straus2.pdf* (2010-2012).

[6] Maria Monks en Ameya Velingker. „On the Erdős–Straus conjecture: Properties of solutions to its underlying diophantine equation". In: *http://math.berkeley.edu/~monks/papers/ErdosStraus.pdf* (2008).

[7] Louis Joel Mordell. *Diophantine equations*. Deel 30. Academic Press, 1969.

[8] Miles Reid. *Undergraduate algebraic geometry*. Deel 12. Cambridge University Press, 1988.

[9] Andrzej Schinzel. „On sums of three unit fractions with polynomial denominators". In: *Heritage of European Mathematics* 28 (2000), p. 116.

[10] Allan Swett. „The Erdos-Strauss Conjecture". In: *http://math.uindy.edu/swett/esc.htm* (1999).

[11] James J Sylvester. „On a point in the theory of vulgar fractions". In: *American Journal of Mathematics* 3.4 (1880), p. 332–335.