university of groningen

faculty of mathematics
and natural sciences

Informatieverandering in een dynamische wereld

Bachelor Project Mathematics

Augustus 2015

Student: D. Struik

First supervisor: Prof.dr. G.R. Renardel de Lavalette

Second supervisor: Prof.dr. J. Top

Inhoudsopgave

1 Inleiding **3**

2 Voorkennis **4**
- 2.1 Logisch systeem 4
- 2.2 Modale logica 4
- 2.3 Epistemische en ontische verandering 6

3 Statische Kennis in een statische wereld **7**
- 3.1 Epistemische Logica 7
- 3.2 Epistemische Logica met Algemene kennis 9
- 3.3 Doxastische Logica 12

4 Dynamische logica **14**
- 4.1 Propositionele Dynamische Logica 14

5 Dynamische Kennis in een statische wereld **18**
- 5.1 Public Announcements 18
- 5.2 Dynamische Epistemische Logica 21

6 Dynamische kennis in een dynamische wereld **26**
- 6.1 Public Assignment 26
- 6.2 Dynamisch Epistemische Logica met ontische veranderingen . . . 27

7 Conclusie **33**

Hoofdstuk 1

Inleiding

In een *multi-agent system* hebben abstracte individuen, ook wel agenten genoemd, allemaal hun eigen perspectief hebben op een bepaalde wereld. Deze wereld wordt beschreven door een verzameling proposities en hun waarheidswaarden. Een agent heeft over deze wereld informatie: wat de ene agent wel weet, hoeft de andere agent niet weten. Bovendien kan een agent ook hogere orde informatie hebben: informatie over informatie.

De logica waarin we de geldigheid van redeneringen over deze vormen van informatie bestuderen, heet epistemische logica. Als we aan deze logica informatieverandering toevoegen, noemen we epistemische logica dynamisch. Tijdens de ontwikkeling van dynamisch epistemische logica werden technieken uit de propositionele dynamische logica overgenomen, waardoor kennis dynamisch kon worden.

Naar het laatstgenoemde is in de afgelopen decennia veel onderzoek gedaan. Er is echter relatief weinig onderzoek gedaan naar logische systemen die naast informatieverandering ook ontische verandering (verandering in de wereld waarover agenten informatie hebben) toestaan. In [8] werd in 2008 een logisch systeem gepresenteerd waarin zowel epistemische als ontische veranderingen meegenomen worden. Met dit artikel als uitgangspunt heb ik in mijn Bachelorsproject onderzocht hoe dit logische systeem in elkaar zit, en op welke bestaande (dynamisch epistemische) logica's dit systeem is gebaseerd.

Deze vraag wordt in de hierna volgende hoofdstukken beantwoord. De benodigde voorkennis wordt vermeld in hoofdstuk 2. Daarna zal epistemische logica geïntroduceerd worden in hoofdstuk 3. Hierin wordt uitgelegd hoe we kunnen redeneren over informatie in een multi-agent system. In hoofdstuk 4 wordt de basis uitgelegd van de logica van de verandering (dynamische logica). Technieken uit de dynamische logica worden vervolgens gebruikt in dynamisch epistemische logica's (hoofdstuk 5) en dynamisch epistemische en ontische logica's (hoofdstuk 6).

Hoofdstuk 2

Voorkennis

Dit hoofdstuk biedt de vereiste voorkennis die als bekend wordt verondersteld. Het bespreekt de kenmerken van een logica, vertelt hoe modale logica in elkaar zit en geeft enkele belangrijke begrippen die gebruikt worden in de rest van deze scriptie.

2.1 Logisch systeem

Een logisch systeem kenmerkt zich door zijn taal, semantiek en axiomatiek. Een *logische taal* $\mathcal{L}$ is een verzameling welgeformuleerde formules waaraan een betekenis toegewezen kan worden. De *semantiek* van een logica vertelt ons op welke manier we de welgeformuleerde formules kunnen interpreteren als betekenisvolle uitspraken over bepaalde in de context relevante dingen. Deze beweringen gaan over eigenschappen van en relaties tussen objecten. In de *axiomatiek* van een logica kiezen we een aantal axioma's als uitgangspunt. Uit die axioma's kunnnen we met met behulp van bewijsregels nieuwe formules afleiden. De axiomatiek van een logica bestaat dus uit een verzameling axioma's en bewijsregels. Een systeem van axioma's en bewijsregels wordt aangeduid met dikgedrukte letters.

2.2 Modale logica

Definitie 2.1. (Modale Logica). Gegeven een aftelbare verzameling proposities $\mathcal{P} = \{p, q, ...\}$. De taal van de modale logica $\mathcal{L}$ wordt als volgt gedefinieerd:

$$\varphi := \perp \mid p \mid \neg\varphi \mid \varphi_1 \wedge \varphi_2 \mid \Box\varphi$$

waarbij $p \in \mathcal{P}$ en verder gebruiken we de onderstaande gebruikelijke afkortingen:

$$\begin{aligned} \varphi \vee \psi &= \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \\ \varphi \to \psi &= \neg\varphi \vee \psi \\ \varphi \leftrightarrow \psi &= (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \\ \Diamond\varphi &= \neg\Box\neg\phi \\ \top &= \neg\perp \end{aligned}$$

Definitie 2.2. (Kripke-model). Gegeven een aftelbare verzameling proposities $\mathcal{P}$. Een *Kripke-model* is een 3-tupel $M = (W, R, V)$ zodanig dat:

- W: een niet-lege verzameling mogelijke werelden;
- $R \subseteq W \times W$: een toegankelijkheidsrelatie op deze werelden;
- $V : \mathcal{P} \to 2^W$ is een valuatie voor elke propositie $p \in \mathcal{P}$, die de verzameling werelden $V(p) \subseteq W$ aangeeft waarin p waar is

We schrijven we wRy om uit te drukken dat $(w, y) \in R$ en gemakshalve $R(w) = \{y \in W : wRy\}$.

Definitie 2.3. (Kripke-frame). Een *Kripke-frame* $F = (W, R)$ bestaat uit de werelden en de toegankelijkheidsrelatie van een gegeven Kripke-model.

Definitie 2.4. (Geldigheid). Gegeven een formule $\varphi \in \mathcal{L}$, een model $M = (W, R, V)$ en een wereld $w \in W$:

- $(M, w) \models p \iff w \in V(p)$
- $(M, w) \models \neg\varphi \iff (M, w) \not\models \varphi$
- $M \models \varphi \iff \forall w \in W : (M, w) \models \varphi$
- $F \models \varphi \iff (M, V) \models \varphi$ voor alle mogelijke valuaties V op F

Definitie 2.5. (Betekenis van $\Box$ en $\Diamond$ in termen van mogelijke werelden). Gegeven een formule $\varphi \in \mathcal{L}_m$.

- $M, w \models \Box\varphi \iff \forall z \in W : (wRz) \implies (M, z) \models \varphi$
- $M, w \models \Diamond\varphi \iff \exists z \in W : (wRz) \implies (M, z) \models \varphi$

Definitie 2.6. (Logisch geldige gevolgtrekking). Gegeven een formule $\varphi \in \mathcal{L}$ en een verzameling formules $\Gamma \subseteq \mathcal{L}$. We noemen φ een geldige gevolgtrekking uit Γ dan en slechts dan als voor alle modellen $M = (W, R, V)$ en alle werelden $w \in W$ geldt: als voor alle $\gamma \in \Gamma$, $(M, w) \models \gamma$, dan $(M, w) \models \varphi$, in formules:

$$\forall M \forall w \big(\forall \gamma \in \Gamma : (M, w) \models \gamma\big) \implies (M, w) \models \varphi$$

Definitie 2.7. (Equivalentierelatie). Gegeven een frame $F = (W, R)$ en $w, z, y \in W$.Dan is R een equivalentierelatie als voldaan is aan:

- Reflexiviteit: $\forall w : wRw$;
- Symmetrie: $\forall w, \forall y : wRy \to yRw$;
- Transitiviteit $\forall w, \forall y, \forall z : (wRy \wedge yRz) \to wRz$;

Als we (multi)-modale modellen met elkaar willen vergelijken is het begrip bisimulatie nuttig. Werelden uit twee verschillende modellen zijn bisimilair als in deze werelden dezelfde propositionele formules en modale formules waar zijn.

Definitie 2.8. (Bisimilatie). Gegeven twee Kripke-modellen $M = \langle W, R, V\rangle$ en $M' = \langle W', R', V'\rangle$. Een niet-lege binaire relatie $B \subseteq W \times W'$ is een bisimilatie dan en slechts dan als voor alle $w \in W$ en alle $w' \in W'$ waarbij geldt dat wBw', aan onderstaande eisen voldaan is:

- $w \in V(p) \iff w' \in V'(p)$ voor alle $p \in \mathcal{P}$.
- $\forall v \in W$: $wRv \implies \exists v' \in W'$ zodanig dat $w'R'v'$ en vBv'
- $\forall v' \in W'$: $w'R'v' \implies \exists v \in W$ zodanig dat wRv en vBv'

Als er een bisimulatie B is die $w \in W$ met $w' \in W'$ verbindt dan zijn (M, w) en (M', w') bisimilair, te schrijven als $(M, w) \leftrightarrows (M', w')$.

Voorbeeld 1. Gegeven $\mathcal{P} = \{p\}$, $M = \langle W, R, V \rangle$ waarbij $W = \{w\}; R = \{(w, w)\}; V(p) = \{w\}$ en $M' = \langle W', R', V' \rangle$ waarbij $W' = \{x, y\}$, $R' = \{(y, x), (x, y)\}$ en $V'(p) = \{x, y\}$. Werelden w en x zijn bisimilair evenals w en y.

Definitie 2.9. Twee formules heten equivalent, $\varphi \equiv \psi$, indien ze waar zijn in dezelfde werelden in alle modellen.

Definitie 2.10. (Expressiviteit van een taal). Gegeven talen $\mathcal{L}_1$ en $\mathcal{L}_2$.

- $\mathcal{L}_1 \leq \mathcal{L}_2$: de taal $\mathcal{L}_2$ is minstens zo expressief als $\mathcal{L}_1$ als voor elke formule $\varphi \in \mathcal{L}_2$ er een formule $\psi \in \mathcal{L}_2$ bestaat waarvoor geldt $\varphi \equiv \psi$
- $\mathcal{L}_1 \equiv \mathcal{L}_2$: de taal $\mathcal{L}1$ is even expressief als $\mathcal{L}_2$ als $\mathcal{L}_1 \leq \mathcal{L}_2$ en $\mathcal{L}_2 \leq \mathcal{L}_1$
- $\mathcal{L}_1 < \mathcal{L}_2$: de taal $\mathcal{L}_2$ is expressiever dan $\mathcal{L}_1$ dan en slechts dan als $\mathcal{L}1 \leq \mathcal{L}_2$, maar $\mathcal{L}_1 \not\equiv \mathcal{L}_2$

2.3 Epistemische en ontische verandering

Tenslotte een kleine introductie over de termen die worden gebruikt in de komende hoofdstukken. Een *agent* is een abstract individu die zich bevindt in een bepaalde abstracte wereld. Als er sprake is van meer dan één agent, dan spreken we van een *multi-agent system*. De *wereld* waarin agenten zich bevinden, wordt beschreven door een verzameling proposities $\mathcal{P}$ en hun waarheidswaarden. Een agent heeft informatie over deze wereld. Wanneer meerdere agenten zich bevinden in dezelfde wereld kunnen zij verschillende informatie over die wereld hebben. Een informatieverandering van een agent vindt plaats als hij op de een of andere manier informatie over de wereld ontvangt, waardoor zijn epistemische toestand verandert of kan veranderen. De gebeurtenissen die ervoor zorgen dat een agent informatie over de wereld ontvangt noemen we *epistemische* acties. Als de kennis van een agent hierdoor verandert (met andere woorden: hij ontvangt nieuwe informatie) dan heet dit een epistemische verandering. Een gebeurtenis die ervoor zorgt dat de wereld verandert heet een *ontische* actie. Wanneer de wereld zelf verandert, noemen we dit een ontische verandering. De verzameling van zowel epistemische acties als ontische acties noemen we *updates*. Deze termen zullen verderop uitvoeriger gedefinieerd worden.

Hoofdstuk 3

Statische Kennis in een statische wereld

Dit hoofdstuk biedt een overzicht van epistemische logica en is gebaseerd op [5], [3] en [4].

3.1 Epistemische Logica

Epistemische logica bestudeert redeneringen over kennis. Het doel van epistemische logica is het formaliseren van kennis die zekere agenten over een wereld hebben, om vervolgens de geldigheid van redeneringen hierover te bestuderen. In epistemische logica wordt de modaliteit kennis toegevoegd aan de propositielogica. Deze wordt aangeduid met de modale operator K zodat $K\varphi$ betekent dat φ kennis is. In een multi-agent system noemen we een verzameling abstracte individuen ook wel *agenten*, die allen hun eigen kennis hebben op de wereld. Deze verzameling agenten duiden we aan met $\mathcal{A} = \{a, b, ...\}$. Als we een systeem hebben waarin meerdere agenten verschillende kennis hebben over de wereld, introduceren we voor elke agent een modale operator K_a. Als φ kennis is van een agent a geven we weer door $K_a\varphi$ te schrijven. Epistemische logica met meerdere agenten is hierdoor een multi-modale logica met $|\mathcal{A}|$ modaliteiten, waarbij $|\mathcal{A}|$ het aantal elementen uit de verzameling $\mathcal{A}$ is.

3.1.1 Syntax

Definitie 3.1. (Taal van Epistemische Logica) Gegeven een aftelbare verzameling propositievariabelen $\mathcal{P}$ en een eindige verzameling agenten $\mathcal{A}$. De *taal* $\mathcal{L}_e$ van de epistemische logica wordt als volgt gedefinieerd:

$$\varphi := \perp \mid p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid K_a\varphi$$

Hierbij is $p \in \mathcal{P}$ en $a \in \mathcal{A}$.

Verder gebruiken we de gangbare afkortingen $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ (zie definitie 2.1). De duale tegenhanger van operator K_a is $\hat{K}_a = \neg K_a \neg\varphi$. De formule $\hat{K}\varphi$ kan worden opgevat als 'a houdt voor mogelijk dat φ het geval is'.

Een belangrijke eigenschap van epistemische logica is dat ze ook hogere orde informatie modelleert. Zo betekent $K_b K_a \varphi$ dat agent a weet dat agent b weet dat φ het geval is. Deze hogere orde informatie is van belang wanneer we het begrip algemene kennis van agenten opnemen in onze taal (zie hiervoor paragraaf 3.2).

3.1.2 Semantiek

Semantisch gezien kunnen we epistemische logica opvatten in termen van mogelijke werelden van Kripke. De kennis die een agent heeft, zijn epistemische toestand, representeren we als een verzameling mogelijke werelden waarin verschillende proposities waar of onwaar zijn, en een toegankelijkheidsrelatie op die verzameling werelden. Deze geeft aan welke werelden een agent niet van elkaar kan onderscheiden. Hieronder volgen de definities van het model waarin we kennis van agenten kunnen weergeven en de semantische regels voor het model.

Definitie 3.2. (Model van Epistemische Logica) Gegen een aftelbare verzameling propositieletters $\mathcal{P}$ en een eindige verzameling agenten $\mathcal{A}$. Een epistemisch model voor $\mathcal{L}_e$ is een 3-tupel $M = (W, \{R_a\}, V)$, waarbij:

- W is een niet-lege verzameling mogelijke werelden (het domein van M);
- $R : \mathcal{A} \to 2^{W \times W}$ is een toegankelijkheidsrelatie op W voor iedere $a \in \mathcal{A}$;
- $V : \mathcal{P} \to 2^W$ is een afbeelding die aan elke propositie $p \in \mathcal{P}$ een verzameling werelden $V(p) \subseteq W$ toewijst waarin p waar is.

We schrijven $wR_a y$ voor $(w, y) \in R(a) \subseteq W \times W$. De toegankelijkheidsrelatie voldoet aan de eisen van een equivalentierelatie, omdat deze reflexief en euclidisch is.

Definitie 3.3. (Semantiek van Epistemische Logica). Gegeven een epistemisch model M en formules $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{el}$: In epistemische logica gelden de volgende semantische regels.

$(M, w) \models p \iff p \in V(p)$
$(M, w) \not\models \bot$
$(M, w) \models \neg\varphi \iff (M, w) \not\models \varphi$
$(M, w) \models \varphi \wedge \psi \iff (M, w) \models \varphi$ en $(M, w) \models \psi$
$(M, w) \models K_a \varphi \iff \forall z \in W : wR_a z \implies (M, z) \models \varphi$

3.1.3 Axiomatiek

Deze paragraaf bespreekt de axiomatische systemen **K** en **S5**.

Axiomatiek voor modale logica (K) In het algemeen geldt voor elke modale logica dat deze aan de onderstaande vier axioma's voldoet:

1. Alle instanties van tautologieën uit de propositielogica
2. Distributie: $K_a(\varphi \to \psi) \to (K_a \varphi \to K_a \psi)$
3. Modus ponens: Concludeer dat ψ als φ en $\varphi \to \psi$

4. Necessatie: Concludeer $K_a\varphi$ uit φ

Deze regels vormen samen het systeem **K**.

Axiomatiek voor epistemische logica Wat zijn geschikte aannames die we maken als we redeneren over kennis? Een gangbare axiomatiek voor epistemische logica is S_5 en bestaat uit alle axioma's van **K** en onderstaande lijst.

5. Feitelijkheid: $K_a\varphi \to \varphi$
6. Positieve introspectie: $K_a\varphi \to K_aK_a\varphi$
7. Negatieve introspectie: $\neg K_a\varphi \to K_a\neg K_a\varphi$

Axioma 5 stelt dat datgene wat kennis van een agent is waar moet zijn: de informatie van een agent bevat geen onwaarheden. Dit is een belangrijk verschil met *belief* logica: belief gaat over wat een agent denkt dat waar is. In tegenstelling tot kennis mag een agent iets geloven wat niet waar is. Het zesde axioma zegt dat een agent zich bewust is van datgene dat hij weet. Weet hij dat φ het geval is, dan weet hij ook dat hij dat weet etcetera. Dit geldt ook voor de dingen die hij niet weet: axioma 7 stelt dat als een agent niet weet dat φ het geval is, hij wel weet dat hij het niet weet.

3.2 Epistemische Logica met Algemene kennis

Epistemische logica wordt waardevoller wanneer agenten ook kennis hebben over de epistemische toestanden van andere agenten. Deze zogenaamde hogere orde informatie speelt een belangrijke rol in de definitie van algemene kennis (*common knowledge* in het Engels).

3.2.1 Algemene kennis

Als alle agenten weten dat iets het geval is, dan noemen we dat gemeenschappelijke kennis. Een voorbeeld hiervan zijn bijvoorbeeld alle tautologiën.

Definitie 3.4. (Gemeenschappelijke Kennis). Gegeven een eindige verzameling agenten $\mathcal{A}$ en een formule $\varphi \in \mathcal{L}$. Dan geldt dat φ gemeenschappelijke kennis is in $\mathcal{A}$ als alle agenten weten dat φ het geval is:

$$G\varphi = \bigwedge_{a\in\mathcal{A}} K_a\varphi$$

Wanneer iets gemeenschappelijke kennis is in een deelverzameling $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ dan schrijven we:

$$G_{\mathcal{B}}\varphi = \bigwedge_{a\in\mathcal{B}} K_a\varphi$$

Definitie 3.5. (Algemene Kennis). Een formule φ is algemene kennis van een verzameling agenten $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, aangeduid met $A_{\mathcal{B}}\varphi$ dan en slechts dan als φ kennis is waarvan iedereen weet dat het gemeenschappelijke kennis is, en bovendien ook nog geldt dat alle agenten weten dat het gemeenschappelijke kennis is etcetera.

Een praktisch voorbeeld van algemene kennis is het rechts rijden in het verkeer: elke automobilist weet dat je rechts moet rijden. Bovendien weet elke automobilist dat iedere automobilist dit weet etcetera. Aan dit voorbeeld valt op te merken dat algemee kennis een belangrijk begrip is wanneer we redeneren over informatie: wanneer een automobilist niet weet dat iedere automobilist weet dat we rechts rijden, zal hij hoogstwaarschijnlijk niet de straat op durven.

3.2.2 Syntax, semantiek en axiomatiek

Syntax en semantiek

Definitie 3.6. (Taal van Epistemische Logica met Algmene kennis) Gegeven een aftelbare verzameling propositievariabelen $\mathcal{P}$ en een eindige verzameling agenten $\mathcal{A}$. De *taal* $\mathcal{L}_e$ van de epistemische logica met algemene kennis wordt als volgt gedefinieerd:

$$\varphi := \ \bot \mid p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid K_a\varphi \mid G_{\mathcal{B}}\varphi \mid A_{\mathcal{B}}\varphi$$

Hierbij is $p \in \mathcal{P}$, $a \in \mathcal{A}$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. De operatoren G en A de betekenis zoals eerder gedefinieerd.

De semantiek van de uitbreiding is hetzelfde als die van epistemische logica, met een uitbreiding van de semantische betekenis van G en A.

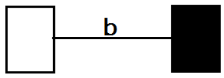
Definitie 3.7. (Semantiek van epistemische logica met algemene kennis). Gegeven een epistemisch model M en formules $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{el}$:. In epistemische logica met algemene kennis gelden de volgende semantische regels:
$(M, w) \models p \iff p \in V(p)$
$(M, w) \not\models \bot$
$(M, w) \models \neg\varphi \iff (M, w) \not\models \varphi$
$(M, w) \models \varphi \wedge \psi \iff (M, w) \models \varphi$ en $(M, w) \models \psi$
$(M, w) \models K_a\varphi \iff \forall z \in W : wR(a)z$ dan $(M, z) \models \varphi$
$(M, w) \models G_{\mathcal{B}}\varphi \iff \forall z \in W : wR(\mathcal{B})z \to (M, z) \models \varphi$
$(M, w) \models A_{\mathcal{B}}\varphi \iff \forall z \in W : wR(\mathcal{B})^*z \to (M, z) \models \varphi$

Hierbij is $R(\mathcal{B}) = \bigcup_{a \in \mathcal{B}} R(a)$ en $R(\mathcal{B})^*$ de reflexief transitieve afsluiting van $R(\mathcal{B})$.

Axiomatiek

De bewijsregels voor dit systeem noemen we **S5C**. Dit systeem bevat **S5** en voegt hieraan onderstaande regels toe.

8. Distributie: $A_{\mathcal{B}}(\varphi \to \psi) \to (A_{\mathcal{B}}\varphi \to A_{\mathcal{B}}\psi)$
9. Mix: $A_{\mathcal{B}}\varphi \to (\varphi \wedge G_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}\varphi)$
10. Inductie van algemene kennis: $A_{\mathcal{B}}(\varphi \to G_{\mathcal{B}}\varphi) \to (\varphi \to A_{\mathcal{B}}\varphi)$
11. Necessatie van $A_{\mathcal{B}}$: $\models \varphi \implies \models A_{\mathcal{B}}$



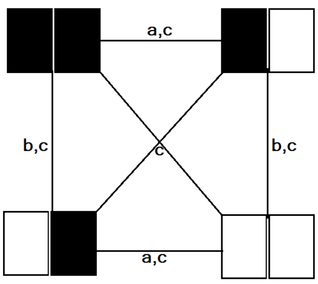
Figuur 3.1: Kripke-model van voorbeeld 2

3.2.3 Voorbeelden

Voorbeeld 2. Arie gooit een munt op waarbij de uitkomst zwart (Z) of wit (W) is. Arie ziet de uitkomst zelf wel, maar bedekt de munt dan met zijn hand. Bob is toeschouwer, maar ziet niet wat de uitkomst is.

In figuur 3.1 zien we links de wereld waarin de uitkomst van Aries muntworp uit voorbeeld 2 wit is; de andere wereld geeft de toestand aan waarin de uitkomst zwart is. We zien dat Bob deze werelden niet kan onderscheiden, maar Arie wel. In epistemische logica (volgens **S5**) zijn alle toegankelijkheidsrelaties reflexief. Voor de duidelijkheid van de modellen zijn deze relaties weggelaten.

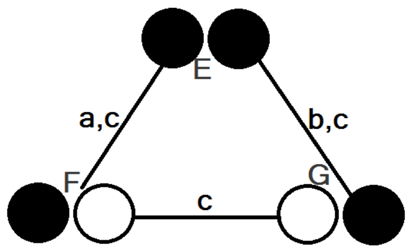
Voorbeeld 3. Arie en Bob gooien beiden na elkaar een munt op: muntworp 1 van Arie en muntworp 2 van Bob. De uitkomst van de worp kan zwart (**z**) of wit (**w**) zijn. Cees is toeschouwer. Wanneer Arie en Bob de munt hebben opgegooid, weten ze alleen de uitkomst van hun eigen worp. Cees ziet alleen dat er twee munten worden opgeworpen, maar kent van beide worpen de uitkomst niet.



Figuur 3.2: Kripke-model van voorbeeld 3

In figuur 3.2 zien we vier mogelijke werelden: **zz**, **zw**, **wz** of **ww**, waarbij **z** betekent dat de uitkomst van een muntworp zwart is en **w** betekent dat de uitkomst wit is. Bekijken we Aries epistemische toestand, dan zien we het volgende. Arie weet alleen de uitkomst van zijn eigen muntworp. Als deze zwart is, dan weet hij dat de volledige uitkomst **zz** of **zw** is; als deze wit is, weet hij dat de uitkomst **wz** of **ww** is. Dit is te zien aan de horizontale lijnen. De verticale lijnen representeren de epistemische toestand van Bob. Tenslotte zien we dat Cees geen onderscheid kan maken tussen de uitkomstencombinatie, waarmee we bedoelen dat Cees geen informatie heeft. Dat Cees niet weet wat de uitkomst is, is algemene kennis. Hetzelfde geldt voor het feit dat Arie de uitkomst van de eerste munt weet en het feit dat Bob de uitkomst van de tweede munt weet.

In voorbeelden 2 en 3 zien we overigens dat een Kripke-wereld meeredere rollen aan kan nemen. Niet alleen representeert deze wat de kennis van een agent



Figuur 3.3: Kripke-model van voorbeeld4

is; een Kripke-wereld geeft in een epistemisch model ook aan wat de hogere orde informatie is van alle agenten. Vanuit wereld **zz** in voorbeeld 3 zien we dat Arie bijvoorbeeld weet dat Bob uitkomsten **zz** en **wz** niet kan onderscheiden.

Voorbeeld 4. Arie en Bob trekken uit een vaas die 2 zwarte en 1 witte knikkers bevat, allebei één knikker, maar bedekken de knikker met hun hand. Cees is toeschouwer. We beschrijven hieronder de verzameling atomaire proposities en het model $M = (W, R, V)$ (zie figuur 3.3).

- $\mathcal{P} = \{a_z, b_z\}$
- $W = \{e, f, g\}$
- $R(a) = \{e, f\} \cup \{(h, h) | h \in W\}$
  $R(b) = \{e, g\} \cup \{(h, h) | h \in W\}$
  $R(c) = W \times W$
- $V(a_z) = \{e, f\}$
  $V(b_z) = \{e, g\}$

3.3 Doxastische Logica

Tot slot nog een korte beschrijving van doxastische logica. We kunnen doxastische logica interpreteren als een zwakkere vorm van epistemische logica, waarbij een iets andere axiomatiek geldt. In doxastische logica gaat het om *belief*, niet om kennis. Axioma 5 van **S5** stelt dat als iets kennis is, datgene ook waar moet zijn. Voor belief geldt deze aanname niet. Een agent gelooft dat iets waar is, maar weet dit niet zeker. Het is natuurlijk wel een geschikte en nuttige aanname dat belief in ieder geval consistent moet zijn.

Definitie 3.8. (Taal van belief logica). Gegeven een aftelbare verzameling propositievariabelen $\mathcal{P}$ en een eindige verzameling agenten $\mathcal{A}$. De *taal* $\mathcal{L}_b$ van belief logica wordt als volgt gedefinieerd:

$$\varphi := \ \bot \mid p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid B_a\varphi$$

Hierbij is $p \in \mathcal{P}$ en $a \in \mathcal{A}$. We vatten $B_a\varphi$ op als de zin 'agent a gelooft dat φ het geval is'.

Axiomatiek voor doxastische logica (KD45) De axiomatiek van doxastische logica is gelijk aan die van het systeem **S5**, maar het axioma 5 (feitelijkheid) wordt vervangen door $\neg B_a \bot$, dat stelt dat belief *consistent* moet zijn. Hieronder volgen de axioma's voor de belief logica, in de literatuur **KD45** genoemd.

1. Alle mogelijke vormen van tautologiën uit de propositielogica
2. Distributie: $B_a(\varphi \to \psi) \to (B_a\varphi \to B_a\psi)$
3. Modus ponens: Concludeer dat ψ als φ en $\varphi \to \psi$
4. Necessatie: Concludeer $B_a\varphi$ uit φ
5. Consistentie: $\neg B_a \bot$
6. Positieve introspectie: $B_a\varphi \to B_a B_a\varphi$
7. Negatieve introspectie: $\neg B_a\varphi \to B_a \neg B_a\varphi$

Hoofdstuk 4

Dynamische logica

Dit hoofdstuk bespreekt de logica van verandering, ook wel dynamische logica genoemd. Er zijn twee redenen waarom het nuttig is om dynamische logica te bestuderen in de context van deze scriptie. Ten eerste omdat dynamische logica gaat over verandering: logica's over kennisverandering en of propositionele verandering gebruiken technieken uit de dynamische logica om deze veranderingen te formaliseren. Een tweede reden is dat we de wereld zelf kunnen beschrijven in termen van proposities en hun waarheidswaarden. Het veranderen van deze wereld vatten we op als een verandering in tenminte één van de waarheidswaarden van de proposities. De logica van dynamische proposities dynamische wereld wordt in de literatuur aangeduid met propositionele dynamische logica (PDL). Dit hoofdstuk biedt een overzicht van de PDL, gebaseerd op [2] en [7].

4.1 Propositionele Dynamische Logica

Als we een wereld opvatten als een verzameling proposities met hun waarheidswaarden, dan kunnen we een dynamische wereld opvatten als een wereld waarin de waarheidswaarden van proposities kunnen veranderen. Een logica die dergelijke veranderingen beschrijft is propositionele dynamische logica (PDL).Deze logica beschrijft de interactie tussen bepaalde *acties* en proposities. Een actie is een gebeurtenis die de verandering veroorzaakt. Het eenvoudigste voorbeeld hiervan is:

$$[\alpha]\varphi$$

Bovenstaande formule betekent 'φ is het geval nadat een zekere actie α uitgevoerd is'. De betekenis van een actie wordt in latere hoofdstukken uitvoeriger besproken.

4.1.1 Syntax

De taal van PDL is opgebouwd uit gewone formules $\varphi, \psi, ...$ zoals uit de propositielogica en uit acties's $\alpha, \beta....$ De aftelbare verzameling atomaire acties duiden we aan met A.

Definitie 4.1. (Taal van PDL). De taal $\mathcal{L}_{pdl}$ wordt als volgt gedefinieerd.

$$\begin{aligned} \varphi &:= \ \bot \mid p \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid [\alpha] \\ \alpha &:= \ \alpha \mid \alpha;\beta \mid \alpha \cup \beta \mid ?\varphi \mid \alpha^* \end{aligned}$$

waarbij $p \in \mathcal{P}$ en $\alpha \in A$. De betekenissen van de verschillende soorten acties zijn als volgt:

- $\alpha;\beta$ = voer eerst α uit en vervolgens β
- $\alpha \cup \beta$ = voer niet-deterministisch of α of β uit
- $?\varphi$ = test of φ het geval is. Als φ waar is, ga dan verder; zo niet stop dan
- α^*= herhaal α een onbepaald (eindig) aantal keer

De modale operatoren werken zoals we verwachten:

- $[\alpha]\varphi$ = na elke uitvoering van actie α is φ het geval zijn
- $\langle\alpha\rangle\varphi$ = na tenminste één uitvoering van α is φ mogelijk het geval

4.1.2 Semantiek

De semantiek van PDL bestaat uit mogelijke werelden en toegankelijkheidsrelaties zoals in een multi-modale logica. Het aantal atomaire acties $|A|$ van het systeem bepaalt het aantal modaliteiten.

Definitie 4.2. (Dynamisch Model). Gegeven een aftelbare verzameling propositieletters $\mathcal{P}$ en een aftelbare verzameling acties A. Het dynamische model voor PDL is een 3-tupel $M = (W, T, V)$ zodat:

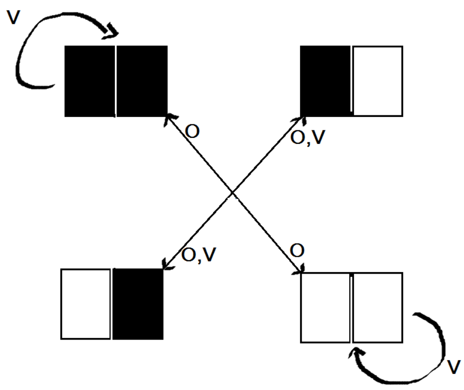
- W is een verzameling mogelijke werelden.
- $T : A \to 2^{W \times W}$ is een toegankelijkheidsrelatie die voor iedere $\alpha \in A$ een toegankelijkheidsrelatie $T(\alpha) \subseteq W \times W$ oplevert.
- $V : \mathcal{P} \to 2^W$ is een afbeelding die aan elke propositie $p \in \mathcal{P}$ een verzameling werelden $V(p) \subseteq W$ toewijst waarin p waar is.

De verzameling W is het domein van het model. De toegankelijkheidsrelatie Hierbij noemen definiëren we voor het gemak $T_\alpha(w) = \{z \in W | (w, z) \in T(\alpha)\}$ en we bedoelen met $wT_\alpha y$ dat $(w, y) \in T(\alpha)$

Definitie 4.3. (Semantiek PDL). Gegeven een dynamisch model $M = (W, T, V)$ en formules $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{pdl}$. In propositionele dynamische logica gelden de volgende semantische regels.

$(M, w) \models p \iff p \in V(p)$
$(M, w) \not\models \bot$
$(M, w) \models \neg\varphi \iff (M, w) \not\models \varphi$
$(M, w) \models \varphi \wedge \psi \iff (M, w) \models \varphi$ en $(M, w) \models \psi$
$(M, w) \models [\alpha]\varphi \iff \forall z \in W : (w, z) \in T_\alpha(w) \implies (M, z) \models \varphi$

Verder geldt:



Figuur 4.1: PDL-model van voorbeeld 5

- $T(\alpha;\beta) = T(\alpha) \circ T(\beta)$
- $T(\alpha \cup \beta) = T(\alpha) \cup T(\beta)$
- $T(?\varphi) = \{(w,w) | M, w \models \varphi\}$
- $T(\alpha^*) = T(\alpha)^* = \bigcup_{n \geq 0} T(\alpha)^n$, de reflexief transitieve afsluiting van $T(\alpha)$

Voorbeeld 5. Arie gooit twee munten op met als uitkomst zwart **z** of wit, zodat er vier mogelijke uitkomsten zijn: **zz,zw,wz,ww**. Hij kan twee acties uitvoeren: hij kan de munten omdraaien (**o**) en hij kan de uitkomsten verwisselen (**v**)

In figuur 4.1 zien we het PDL-model van voorbeeld 5. Lopen we de eigenschappen van het model bij langs dan zien we dat:

$W = \{\mathbf{zz,wz,zw,ww}\}$;
$T(\mathbf{o}) = \{(\mathbf{zz}, \mathbf{ww}), (\mathbf{ww}, \mathbf{zz}), (\mathbf{wz}, \mathbf{zw}), (\mathbf{zw}, \mathbf{wz})\}$
$T(\mathbf{v}) = \{(\mathbf{zz}, \mathbf{zz}), (\mathbf{ww{,}ww}), (\mathbf{wz}, \mathbf{zw}), (\mathbf{zw}, \mathbf{wz})\}$
Verder definiëren we de proposities $1_Z, 1_W, 2_Z$ en 2_W zodat:
$V(1_z) = \{\mathbf{zz}, \mathbf{zw}\}$
$V(1_w) = \{\mathbf{ww}, \mathbf{wz}\}$
$V(2_z) = \{\mathbf{zz}, \mathbf{wz}\}$
$V(2_w) = \{\mathbf{ww}, \mathbf{zw}\}$

4.1.3 Axiomatiek

Definitie 4.4. (Axioma's van PDL). De volgende axioma's definiëren regels voor PDL:

1. Alle instanties van tautologieën uit de propositielogica
2. $[\alpha](\varphi \to \psi) \to ([\alpha]\varphi \to [\alpha]\psi)$
3. $(\models \varphi) \implies (\models [\alpha]\varphi)$
4. $[\alpha;\beta]\varphi \leftrightarrow [\alpha][\beta]\varphi$

5. $[\alpha \cup \beta]\varphi \leftrightarrow [\alpha]\varphi \wedge [\beta]\varphi$
6. $[?\varphi]\psi \leftrightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$
7. $[\alpha^*]\varphi \leftrightarrow \varphi[\alpha][\alpha^*]\varphi$

Hierbij valt op te merken dat de alle acties die a^* niet bevatten, zijn te reduceren zijn tot atomaire acties.

Hoofdstuk 5

Dynamische Kennis in een statische wereld

Nu dynamische logica geïntroduceerd is, is het tijd om te kijken naar de relatie tussen dynamische logica en epistemische logica. Dit hoofdstuk zal ingaan op de vraag hoe we epistemische logica dynamisch kunnen maken. Het daarop volgende hoofdstuk zal bovendien de vraag stellen op welke manier we veranderingen in de wereld zelf hieraan kunnen toevoegen.

De epistemische toestand van agenten kan veranderen doordat er bepaalde gebeurtenissen optreden. Een agent kan nieuwe informatie vergaren door zogenaamde *epistemische acties*. Epistemische acties zijn vergelijkbaar met acties uit PDL, maar zij veranderen niet de proposities die de wereld beschrijven, maar juist de epistemische toestand die agenten over die wereld hebben.

In paragraaf 5.1 wordt het begrip van een *public announcement* geïntroduceerd. Een public announcement is een actie waardoor alle agenten tegelijkertijd dezelfde informatie ontvangen. Wanneer we deze actie toevoegen aan epistemische logica spreken we van public announcement logica. Een complexere logica die in paragraaf 5.2 besproken wordt, veralgemeniseert het concept van een public announcment. Dit systeem staat ook toe dat het stukje informatie slechts een deelverzameling van de groep agenten bereikt. In de bespreking van beide logica's ligt de nadruk op de manier waarop we epistemische toestandveranderingen kunnen weergeven als transformaties van Kripke-modellen. Het stuk over Public Announcements is gebaseerd op [9],[4] en [1]. Voor de paragraaf over dynamische epistemische logica is gebruikt gemaakt van van [4].

5.1 Public Announcements

Public Announcement logica (PAL) is epistemische logica die uitgebreid wordt met een nieuwe modale operator $[!\varphi]$. Het eenvoudigste voorbeeld van een public announcement is:

$$[!\varphi]\psi$$

Deze zin is op te vatten als 'nadat alle agenten tegelijkertijd medegedeeld wordt dat φ, is ψ het geval'. Nadat de actie plaats heeft gevonden, weet iedere agent dat φ. Rekening houdend met het axioma van feitelijkheid ($K_a\varphi \to \varphi$), is een voorwaarde voor een public announcement dat φ waar moet zijn (waarbij aangenomen is dat er in het Kripke-model één wereld overeenkomt met de werkelijke, actuele wereld).

Definitie 5.1. (Public Announcement). Het bekend maken van een stukje informatie die waarheidsgetrouw en publiekelijk is, heet een public announcement. Dat de mededeling waarheidsgetrouw is, betekent dat informatie die de mededeling bevat, waar moet zijn in de werkelijke (actuele) wereld. Publiekelijk wil zeggen dat dat alle agenten de informatie ontvangen.

5.1.1 Syntax

De taal van PAL breidt epistemische logica uit met een nieuwe operator $[!\varphi]$.

Definitie 5.2. (Taal van Public Announcements). De taal $\mathcal{L}_{PA_n}$ met algemene kennis is een uitbreiding van $\mathcal{L}_e$ en wordt als volgt gedefinieerd:

$$\varphi := \ \bot \mid p \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid K_a\varphi \mid G_{\mathcal{B}} | \ A_{\mathcal{B}} \mid [!\varphi]\psi$$

waarbij $[!\varphi]\psi$ betekent: 'als φ publiekelijk is medegedeeld, is ψ het geval'.

5.1.2 Semantiek

Wanneer een public announcement $[!\varphi]$ heeft plaatsgevonden, weet iedere agent dat φ het geval is. Dat betekent dat in het resulterende epistemische model, die we aanduiden met $M|\varphi$, alle werelden waarin φ onwaar is, verwijderd zijn. In het model van public announcement logica definiëren we $[\![\varphi]\!]_M$, waarmee we de verzameling werelden aan te duiden waarin φ waar is:

$$[\![\varphi]\!]_M = \{w \in W \mid (M, w) \models \varphi\}$$

Definitie 5.3. (Model van public announcement logica). Het model dat ontstaat na een public announcement $[!\varphi]$ in een model M is het model $M|\varphi = (W', R', V')$ waarbij:

- $W' = [\![\varphi]\!]_M$
- $R' = R \cap ([\![\varphi]\!]_M \times [\![\varphi]\!]_M)$
- $V'(p) = V(p) \cap [\![\varphi]\!]_M$

We zien in definitie 5.3 een modelrestrictie: het aantal werelden blijft gelijk of neemt af. Het aantal werelden dat een agent voor mogelijk houdt zal of gelijk blijven, of afnemen. In het laatste geval heeft hij dan als gevolg van de public announcement meer informatie over de daadwerkelijke wereld. Zoals te zien aan de definitie van R' blijven uiteraard alleen maar verbindingen over tussen overgebleven werelden. Tenslotte zien we aan V' dat de valuaties onveranderd blijven.

Definitie 5.4. (Semantiek van public announcement logica). Gegeven een model $M = (W, R, V)$ en een formule $\varphi, \psi \in \mathcal{L}$. Dan gelden de volgende semantische regels voor PAL:
$(M, w) \models p \iff p \in V(p)$

$(M, w) \not\models \bot$
$(M, w) \models \neg\varphi \iff (M, w) \not\models \varphi$
$(M, w) \models \varphi \wedge \psi \iff (M, w) \models \varphi$ en $(M, w) \models \psi$
$(M, w) \models K_a\varphi \iff \forall z \in W : wR_a z$ dan $(M, z) \models \varphi$
$(M, w) \models [!\varphi]\psi \iff (M, w) \models \varphi \implies (M|\varphi, w) \models \psi$
$(M, w) \models G_{\mathcal{B}}\varphi \iff \forall z \in W : wR(\mathcal{B})z \implies (M, z) \models \varphi$
$(M, w) \models A_{\mathcal{B}}\varphi \iff \forall z \in W : wR(\mathcal{B})^* z \implies (M, z) \models \varphi$

Hierbij is $R(\mathcal{B}) = \bigcup_{a \in \mathcal{B}} R(a)$ en $R(\mathcal{B})^*$ de transitieve afsluiting van $R(\mathcal{B})$.

5.1.3 Axiomatiek

PAL zonder algemene kennis bevat dezelfde axioma's als epistemische logica (zie paragraaf 3.1.3) en voegt hier bovendien onderstaande vijf axioma's aan toe. Het resulterende systeem is **PA**, de regels voor PAL zonder algemene kennis:

8. PA en atomaire proposities: $[!\varphi]p \leftrightarrow (\varphi \to p)$
9. PA en negatie: $[!\varphi]\neg\psi \leftrightarrow (\varphi \to \neg[!\varphi]\psi)$
10. PA en conjunctie: $[!\varphi](\psi \wedge \phi) \leftrightarrow [!\varphi](\psi \wedge [!\varphi]\phi)$
11. PA en kennis : $[!\varphi]K_a\psi \leftrightarrow (\varphi \to K_a[!\varphi]\psi)$
12. PA en compositie: $[!\varphi][!\psi]\chi \leftrightarrow [!(\varphi \wedge [!\varphi]\psi)\chi]$
13. Necessatie van PA: $\models \varphi \implies \models [!\psi]\varphi$

Merk op dat elke formule uit PAL equivalent is aan een formule uit epistemische logica zonder algemene kennis. PAL is dus even expressief als epistemische logica: $\mathcal{L}_e \equiv \mathcal{L}_{pa}$.Voegen we echter algemene kennis toe, dan wordt PAL expressiever. Het systeem **PAC** bestaat uit **PA** en **S5C**. Voor het gemak van de lezer volgt hier de volledige lijst bewijsregels.

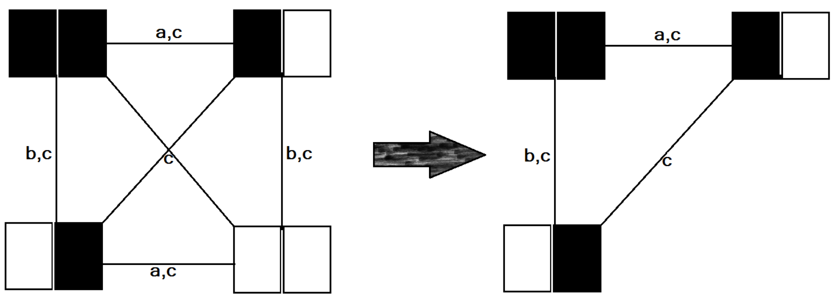
1. Alle mogelijke vormen van tautologiën uit de propositielogica
2. Distributie: $K_a(\varphi \to \psi) \to (K_a\varphi \to K_a\psi)$
3. Modus ponens: Concludeer dat ψ als φ en $\varphi \to \psi$
4. Necessatie: Concludeer $K_a\varphi$ uit φ
5. Feitelijkheid: $K_a\varphi \to \varphi$
6. Positieve introspectie: $K_a\varphi \to K_aK_a\varphi$
7. Negatieve introspectie: $\neg K_a\varphi \to K_a\neg K_a\varphi$
8. PA en atomaire proposities: $[!\varphi]p \leftrightarrow (\varphi \to p)$
9. PA en negatie: $[!\varphi]\neg\psi \leftrightarrow (\varphi \to \neg[!\varphi]\psi)$
10. PA en conjunctie: $[!\varphi](\psi \wedge \phi) \leftrightarrow [!\varphi](\psi \wedge [!\varphi]\phi)$
11. PA en kennis : $[!\varphi]K_a\psi \leftrightarrow (\varphi \to K_a[!\varphi]\psi)$
12. PA en compositie: $[!\varphi][!\psi]\chi \leftrightarrow [!(\varphi \wedge [!\varphi]\psi)\chi]$

13. PA en algemene kennis: $\models \chi \rightarrow [!\varphi]\psi, \models \chi \wedge \varphi \rightarrow G_{\mathcal{B}}\chi \implies \models \chi[!\varphi]A_{\mathcal{B}}\psi$
14. Necessatie van PA: $\models \varphi \implies \models [!\psi]\varphi$
15. Distributie: $A_{\mathcal{B}}(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (A_{\mathcal{B}}\varphi \rightarrow A_{\mathcal{B}}\psi)$
16. Mix: $A_{\mathcal{B}}\varphi \rightarrow (\varphi \wedge G_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}\varphi)$
17. Inductie van algemene kennis: $A_{\mathcal{B}}(\varphi \rightarrow G_{\mathcal{B}}\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow A_{\mathcal{B}}\varphi)$
18. Necessatie van $A_{\mathcal{B}}$: $\models \varphi \implies \models A_{\mathcal{B}}$

5.1.4 Voorbeelden

Voorbeeld 6. Beschouw opnieuw voorbeeld 3: Arie en Bob gooien beiden na elkaar een munt op: muntworp 1 van Arie en muntworp 2 van Bob. De uitkomst van de worp kan zwart (**z**) of wit (**w**) zijn. Cees en Dirk zijn toeschouwers. Wanneer Arie en Bob de munt hebben opgegooid, weten ze alleen de uitkomst van hun eigen worp. Cees ziet alleen dat er twee munten worden opgeworpen, maar kent van beide worpen de uitkomst niet. Dirk heeft de uitkomsten van beide worpen gezien en zegt tegen iedereen : "Minimaal één van de uitkomsten is zwart".

In voorbeeld 6 is de public announcement de uitspraak van Dirk. De uitspraak is equivalent met de uitspraak dat **ww** niet de uitkomst is. Deze mogelijke wereld moet worden verwijderd uit het model, inclusief de bijbehorende relaties met deze wereld. Dit is te zien in figuur 5.1: links zien we het oorspronkelijke epistemische model; rechts zien we het model waarbij wereld **ww**, inclusief bijbehorende relaties,verwijderd is.



Figuur 5.1: een transformatie van Kripke-modellen uit voorbeeld 6

5.2 Dynamische Epistemische Logica

We kunnen een public announcement zien als een stukje informatie dat door alle agenten tegelijkertijd ontvangen wordt. Maar er zijn natuurlijk ook situaties denkbaar waarin slechts een deelverzameling van de agenten informatie ontvangt. Deze stukjes 'privé-informatie' kunnen een gegeven epistemisch model transformeren naar een nieuw epistemisch model.

In het resulterende epistemische model kan het aantal werelden (en de daaraan gekoppelde relaties) afnemen, gelijkblijven of toenemen. Dit laatste klinkt tegenstrijdig; je zou in eerste intantie misschien verwachten dat een toename in de hoeveelheid informatie betekent dat het aantal werelden dat een agent voor mogelijk houdt afneemt. Doordat hogere orde informatie een rol speelt, kan het epistemische model echter complexer worden waardoor het resulterende epistemische model meer mogelijke werelden kan bevatten.

5.2.1 Pre-condities voor epistemische acties

In paragraaf 5.1 zagen we de meest eenvoudige vorm van een epistemische actie: een public announcement. Deze zorgt ervoor dat een stukje informatie tegelijkertijd alle agenten bereikt. Een epistemische actie kan ook complexer zijn: in het algemeen kunnen we haar opvatten als een gebeurtenis waarin tenminste één agent informatie ontvangt, die kan resulteren in een nieuwe epistemische toestand.

Een epistemische actie kan niet altijd plaatsvinden; er zitten bepaalde voorwaarden aan verbonden. Een voorwaarde voor een public announcement was bijvoorbeeld dat de inhoud van de mededeling ook daadwerkelijk waar is. Dus als $[!\varphi]$ een public announcement is, is een vereiste dat φ waar is. Dit geldt in het algmeen ook voor epistemische acties: het stukje informatie dat ontvangen wordt door één of meerdere agenten moet wel waar zijn, anders kan de actie niet uitgevoerd worden.

We kunnen een epistemische actie representeren als een structuur, vergelijkbaar met het epistemische model, die we het actiemodel noemen.

Definitie 5.5. (Actiemodel). Een actiemodel is een 3-tupel $U = (E, S, \mathbf{pre})$ waarbij:

- E, een niet-lege verzameling acties;
- $S : \mathcal{A} \rightarrow 2^{E\times E}$, een toegankelijkheidsrelatie voor elke $a \in \mathcal{A}$ op E;
- **pre**: $E \rightarrow \mathcal{L}$, geeft de voorwaarden waaraan voldaan moet worden voor elke $e \in E$

De toegankelijkheidrelaties tussen de acties uit het actiemodel geven aan in hoeverre een agent de acties kan onderscheiden. De afbeelding **pre** geeft aan elke actie een voorwaarde (bijvoorbeeld $\mathbf{pre}(e) = \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge ...$).

5.2.2 Syntax

Definitie 5.6. (Taal van DEL). Gegeven een aftelbare verzameling proposities $\mathcal{P}$, een eindige verzameling agenten $\mathcal{A}$. De taal $\mathcal{L}_{de}$ is als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned}\varphi &:= \ p \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid K_a\varphi \mid A_{\mathcal{B}}\varphi \mid [\alpha]\varphi \\ \alpha &:= \ (U,e) \mid (\alpha \cup \alpha) \mid (\alpha;\alpha)\end{aligned}$$

waarbij $p \in \mathcal{P}; a \in \mathcal{A}$; $A_{\mathcal{B}}\varphi$ betekent dat φ algemene kennis is in $\mathcal{B} \subseteq A$; en (U, e) is een epistemische actie uit het actiemodel $U = (E, S, \mathbf{pre})$.

De zin $[(U, e)]\varphi$ betekent dat na elke uitvoering van (U, e), φ het geval is. De definitie van de uitvoering van een actiemodel wordt in definitie 5.7 gegeven.

5.2.3 Semantiek

De vraag is op welke manier we de overgang van de ene epistemische toestand (M, w) naar de andere epistemische toestand (M', w') semantisch kunnen interpreren. De precieze definite van de *uitvoering* van een actiemodel volgt hieronder, waarna de semantiek van DEL wordt gedefinieerd.

Definitie 5.7. (Uitvoering van actiemodel). Gegeven een epistemische toestand (M, w) uit model $M = (W, R, V)$ en een epistemische actie (U, e) uit model $U = (E, S, \mathbf{pre})$. Het resultaat van het uitvoeren van (U, e) in (M, w) is de nieuwe epistemische toestand $(M', w') = \big(M \otimes U, (w, e)\big) = \big((W', R', V'), (w, e)\big)$, waarbij:

- $W' = \{(z, f) | z \in W, f \in E$ en $(M, z) \models \boldsymbol{pre}(e)\}$;
- $R'(a) = \{((z, f), (y, g)) \,|(z, y) \in R(a)$ en $(f, g) \in S(a); (z, f), (y, g) \in W'$;
- $V'(p) = \{(z, f) \in W' | z \in V(p)\}$

Definitie 5.8. (Semantiek van DEL). Gegeven een epistemische toestand (M, w) waarbij $M = (W, R, V)$, een actiemodel $U = (E, S, \mathbf{pre})$, een formule $\varphi \in \mathcal{L}_{de}$ en een actie $\alpha \in \{a\}$:

$(M, w) \models p \iff p \in V(p)$
$(M, w) \not\models \bot$
$(M, w) \models \neg\varphi \iff (M, w) \not\models \varphi$
$(M, w) \models \varphi \wedge \psi \iff (M, w) \models \varphi$ en $(M, w) \models \psi$
$(M, w) \models K_a\varphi \iff \forall z \in W : wR(a)z \implies (M, z) \models \varphi$
$(M, w) \models [\alpha]\varphi \iff \forall (M', w') : (M, w)[\![\alpha]\!](M', w') \implies (M', w') \models \varphi$
$(M, w) \models$

$(M, w)[\![U, e]\!](M', w') \iff (M, w) \models \mathbf{pre}(w)$ en $(M', w') = (M \otimes U; (w, e))$
$[\![\alpha \cup \alpha']\!] = [\![\alpha]\!] \cup [\![\alpha']\!]$

Dus met $(M, w)[\![\alpha]\!](M', w,')$ wordt bedoeld dat (M', w') de epistemische toestand is nadat we actie α uitvoeren in epistemische toestand (M, w).

5.2.4 Bewijsregels

Het bewijssysteem van DEL bevat veel van de regels van **PAC** maar er zijn ook een paar verschillen. Hieronder volgt de volledige lijst, aangeduid met **DEA**.

1. Alle mogelijke vormen van tautologiën uit de propositielogica
2. Distributie van kennis: $K_a(\varphi \to \psi) \to (K_a\varphi \to K_a\psi)$
3. Modus ponens: Concludeer dat ψ als φ en $\varphi \to \psi$
4. Necessatie van kennis: Concludeer $K_a\varphi$ uit φ
5. Feitelijkheid: $K_a\varphi \to \varphi$
6. Positieve introspectie: $K_a\varphi \to K_aK_a\varphi$
7. Negatieve introspectie: $\neg K_a\varphi \to K_a\neg K_a\varphi$

8. Distributie: $A_{\mathcal{B}}(\varphi \to \psi) \to (A_{\mathcal{B}}\varphi \to A_{\mathcal{B}}\psi)$

9. Mix: $A_{\mathcal{B}}\varphi \to (\varphi \wedge G_{\mathcal{B}} A_{\mathcal{B}}\varphi)$

10. Inductie van algemene kennis: $A_{\mathcal{B}}(\varphi \to G_{\mathcal{B}}\varphi) \to (\varphi \to A_{\mathcal{B}}\varphi)$

11. Necessatie van $A_{\mathcal{B}}$: $\models \varphi \implies \models A_{\mathcal{B}}$

12. Acties en atomen: $[U, e]p \leftrightarrow ((\mathbf{pre}(e) \to p))$

13. Acties en negatie: $[U, e]\varphi \leftrightarrow (\mathbf{pre}(e) \to \neg[U, e]\varphi)$

14. Acties en conjunctie: $[U, e](\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow [U, e]\varphi \wedge [U, e]\psi$

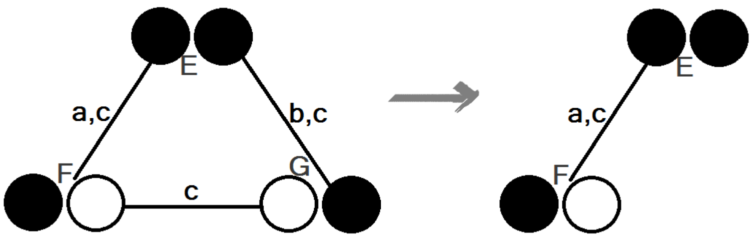
15. Acties en kennis: $[U, e]K_a\varphi \leftrightarrow \mathbf{pre}(e) \to \bigwedge_{(e,f)\in S(a)} K_a[U, f]\varphi$

16. Actie compositie: $[U, e][U', e']\varphi \leftrightarrow [(U, e); (U', e')]\varphi$

17. Onbepaalde keuze: $[\alpha \cup \beta]\varphi \leftrightarrow [\alpha]\varphi \wedge [\beta]\varphi$

18. Necessatie van acties: $\models \varphi \implies \models [U, e]\varphi$

5.2.5 Voorbeelden



Figuur 5.2: Public Announcement van voorbeeld 7

Voorbeeld 7. Arie en Bob trekken uit een vaas die 2 zwarte en 1 witte knikker bevat, allebei één knikker, maar bedekken de knikker met hun hand. Cees is toeschouwer. Arie zegt vervolgens hardop: "ik heb zwart".

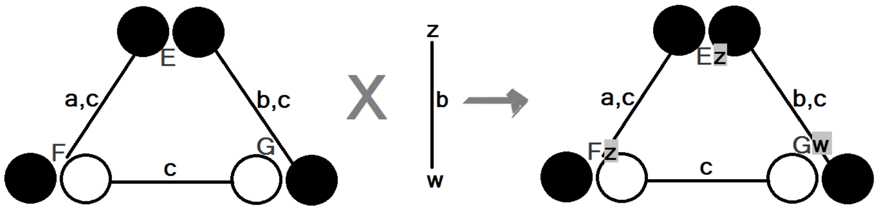
We beschrijven het actiemodel van deze public announcement en het resulterende model $M|\varphi$. Het actiemodel is: $E = \{\mathbf{z}\}; S(a) = (\mathbf{z}, \mathbf{z})$ (voor alle $a \in \mathcal{A}$); $\mathbf{pre}(\mathbf{z}) = a_z$. De atomaire proposities zijn: $\mathcal{P} = \{a_z, b_z\}$, die respectievelijk betekenen dat Arie zwart heeft en Bob zwart heeft. Het model $M|\varphi = (W', R', V')$ is nu als volgt:

- $W' = \{(e, \mathbf{z}), (f, \mathbf{z})\}$

- $R'(a) = W' \times W'$
  $R'(b) = \{(h, h) | h \in W'\}$
  $R'(c) = W' \times W'$

- $V'(a_z) = \{e, f\}$
  $V'(b_z) = \{e\}$

Voorbeeld 8. Arie en Bob trekken uit een vaas die 2 zwarte en 1 witte knikker bevat, allebei één knikker, maar bedekken de knikker met hun hand. Cees is toeschouwer. Arie laat vervolgens zien welke knikker hij heeft aan Cees (**z** of **w**). Bob is hiervan op de hoogte, maar kan de knikker van Arie niet zien.



Figuur 5.3: Uitvoering van epistemische actie uit voorbeeld 8

- $\mathcal{P} = \{a_z, b_z\}$
- Het actiemodel $U = (E, S, \mathbf{pre})$ is:

  $E = \{\mathbf{z},\ \mathbf{w}\}$

  $S(a) = S(c) = \{(\mathbf{z}, \mathbf{z}), (\mathbf{w}, \mathbf{w})\}; S(b) = E \times E$

  $\mathbf{pre}(\mathbf{z}) = a_z$ en $\mathbf{pre}(\mathbf{w}) = \neg a_z$
- Na het uitvoeren ontstaat $M \otimes U = (W', R', V')$:

  $W' = \{e\mathbf{z}, f\mathbf{z}, g\mathbf{w}\}$

  $R'(a) = \{(e\mathbf{z}, f\mathbf{z}), (e\mathbf{z}, e\mathbf{z}), (f\mathbf{z}, f\mathbf{z}), (g\mathbf{w}, g\mathbf{w})\}$

  $R'(b) = \{(e\mathbf{z}, g\mathbf{w}), (e\mathbf{z}, e\mathbf{z}), (f\mathbf{z}, f\mathbf{z}), (g\mathbf{w}, g\mathbf{w})\}$

  $R'(c) = \{(e\mathbf{z}, f\mathbf{z}), (e\mathbf{z}, e\mathbf{z}), (f\mathbf{z}, f\mathbf{z}), (g\mathbf{w}, g\mathbf{w})\}$

  $V'(a_z) = \{e\mathbf{z}, f\mathbf{z}\}$ en $V'(b_z) = \{g\mathbf{w}\}$

Hoofdstuk 6

Dynamische kennis in een dynamische wereld

Waar het voorgaande hoofdstuk zich beperkte tot informatieverandering, behandelt dit hoofdstuk dynamisch epistemische logica's waarin ook toegestaan wordt dat de feitelijke wereld verandert als gevolg van een *ontische* actie. Het stuk over Public Assignments is gebaseerd op [6]. De tweede paragraaf bespreekt een systeem waarin ook complexere ontische acties kunnen plaats vinden, voor een groot gedeelte gebaseerd op [8].

6.1 Public Assignment

In [6] presenteren de auteurs een systeem waarin naast public announcments ook *public assignments* kunnen plaatsvinden.

6.1.1 Syntax en semantiek

Definitie 6.1. (Public Assignment Logica) Aan de taal $\mathcal{L}_{PA_n}$ wordt de modale operator $[p := \varphi]\psi$ toegevoegd zodat de nieuwe taal $\mathcal{L}_{PA_s}$ als volgt gedefinieerd wordt:

$$\varphi := \perp \mid p \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid K_a\varphi \mid [!\varphi]\varphi_2 \mid [p := \varphi]\psi$$

De uitdrukking $[p := \varphi]\psi$ staat voor "in alle gevallen dat alle agenten leren dat p verandert in φ, is ψ het geval". Voor de semantiek definiëren we

$$M_{p:=\varphi} = (W, R, V')$$

Hierbij is $V'(p) = \{w \in W | (M, w) \models \varphi\}$ (en als $q \neq p$ dan geldt $V'(q) = V(q)$)

Definitie 6.2. (Semantiek van PA$_s$L). Gegeven een (nader te definiëren) PA$_s$L-model M dan geldt de semantiek van PAL (definitie 5.4), uitgebreid met:

- $(M, w) \models p \iff p \in V(p)$
- $(M, w) \not\models \perp$
- $(M, w) \models \neg\varphi \iff (M, w) \not\models \varphi$

- $(M, w) \models \varphi \wedge \psi \iff M, w \models \varphi$ en $M, w \models \psi$
- $(M, w) \models K_a\varphi \iff \forall z \in W : (w, z) \in R(a)$
- $(M, w) \models [!\varphi]\psi \iff ((M, w) \models \varphi \implies M|\varphi, w \models \psi)$
- $(M, w) \models [p := \varphi]\psi \iff M_{p:=\varphi}, w \models \psi$

6.2 Dynamisch Epistemische Logica met ontische veranderingen

In [8] wordt een systeem gedefinieerd waarin zowel epistemische als ontische veranderingen plaats kunnen vinden. Dit model is het systeem zoals gedefinieerd in [4] (zoals in paragraaf 5.2), maar naast pre-condities - die bepalen wanneer het mogelijk is om een bepaalde actie uit te voeren - worden er ook post-condities toegevoegd. De logica waarin we zowel epistemische verandering als ontische verandering kunnen uitdrukken noem ik Dynamische Epistemische en Ontische Logica (DEOL).

6.2.1 Post-condities

We keren terug naar het DEL-systeem. In dit systeem konden we, gegeven een epistemisch model $M = (W, R, V)$ en een actiemodel $U = (E, S, \mathbf{pre})$, een epistemische actie (U, e) laten uitvoeren in (M, w), wat resulteerde in het nieuwe model $M' = M \otimes U$. Een epistemische actie is in dit model alleen mogelijk als voldaan is aan bepaalde voorwaarden, de pre-condities, die vastgelegd zijn in de afbeelding **pre**(e) voor elke $e \in E$. Een eigenschap van dit systeem is dat het de waarheidswaarden van atomaire proposities onaangetast laat. Maar op welke manier kunnen we aan dit model ook veranderingen in de wereld toevoegen? Kooi en Van Ditmarsch introduceren hiervoor in [8] het update-model, vergelijkbaar met het actiemodel, waarin naast pre-condities ook post-condities worden toegevoegd voor elke actie. Dit zijn afbeeldingen die, gegeven een bepaalde actie, aan elke atomaire propositie een nieuwe waarde (gegeven door een formule) toekennen:

$$\mathbf{post}(e) : E \to (\mathcal{P} \to \mathcal{L})$$

Vanaf nu noemen we een actie die zowel een epistemische als ontische dimensie kan bevatten, een *update*. Het updatemodel bestaat uit een verzameling updates, een verzameling toegankelijkheidsrelaties (voor elke agent één), en een verzameling pre- en post-condities.

Definitie 6.3. (Update Model). Gegeven een verzameling agenten $\mathcal{A}$ en een taal $\mathcal{L}$. Een *update model* is een 4-tupel $U = (E, S, \mathbf{pre}, \mathbf{post})$, waarbij:

- E, een niet-lege verzameling updates, het domein van het update model;
- $S : \mathcal{A} \to 2^{E \times E}$: is een toegankelijkheidsrelatie op E voor elke $a \in \mathcal{A}$;
- **pre**: $E \to \mathcal{L}$, geeft aan aan welke voorwaarde moet worden voldaan;
- **post**: $E \to (\mathcal{P} \to \mathcal{L})$, geeft voor elke event een post-conditie aan voor alle atomaire proposities uit $\mathcal{P}$

Het domein van het update model is $E = \{e, f, ...\}$. Als $|E| = 1$ dan noemen we (U, e) een (enkelvoudige) *update*. Wanneer $|E| > 1$ dan duiden we we met (U, E) een *meervoudige update* aan. De toegankelijkheidsrelatie voor een agent $a \in \mathcal{A}$ geeft aan welke events hij kan onderscheiden. Wanneer $(e, f) \in S_a$ dan bedoelen we daarmee dat agent a niet kan onderscheiden of event e of f plaatsvindt. We nemen aan dat de post-condities van een update een eindig aantal stappen verwijderd zijn ten opzichte van de identiteitsfunctie **id**.

Voorbeeld 9. Een public announcement $[!\varphi]$ is te schrijven als update (U, π), die ervoor zorgt dat alle agenten het stukje informatie φ ontvangen. Het update model van π bestaat uit de verzameling acties $E = \{\pi\}$; $S(a) = (\pi, \pi)$ voor alle $a \in \mathcal{A}$; de pre-conditie van π is $\mathbf{pre}(\pi) = \varphi$; de post-conditie functie is $\mathbf{post}(\pi) = \mathbf{id}$.

6.2.2 Syntax

De syntax versimpelen we iets ten opzichte van de taal van DEL: $[a]\varphi$ staat nu voor $K_a\varphi$, $[B^*]\varphi$ staat nu voor $A_{\mathcal{B}}\varphi$. Dit geeft de volgende definitie.

Definitie 6.4. (Taal van DEOL). Gegeven een aftelbare verzameling proposities $\mathcal{P}$, een eindige verzameling agenten $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. De taal $\mathcal{L}_{deo}$ is als volgt gedefinieerd:

$$\begin{aligned} \varphi &:= \; p \mid \neg\varphi \mid (\varphi_1 \wedge \varphi_2) \mid [\alpha]\varphi \\ \alpha &:= \; a \mid B^* \mid (U, e) \end{aligned}$$

waarbij $p \in \mathcal{P}, a \in \mathcal{A}$; $[B^*]\varphi$ betekent dat φ algemene kennis is voor alle agenten in $B \subseteq A$ en (U, e) is een update zoals al gedefinieerd.

6.2.3 Semantiek

Net zoals bij het actiemodel moeten we de 'uitvoering' van een update in een gegeven epistemische toestand definiëren voordat we de semantiek van DEOL kunnen beschrijven.

Definitie 6.5. (Uitvoering van een event). Gegeven een epistemisch model $M = (W, R, V)$, met epistemische toestand $w \in W$; een update model $U = (E, S, \mathbf{pre}, \mathbf{post})$ en een event $e \in E$. Het uitvoeren van (U, e) in (M, w) levert de nieuwe epistemische toestand $(M', (w, e))$, waarbij $M' = (M \otimes U) = (W', R', V')$, zodat:

- $W' = \{(z, f) : z \in W, f \in E, \text{ en } (M, z) \models \mathbf{pre})(\text{f})\}$;
- $R' = \{\big((z, f), (y, g)\big) : (z, f), (y, g) \in W' \text{ en } (z, y) \in R(a) \text{ en } (f, g) \in S(a)\}$
- $V'(p) = \{(z, f) \in W' : (M, z) \models \mathbf{post}(f)(p)\}$

Definitie 6.6. (Semantiek van OEC). Gegeven een epistemische toestand $(M, w); a \in \mathcal{A}$, een deelverzameling agenten $B \subseteq \mathcal{A}$ en $\varphi, \psi \in \mathcal{L}_{deo}$. Dan gelden in het model de onderstaande semantische regels.

$$
\begin{aligned}
&(M,w) \models p \iff w \in V(p)\\
&(M,w) \not\models \bot\\
&(M,w) \models \neg\varphi \iff (M,w) \not\models \varphi\\
&(M,w) \models \varphi \wedge \psi \iff (M,w) \models \varphi \text{ en } (M,w) \models \psi\\
&(M,w) \models [a]\varphi \iff \big(\forall z \in W : (w,z) \in R(a) \implies (M,z) \models \varphi\big)\\
&(M,w) \models [B^*]\varphi \iff \big(\forall z \in W : (w,z) \in R(B)^* \implies (M,z) \models \varphi\big)\\
&(M,w) \models [U,e]\varphi \iff (((M,w) \models \ \mathbf{pre}(e)) \implies (M \otimes U, (w,e)) \models \varphi)
\end{aligned}
$$

Hierbij betekent $R(B)^*$ de reflexief transitieve afsluiting van alle toegankelijkheidsrelaties $R(a)$ voor alle agenten $a \in B$.

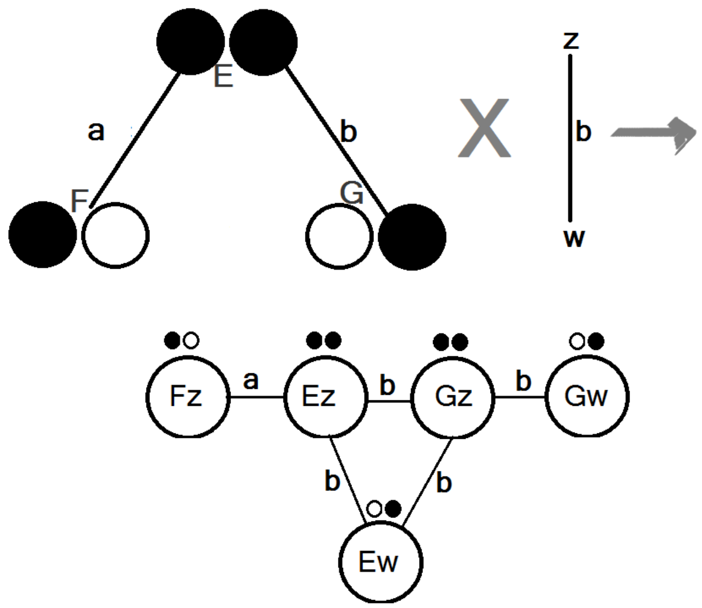
Het blijkt lastig te zijn om uitsluitend ontische acties (acties die geen epistemische verandering teweegbrengt) te definiëren. Als alternatief definiëren een ontisch effectieve actie.

Definitie 6.7. (Uitsluitend epistemische actie en ontisch effectieve actie). Een update (U,e) heet *uitsluitend epistemisch* indien het de feitelijke wereld onaangetast laat, met andere woorden: als $\mathbf{post}(e) = \mathbf{id}$. Een update (U,e) heet *ontisch effectief* wanneer $\mathbf{post}(e) \neq \mathbf{id}$

6.2.4 Bewijsregels

Voor de bewijsregels van DEOL laten we ons inspireren door **DEA**, maar door de versimpelde syntax passen we deze enigzins aan. Kennis-axioma's zitten bijvoorbeeld impliciet in de update-axioma's verpakt. Dit resulteert in de onderstaande lijst bewijsregels, **DEU** genoemd:

1. Alle vormen van tautologieën uit de propositielogica
2. Distributie: $[\alpha](\varphi \to \psi) \to ([\alpha]\varphi \to [\alpha]\psi)$
3. Modus Ponens: Als φ en $\varphi \to \psi$, concludeer dan ψ
4. Necessatie: $\models \varphi \implies \models [\alpha]\varphi$
5. Update en atomen: $[U,e]p \leftrightarrow (\mathbf{pre}(e) \to \mathbf{post}(e)(p))$
6. Update en negatie: $[U,e]\neg\varphi \leftrightarrow (\mathbf{pre}(e) \to \neg[U,e]\varphi)$
7. Update en conjunctie: $[U,e](\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow [U,e]\varphi \wedge [U,e]\psi$
8. Update en kennis: $[U,e][a]\varphi \leftrightarrow \Big(\mathbf{pre}(e) \to \bigwedge_{(e,f)\in S_a}[a][U,f]\varphi)\Big)$
9. Update compositie:$[U,e][U',e']\varphi \leftrightarrow [(U,e);(U',e')]\varphi$
10. Algemene kennis mix: $[B^*]\varphi \to (\varphi \wedge [B][B^*]\varphi)$
11. Algemene kennis en inductie: $[B^*](\varphi \to [B]\varphi) \to (\varphi \to [B^*]\varphi)$



Figuur 6.1: Uitvoering van epistemische actie uit voorbeeld 10. In het resulterende model is boven de vijf mogelijke werelden de resulterende knikkerverdeling getekend

6.2.5 Voorbeeld

Voorbeeld 10. Arie en Bob trekken uit een vaas die 2 zwarte en 1 witte knikker bevat, allebei één knikker, maar bedekken de knikker met hun hand. Arie besluit om de bal weer terug te leggen in de vaas en opnieuw een knikker (**z** of **w**) te trekken, waarna hij de uitkomst ziet. Bob obverseert slechts dat Bob dit doet, maar weet niet welke knikker hij nu trekt. In dit voorbeeld betekenen a_z, b_z respectievelijk dat Arie zwart heeft en Bob zwart.

- Het epistemisch model ziet er als volgt uit:

  $\mathcal{P} = \{a_z, b_z\}$

  $W = \{e, f, g\}$

  $R(a) = \{e, f\} \cup \{(h, h)|h \in W\}$

  $R(b) = \{e, g\} \cup \{(h, h)|h \in W\}$

  $V(a_z) = \{e, f\}$

  $V(b_z) = \{e, g\}$

- Het update model $(E, S, \mathbf{pre}, \mathbf{post})$ ziet er als volgt uit:

  $E = \{\mathbf{z}, \mathbf{w}\}$. Hierbij betekenen **z** en **w** respectievelijk dat Arie een zwarte en witte bal pakt

  $S(a) = \{(\mathbf{w},\mathbf{w}), (\mathbf{z},\mathbf{z})\}$

  $S(b) = E \times E$

  $pre(\mathbf{z}) = \top$ en $\mathbf{pre}(\mathbf{w}) = b_z$

$\mathbf{post}(\mathbf{z}) = \mathbf{id}$;

$\mathbf{post}(\mathbf{w})(a_z) = \neg a_z$ en $\mathbf{post}(\mathbf{w})(b_z) = b_z$

- Wanneer we het update model uitvoeren, ontstaat $M \otimes U = (W', R', V')$, waarbij:

  $W' = \{e\mathbf{z}, f\mathbf{z}, g\mathbf{z}, e\mathbf{w}, g\mathbf{w}\}$

  $R'(a) = \{(e\mathbf{z}, f\mathbf{z})\} \cup \{(h\mathbf{x}, h\mathbf{x}) | h\mathbf{x} \in W'\}$

  $R'(b) = \{(e\mathbf{z}, g\mathbf{z}); (e\mathbf{z}, e\mathbf{w}); (g\mathbf{z}, e\mathbf{w}), (g\mathbf{z}, g\mathbf{w})\} \cup \{(h\mathbf{x}, h\mathbf{x}) | h\mathbf{x} \in W'\}$

  $V'(a_z) = \{e\mathbf{z}, f\mathbf{z}, g\mathbf{z}\}$

  $V'(b_z) = \{e\mathbf{z}, e\mathbf{w}, g\mathbf{z}, g\mathbf{w}\}$

6.2.6 Enkele standaard updates

Event e heet **skip** wanneer $\mathbf{pre}(e) = \top$ en $\mathbf{post}(e) = \mathbf{id}$. Deze update verandert niets, behalve dat we 'een stap in de toekomst' maken. Een update model U met slechts één mogelijke wereld e die voor alle agenten toegankelijk is en waarbij $\mathbf{pre}(e) = \top$ heet een public assignment (zoals in definitie 6.1). Wanneer een update model U met slechts één mogelijk event voor alle agenten toegankelijk is, waarbij $\mathbf{post}(e) = \mathbf{id}$ heet een public announcement (zoals in definitie 5.1). Verder geldt $(U, e) \cup (U, f) = (U, \{e, f\})$.

6.2.7 Behoud van epistemische eigenschappen

Tot nu toe hebben we ons niet bezig gehouden met de vraag of alle eigenschappen van het frame van het epistemische model behouden blijven na uitvoering van een updatemodel (of actiemodel). Aan welke eisen moet een update model U voldoen zodat $M' = M \otimes U$ de gewenste eigenschappen heeft? Epistemische logica kent drie belangrijke axioma's:

$K_a\varphi \to \varphi$
$K_a\varphi \to K_aK_a\varphi$
$\neg K_a\varphi \to K_a\neg K_a\varphi$

Wanneer we van de toegankelijkheidsrelaties eisen dat het equivalentierelaties zijn, dan is aan de axioma's van kennis voldaan ([9]). Deze relaties zijn reflexief, symmetrisch en transitief. Maar nadat we een updatemodel uitvoeren, moeten deze eigenschappen wel bewaard blijven.

Laten we bijvoorbeeld eisen dat de toegankelijkheidsrelaties van het updatemodel ook equivalentierelaties zijn. Gelukkig blijkt dan dat onze gewenste eigenschappen van kennis ook behouden blijven in het epistemische model nadat een updatemodel is uitgevoerd.

Stelling 1. Gegeven een epistemisch model $M = (W, R, V)$, met epistemische toestand $w \in W$; een update model $U = (E, S, \mathbf{pre}, \mathbf{post})$ en een event $e \in E$ en het resulterende model $M' = (W', R', V')$. Als R en S equivalentierelaties zijn, dan is $R' = \{((z, f), (y, g)) : (z, f), (y, g) \in W'$ en $(z, y) \in R(a)$ en $(f, g) \in S(a)\}$ ook een equivalentierelatie.

Bewijs. Gegeven is dat R en S equivalentierelaties zijn. Dus R en S zijn reflexief, symmetrisch en transitief. We controleren reflexiviteit, symmetrie en transitiviteit voor R':
Reflexiviteit: neem $(z, f) \in W'$ willekeurig. R en S zijn equivalentierelaties, dus zRz en fSf. Uit de definitie van R' volgt dat $((z, f), (z, f)) \in R'$
Symmetrie: neem $((z, f), (y, g)) \in R'$ willekeurig. Omdat zRy en fSg (want R en S zijn symmetrisch) geldt ook dat yRz en gSf. Uit de definitie van R' volgt dat $(y, g)(z, f) \in R'$
Transitiviteit: als $((z, f), (y, g)) \in R'$ en $((y, g), (x, h) \in R'$ dan zRy en yRx; en ook fSg en gSh. Omdat R en S transitief zijn volgt zRx en fSh. Uit de definitie van R' volgt dat $((z, f), (x, h)) \in R'$ □

We kunnen dus stellen dat als we eisen van het updatemodel dat de toegankelijkheidsrelaties equivalentierelaties zijn, dat dit ook geldt voor de toegankelijkheidsrelaties in het model na de uitvoering van het updatemodel. Willen we onderzoeken of voor andere systemen (zoals **K45**) gewenste eigenschappen behouden blijven, dan kunnen we op een vergelijkbare manier de eisen van ons updatemodel bepalen. Overigens geldt bovenstaande stelling natuurlijk ook voor het actiemodel, aangezien dat een speciaal geval is van het updatemodel.

Hoofdstuk 7

Conclusie

In deze scriptie werd onderzocht op welke manier we zowel epistemische als ontische veranderingen kunnen formaliseren. In epistemische logica hebben we gezien op welke manier we (hogere orde) informatie kunnen modelleren. Kennis van agenten wordt hierin gerepresenteerd als toegankelijkheidsrelaties op mogelijke werelden.

Door public announcements aan het systeem toe te voegen, was een eerste vorm van een dynamisch epistemische logica geboren. Een public announcement zorgt voor een transformatie van Kripke-modellen waarbij de werelden waarin de informatie uit de public announcement onwaar is (plus bijbehorende verbindingen) verwijderd worden.

Het toevoegen van complexere epistemische acties, waarbij informatie ontvangen wordt door een deelverzameling agenten, liet zien dat bepaalde epistemische acties alleen onder bepaale voorwaarden uitgevoerd kunnen worden. Het actiemodel definieert dergelijke precondities.

Wanneer we naast deze precondities ook nog postcondities per actie invoeren, kunnen we daadwerkelijk ontische acties aan onze taal toevoegen. In het updatemodel kunnen we zowel epistemische als ontische veranderingen verwerken, die we updates noemen. Het blijkt echter lastig te zijn om uitsluitend ontische acties, acties die geen epistemische effecten hebben, te definiëren.

Aan een updatemodel moeten wel eisen worden gesteld. Willen we dat de axioma's van kennis zoals in **S5** geformuleerd, behouden, dan is een voorbeeld van zo'n eis dat de toegankelijkheidsrelaties van het updatemodel equivalentierelaties moeten zijn.

Door de route te lopen van epistemische logica, via public announcements, naar DEL en uiteindelijk DEOL, konden we zien dat de logica steeds expressiever werd: uitdrukkingen uit de voorgaande systemen konden we steeds opnieuw uitdrukken in de daarna gepresenteerde systemen.

Bibliografie

[1] Alexandru Baltag, Lawrence S. Moss, and Slawomir Solecki. The logic of public announcements, common knowledge, and private suspicions. In *Proceedings of the 7th Conference on Theoretical Aspects of Rationality and Knowledge*, TARK '98, pages 43–56, San Francisco, CA, USA, 1998. Morgan Kaufmann Publishers Inc.

[2] David Harel, Jerzy Tiuryn, and Dexter Kozen. *Dynamic Logic*. MIT Press, Cambridge, MA, USA, 2000.

[3] Vincent Hendricks and John Symons. Epistemic logic. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Fall 2014 edition, 2014.

[4] W. van der Hoek H.P. van Ditmarsch and B.P. Kooi. *Dynamic epistemic logic*. Dordrecht, Netherlands : Springer, 2007.

[5] B.P. Kooi. *Knowledge, chance, and change*. PhD thesis, 2003.

[6] B.P. Kooi, H.P. van Ditmarsch, and W van der Hoek. *Dynamic epistemic logic with assignment*, pages 141 – 148. ACM Press, 2005.

[7] Nicolas Troquard and Philippe Balbiani. Propositional dynamic logic. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Spring 2015 edition, 2015.

[8] H.P. van Ditmarsch en B.P. Kooi. *Semantic results for ontic and epistemic change*, pages 87 – 117. Texts in Logic and Games 3.

[9] Albert Visser and Jan Broersen. Collegeslides "logic for ai". november 2014.