rijksuniversiteit
groningen

Oneindige sommen en producten

Bacheloronderzoek Wiskunde

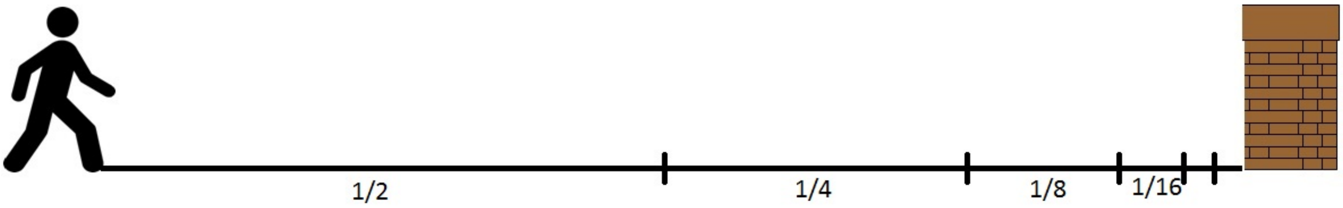
Maart 2016

Student: C.L. de Wit
Eerste Begeleider: Dr. A.E. Sterk
Tweede Begeleider: Prof. Dr. A.J. van der Schaft

Inhoudsopgave

1 Inleiding

Stel je voor dat je in een kamer staat en 1 meter verderop staat een muur. Aristoteles beweerde dat je in deze situatie nooit de muur kan bereiken. Om de muur te bereiken moet je eerst de helft van de afstand tot de muur lopen. Hierna moet je de helft van de overgebleven afstand lopen en daarna weer de helft van de overgebleven afstand. Dit proces kan altijd doorgaan en nooit gestopt worden. In de afbeelding hieronder is deze situatie uitgebeeld.



Natuurlijk weten wij dat we op een gegeven moment de muur zullen bereiken. Wanneer we alle stukjes gelopen hebben zullen we de muur bereiken. Dit roept de suggestie op dat alle delen die we lopen tezamen de totale afstand moeten zijn. We kunnen dit schrijven als de volgende formule

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

Dit kunnen we korter schrijven als

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$$

Wat deze formule wil zeggen is dat wanneer we voldoende termen van deze reeks optellen we de partiële som zo dicht bij 1 kunnen krijgen als dat we willen. [3]

Met deze reeksen moet je soms goed opletten. Om dit te laten zien kwam Euler met de volgende oneindige reeks

$$s = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$$

Wanneer we deze reeks anders schrijven, krijgen we

$$s = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots = 0 + 0 + 0 + \cdots = 0$$

Hieruit volgt dat $s = 0$. Dit lijkt duidelijk, maar wat als we de reeks nogmaals anders schrijven?

$$s = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \cdots = 1 - 0 - 0 - 0 - \cdots = 1$$

Hier zien we dat $s = 1$. We zien dat we twee antwoorden krijgen die elkaar tegenspreken. Om het nog een beetje ingewikkelder te maken staat hieronder hoe je kunt aantonen dat s de waarde van Leibniz is, namelijk $\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
2s &= 2 - 2 + 2 - 2 + \cdots \\
&= 1 + 1 - 1 - 1 + 1 + 1 - 1 - 1 + \cdots \\
&= 1 + (1 - 1) - (1 - 1) + (1 - 1) - (1 - 1) + \cdots \\
&= 1 + 0 - 0 + 0 - 0 + \cdots \\
&= 1
\end{aligned}$$

en dus

$$s = \frac{1}{2}$$

We hebben nu 3 verschillende uitkomsten voor de waarde van s. Hieruit kunnen we de conclusie trekken dat we erg voorzichtig moeten zijn als we werken met het begrip "oneindigheid".

In het voorbeeld hierboven gaat het over oneindige reeksen. Naast oneindige reeksen bestaan er ook oneidige producten. In deze scriptie is te lezen wat een oneindig product is en worden er stellingen besproken die te maken hebben met oneindige producten. Dit zijn onder andere de stellingen van Tannery die we ook zullen gaan bewijzen.

Hierna zullen we kijken naar enkele speciale gevallen. Dit zijn bekende formules met π erin en een formule met $\log(2)$. We gaan deze formules bekijken en bewijzen waarbij we meerdere malen gebruik zullen maken van de stellingen van Tannery. Als laatste gaan we kijken naar het Bazel-probleem en de oplossing hiervan.

De meeste stellingen, speciale gevallen en bewijzen die in deze scriptie voorkomen, komen uit [1].

2 Theorie

Verderop in deze scriptie gaan we bewijzen zien van verschillende formules, stellingen en lemma's. We gaan ze in paragraaf 2.1 stuk voor stuk bekijken en de meeste ook bewijzen. Naast de stellingen in dit hoofdstuk komen het vergelijkingskenmerk, de stelling van de monotone convergentie, de insluitstelling, Cauchy's criterium voor reeksen en de driehoeksongelijkheid voor in enkele bewijzen. Deze stellingen zijn na te lezen in het boek van Stephen Abbott [2]. Hiernaast komen we ook de hoofdstelling van de algebra tegen in een bewijs.

2.1 Definities en stellingen oneindige producten

Definitie 1. *Een oneindig product* $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ *kunnen we schrijven als* $lim_{k\to\infty}\left(\prod_{n=1}^{k} a_n\right)$. *Een oneindig product is dus een limiet van partiële producten.*

2.1.1 Convergentie van oneindige producten

Definitie 2. *Laat* $\{b_n\}$ *een rij van complexe getallen zijn. Een oneindig product* $\prod_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot ...$ *convergeert als er een* $m \in \mathbf{N}$ *bestaat zodanig dat alle* b_n *ongelijk aan nul zijn voor* $n \geq m$ *en de limiet van de partiële producten* $\prod_{k=m}^{n} b_k = b_m \cdot b_{m+1} \cdot ... \cdot b_n$ *bestaat en ongelijk aan nul is.*

We kunnen dan $\prod_{n=1}^{\infty} b_n := b_1 \cdot b_2 \cdot ... \cdot b_{m-1} \cdot p$ *definieëren. Deze definitie is onafhankelijk van de gekozen* m.

Het oneindige product $\prod_{n=1}^{\infty} b_n$ *divergeert als het niet convergeert.*

Om bovenstaande definities iets duidelijker te maken, volgt er nu een voorbeeld.
Voorbeeld 1. *We gaan kijken of* $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$ *convergent of divergent is. Hiervoor nemen we* $m = 2$ *in definitie 2.*

$$\begin{aligned}
\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-1}{k^2} \\
&= \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+1)}{k\cdot k} \\
&= \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\frac{4\cdot 6}{5\cdot 5}\cdot ... \cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n} \\
&= \frac{n+1}{2n} \to \frac{1}{2} \neq 0
\end{aligned}$$

Dus $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$. *Hieruit kunnen we concluderen dat dit product convergeert.*

Als een oneindige reeks absoluut convergeert, dan convergeert de reeks ook. Om te bewijzen dat ditzelfde ook geldt voor oneindige producten hebben we eerst een lemma nodig.
Lemma 1. *Laat* $\{p_k\}_{k=m}^{\infty}$, *met* $m \in \mathbf{N}$, *een rij zijn van complexe getallen.*

(a) De rij $\{p_k\}$ *convergeert dan en slechts dan als de oneindige reeks* $\sum_{k=m+1}^{\infty}(p_k - p_{k-1})$ *convergeert. In dit geval geldt dat*

$$\lim_{k\to\infty} p_k = p_m + \sum_{k=m+1}^{\infty}(p_k - p_{k-1}) \tag{1}$$

(b) Als $\{a_j\}_{j=m}^{\infty}$ *een rij van complexe getallen is en* $p_k = \prod_{j=m}^{k}(1+a_j)$, *dan*

$$|p_k - p_{k-1}| \leq |a_k|\, e^{\sum_{j=m}^{k-1}|a_j|}$$

Bewijs. We zullen eerst deel (a) van bovenstaande lemma bewijzen en vervolgens deel (b).

Voor $k \geq m$ geldt dat

$$p_k = p_m + \sum_{j=m+1}^{k} (p_j - p_{j-1}) \tag{2}$$

Hieruit volgt dat $\lim_{k\to\infty} p_k$ bestaat dan en slechts dan als $\lim_{k\to\infty} \sum_{j=m+1}^{k} (p_j - p_{j-1})$ bestaat. Gelijkheid (1) kunnen we krijgen als we k naar oneindig laten gaan in (2).

Om (b) van lemma 1 te bewijzen, moeten we opmerken dat

$$\begin{aligned} p_k - p_{k-1} &= \prod_{j=m}^{k} (1+a_j) - \prod_{j=m}^{k-1} (1+a_j) \\ &= (1+a_k) \prod_{j=m}^{k-1} (1+a_j) - \prod_{j=m}^{k-1} (1+a_j) \\ &= a_k \prod_{j=m}^{k-1} (1+a_j) \end{aligned}$$

Wegens bovenstaande kunnen we zeggen dat $|p_k - p_{k-1}| \leq |a_k| \prod_{j=m}^{k-1} (1+|a_j|)$. Omdat $1 + x \leq e^x$ geldt voor alle reële getallen x, hebben we

$$|p_k - p_{k-1}| \leq |a_k| \prod_{j=m}^{k-1} e^{|a_j|} = |a_k|\, e^{\sum_{j=m}^{k-1} |a_j|}$$

□

Stelling 1. *Een oneindig product $\prod (1+a_n)$ met $a_n \geq 0$ is convergent dan en slechts dan als $\sum a_n$ convergent is.*

Bewijs. Laat de partiële producten en partiële sommen gedefinieerd zijn als

$$p_n = \prod_{k=1}^{n} (1+a_k) \quad \text{en} \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Er geldt dat $a_k \geq 0$, dus p_n en s_n zijn niet dalend. Hieruit kunnen we concluderen, met behulp van de stelling van de monotone convergentie, dat p_n en s_n convergent zijn dan en slechts dan als ze begrensd zijn.

Er geldt dat $1 \leq 1 + x \leq e^x$ voor alle $x \geq 0$. Hieruit volgt dat

$$1 \leq p_n = \prod_{k=1}^{n} (1+a_k) \leq \prod_{k=1}^{n} e^{a_k} = e^{\sum_{k=1}^{n} a_k} = e^{s_n}$$

Met behulp van bovenstaande ongelijkheid kunnen we het volgende concluderen.
Als de rij s_n convergeert en dus begrensd is, dan is de rij p_n ook begrensd. Dit geeft ons dat p_n ook convergent is.
De limiet van p_n moet groter of gelijk zijn aan 1, dus de limiet is ongelijk aan nul. Verder geldt de ongelijkheid

$$p_n = (1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 1 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 + s_n$$

Hieruit volgt dat als p_n convergeert en dus begrensd is, dan is s_n ook begrensd. Hieruit volgt dat s_n dan ook convergent is. $\square$

Voor de volgende stelling hebben we eerst een defintie nodig.
Definitie 3. *Het product* $(1 + a_n)$ *is absoluut convergent als het product* $\prod (1 + |a_n|)$ *convergent is.*
Stelling 2. *Elk absoluut convergent oneindig product is convergent.*

Bewijs. Laat $\prod (1 + a_n)$ absoluut convergent zijn. Met behulp van stelling 1 weten we dat dit hetzelfde is als zeggen dat $\sum |a_n|$ convergeert. We gaan nu bewijzen dat $\prod (1 + a_n)$ convergeert.

De reeks $\sum |a_n|$ convergeert, dus met behulp van Cauchy's criterium voor reeksen kunnen we een m kiezen zodanig dat $\sum_{n=m}^{\infty} |a_n| < \frac{1}{2}$. Er geldt dat $|a_k| < 1$ voor $k \geq m$, dus $1 + a_k$ is ongelijk aan nul voor $k \geq m$.

Laat $p_n = \prod_{k=m}^{n} (1 + a_n)$ voor $n \geq m$. Van lemma 1(a) weten we dat $\lim p_n$ bestaat dan en slechts dan als de oneindige reeks $\sum_{k=m+1}^{\infty} (p_k - p_{k-1})$ convergeert. Van lemma 1(b) weten we dat voor $k > m$ geldt

$$|p_k - p_{k-1}| \leq |a_k| \, e^{\sum_{j=m}^{k-1} |a_j|}$$

En hieruit volgt dat

$$|p_k - p_{k-1}| < \sqrt{e} \, |a_k|$$

Omdat $\sum |a_k|$ convergeert, weten we door het vergelijkingskenmerk dat de reeks $\sum_{k=m+1}^{\infty} |p_k - p_{k-1}|$ convergeert en daarom dat $\sum_{k=m+1}^{\infty} (p_k - p_{k-1})$ convergeert. Hieruit concluderen we dat $\lim p_n$ bestaat.

Nu willen we nog bewijzen dat $\lim p_n \neq 0$. Om dit te bewijzen, gaan we door middel van inductie op n bewijzen dat

$$|p_n| = \prod_{k=m}^{n} |1 + a_k| \geq 1 - \sum_{k=m}^{n} |a_k| \tag{3}$$

Door de driehoeksongelijkheid weten we dat geldt dat

$$1 = |1 + a_m - a_m| \leq |1 + a_m| + |a_m|$$

Hieruit volgt (3) voor $n = m$.

We nemen nu aan dat (3) geldt voor een zekere $n \geq m$ en nu willen het bewijzen voor $n+1$.

$$\begin{aligned}
\prod_{k=m}^{n+1} |1 + a_k| &= |1 + a_{n+1}| \prod_{k=m}^{n} |1 + a_k| \\
&\geq (1 - |a_{n+1}|) \left(1 - \sum_{k=m}^{n} |a_k|\right) \\
&= 1 - \sum_{k=m}^{n} |a_k| - |a_{n+1}| + |a_{n+1}| \sum_{k=m}^{n} |a_k| \\
&\geq 1 - \sum_{k=m}^{n} |a_k| - |a_{n+1}|
\end{aligned}$$

En dit bewijst dat (3) ook geldt voor $n+1$.

We heben nu bewezen dat $|p_n| \geq 1 - \sum_{k=m}^{n} |a_k|$ en we weten dat $\sum_{k=m}^{n} |a_k| < \frac{1}{2}$. Hieruit kunnen we concluderen dat $\lim p_n \neq 0$ en dus is $\prod (1 + a_n)$ convergent. $\square$

Net als bij oneindige reeksen is het omgekeerde van deze stelling niet waar. Om dit te bewijzen geven we hieronder een tegenvoorbeeld.

Voorbeeld 2. *Het oneindige product* $\prod_{n=2}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ *is convergent, maar hij is niet absoluut convergent.*

2.2 De stellingen van Tannery

De stellingen van Tannery zijn geformuleerd door Jules Tannery. Hij heeft twee stellingen bewezen, één voor reeksen en één voor producten. Je kan Tannery's stelling zien als een speciaal geval van de Weierstrass M-test.[1]

Stelling 3. *(Tannery's stelling voor reeksen) Voor alle* $n \in \mathbb{N}$, *laat* $\sum_{k=1}^{m_n} a_k(n)$ *een eindige som zijn waarbij* $m_n \to \infty$ *als* $n \to \infty$. *Als voor elke* k, $lim_{n\to\infty} a_k(n)$ *bestaat en er bestaat een convergente reeks* $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ *van niet-negatieve reële getallen zodanig dat* $|a_k(n)| \leq M_k$ *voor alle* k *en* n, *dan*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} a_k(n) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_k(n)$$

wat betekent dat beide kanten welgedefinieerd zijn, dus de limieten en sommen convergeren, en gelijk zijn.

Bewijs. Neem aan dat $a_k := \lim_{n\to\infty} a_k(n)$ bestaat. Wanneer $n \to \infty$ in de ongelijkheid $|a_k(n)| \leq M_k$ hebben we dat ook geldt dat $|a_k| \leq M_k$. Met behulp van het vergelijkingskenmerk kunnen we nu zeggen dat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ convergeert.

Laat $\epsilon > 0$. Door Cauchy's criterium voor reeksen kunnen we een l nemen zodanig dat

$$M_{l+1} + M_{l+2} + \cdots < \frac{\epsilon}{3}$$

Omdat $m_n \to \infty$ als $n \to \infty$ kunnen we een N_1 kiezen zodanig dat voor alle $n > N_1$ geldt dat $m_n > l$. Uit de driehoeksongelijkheid volgt dat

$$|a_k(n) - a_k| \leq |a_k(n)| + |a_k| \leq M_k + M_k = 2M_k$$

dus voor $n > N_1$ hebben we dat

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{m_n} a_k(n) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| &= \left|\sum_{k=1}^{l} (a_k(n) - a_k) + \sum_{k=l+1}^{m_n} (a_k(n) - a_k) - \sum_{k=m_n+1}^{\infty} a_k\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{l} |a_k(n) - a_k| + \sum_{k=l+1}^{m_n} 2M_k + \sum_{k=m_n+1}^{\infty} M_k \\
&\leq \sum_{k=1}^{l} |a_k(n) - a_k| + \sum_{k=l+1}^{\infty} 2M_k \\
&< \sum_{k=1}^{l} |a_k(n) - a_k| + 2\frac{\epsilon}{3}
\end{aligned}$$

Voor elke k geldt $\lim_{n\to\infty} a_k(n) = a_k$, dus er bestaat een N zodanig dat voor elke $k = 1, 2, ..., l$ en voor $n > N$, geldt dat $|a_k(n) - a_k| < \frac{\epsilon}{3l}$. Dus als $n > N$, hebben we

$$\left|\sum_{k=1}^{m_n} a_k(n) - \sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| < \sum_{k=1}^{l} \frac{\epsilon}{3l} + 2\frac{\epsilon}{3} = \frac{\epsilon}{3} + 2\frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

En hiermee hebben we Tannery's stelling voor reeksen bewezen. $\square$

Nu kunnen we verder met Tannery's stelling voor oneindige producten.

Stelling 4. *(Tannery's stelling voor oneindige producten) Voor alle $n \in \mathbb{N}$, laat $\prod_{k=1}^{m_n}(1 + a_k(n))$ een eindig product zijn waarbij $m_n \to \infty$ als $n \to \infty$. Als voor elke k, $\lim_{n\to\infty} a_k(n)$ bestaat en er bestaat een convergente reeks $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ van niet-negatieve reeële getallen zodanig dat $|a_k(n)| \leq M_k$ voor alle k en n, dan*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{m_n} (1 + a_k(n)) = \prod_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} (1 + a_k(n))$$

wat betekent dat beide kanten welgedefinieerd zijn, dus de limieten en producten convergeren, en gelijk zijn.

Bewijs. Definieer $a_k := \lim_{n\to\infty} a_k(n)$. Wanneer we n naar oneindig laten gaan in de ongelijkheid $|a_k(n)| \leq M_k$, hebben we dat ook geldt dat $|a_k| \leq M_k$. Door middel van de het vergelijkingskenmerk kunnen we nu zeggen dat de reeks $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absoluut convergent is en dus convergent. Nu weten we met behulp van stelling 1 dat het oneindige product $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ convergent is.

Omdat $\sum M_k$ convergeert, geldt $M_n \to 0$. We kunnen hierdoor een m kiezen zodanig dat geldt dat $M_k < 1$ voor alle $k \geq m$. Dit impliceert dat $|a_k| < 1$ voor $k \geq m$, dus $1 + a_k$ is ongelijk aan nul voor $k \geq m$.

Laat

$$p(n) = \prod_{k=1}^{m_n}(1 + a_k(n))$$

en wanneer n groot genoeg is zodat geldt dat $m_n > m$, schrijven we

$$p(n) = q(n) \cdot \prod_{k=m}^{m_n}(1 + a_k(n))$$

waarin

$$q(n) = \prod_{k=1}^{m-1}(1 + a_k(n))$$

In bovenstaande gelijkheid is $q(n)$ een eindig product, dus $q(n) \to \prod_{k=1}^{m-1}(1+a_k)$ als $n \to \infty$.

We gaan nu bewijzen dat

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=m}^{m_n}(1 + a_k(n)) = \prod_{k=m}^{\infty}(1 + a_k)$$

We kijken naar de partiële producten

$$p_k(n) = \prod_{j=m}^{k}(1 + a_j(n)) \quad \text{en} \quad p_k = \prod_{j=m}^{k}(1 + a_j)$$

Dit zijn beide eindige producten. Hierdoor hebben we $p_k = \lim_{n\to\infty} p_k(n)$.

$$\prod_{j=m}^{m_n}(1 + a_j(n)) = p_{m_n}(n) = p_m(n) + \sum_{k=m+1}^{m_n}(p_k(n) - p_{k-1}(n))$$

De rechterkant van bovenstaande gelijkheid telescoopt naar $p_{m_n}(n)$ en van lemma 1(a) weten we dat

$$\prod_{j=m}^{\infty}(1 + a_j) = p_m + \sum_{k=m+1}^{\infty}(p_k - p_{k-1})$$

omdat $\prod_{j=m}^{\infty}(1+a_j) := \lim_{k\to\infty} p_k$.

Van lemma 1(b) weten we dat

$$\begin{aligned} |p_k(n) - p_{k-1}(n)| &\leq |a_k(n)|\, e^{\sum_{j=m}^{k-1}|a_j(n)|} \\ &\leq M_k e^{\sum_{j=m}^{k-1} M_j} \\ &\leq C M_k \end{aligned}$$

waarin $C = e^{\sum_{j=m}^{\infty} M_j}$.

De som $\sum_{k=m+1}^{\infty} CM_k$ convergeert, dus we weten door Tannery's stelling voor reeksen dat geldt dat

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=m+1}^{M_n} (p_k(n) - p_{k-1}(n)) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} (p_k(n) - p_{k-1}(n)) = \sum_{k=m+1}^{\infty} (p_k - p_{k-1})$$

Hierdoor krijgen we

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \prod_{j=m}^{m_n} (1 + a_j(n)) &= \lim_{n\to\infty} \left(p_m(n) + \sum_{k=m+1}^{m_n} (p_k(n) - p_{k-1}(n)) \right) \\ &= p_m + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=m+1}^{m_n} (p_k(n) - p_{k-1}(n)) \\ &= p_m + \sum_{k=m+1}^{\infty} (p_k - p_{k-1}) \\ &= \prod_{j=m}^{\infty} (1 + a_j) \end{aligned}$$

En hiermee hebben we Tannery's stelling voor oneindige producten bewezen. $\square$

3 Speciale gevallen

3.1 Producten voor π

3.1.1 Viète's formule

Het oudst bekende oneindige product en tevens het oudst bekende oneindige product dat een exacte analytische uitdrukking voor π is, is gepubliceerd in 1593. Dit oneindig product is ontdekt door François Viète en de formule is dan ook naar hem vernoemd. Viète's formule luidt:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots$$

3.1.2 Bewijs van Viète's formule

Bewijs. Voor alle $z \in \mathbb{C}$ we hebben $\sin(z) = 2\sin\left(\frac{z}{2}\right)\cos\left(\frac{z}{2}\right)$.Wanneer we deze formule delen door z krijgen we

$$\frac{\sin(z)}{z} = \cos\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \frac{\sin(z/2)}{z/2}$$

Wanneer we z in bovenstaande vergelijking vervangen door $\frac{z}{2}$, krijgen we

$$\frac{\sin(z/2)}{z/2} = \cos\left(\frac{z}{2^2}\right) \cdot \frac{\sin(z/2^2)}{z/2^2}$$

Door de vorige twee gelijkheden samen te voegen, krijgen we

$$\frac{\sin(z)}{z} = \cos\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{z}{2^2}\right) \cdot \frac{\sin(z/2^2)}{z/2^2}$$

Wanneer dit met inductie wordt voortgezet, krijgen we

$$\frac{\sin(z)}{z} = \cos\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{z}{2^2}\right) \cdot ... \cdot \cos\left(\frac{z}{2^n}\right) \cdot \frac{\sin(z/2^n)}{z/2^n} = \frac{\sin(z/2^n)}{z/2^n} \prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{z}{2^k}\right)$$

Dit is om te schrijven naar

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{z}{2^k}\right) = \frac{z/2^n}{\sin(z/2^n)} \cdot \frac{\sin(z)}{z}$$

Omdat $\lim_{n\to\infty} \frac{z/2^n}{\sin(z/2^n)} = 1$ voor alle $z \in \mathbb{C}$ krijgen we

$$\frac{\sin(z)}{z} = \prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{z}{2^n}\right) = \cos\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{z}{2^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{z}{2^3}\right) \cdot ...$$

We zien dat de rechterkant van deze formule een oneindig product is. Wanneer we in deze formule $z = \pi/2$ invullen, krijgen we

$$\frac{\sin(\pi/2)}{\pi/2} = \frac{2}{\pi} = \cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^4}\right) \cdot ... = \prod_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \tag{4}$$

Uit de formule $\cos^2(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2z)$ kunnen we halen dat $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\theta)}$. Wanneer we in deze formule θ vervangen door $\theta/2$ krijgen we

$$\cos\left(\frac{\theta}{2^2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\theta)}}$$

Wanneer we dit proces voortzetten, zien we dat

$$\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(\theta)}}}}$$

In bovenstaande gelijkheid hebben we n wortels. Wanneer we $\theta = \pi/2$ in de vergelijking invullen, krijgen we

$$\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}} \tag{5}$$

In deze vergelijking zijn er nog steeds n aantal wortels.

Uit (4) en (5) volgt de formule

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot ...$$

En dat is Viète's formule die we wilden bewijzen. □

3.1.3 Euler

Voor het volgende bekende oneindige product hebben we eerst nog wat voorkennis nodig, namelijk Euler's product voor de sinus.

Stelling 5. *(Euler's product voor de sinus) Voor alle $z \in \mathbb{C}$ geldt*

$$sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{n^2}\right)$$

3.1.4 Bewijs van Euler's product voor de sinus

Bewijs. Voor $z \in \mathbb{C}$ hebben we

$$\sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right) = \lim_{n\to\infty} F_n(z) \tag{6}$$

waarbij $F_n(z)$ het polynoom is van graad n gegeven door

$$F_n(z) = \frac{1}{2i}\left(\left(1+\frac{iz}{n}\right)^n - \left(1-\frac{iz}{n}\right)^n\right) \tag{7}$$

In het volgende lemma gaan we $F_n(z)$ in termen van de tangensfunctie schrijven.

Lemma 2. *Als $n = 2m + 1$ met $m \in \mathbb{N}$, dan geldt dat*

$$F_n(z) = z \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \tan^2(k\pi/n)}\right)$$

Bewijs. Wanneer we $z = n\tan(\theta)$ gebruiken, krijgen we

$$\begin{aligned} 1 + \frac{iz}{n} &= 1 + i\tan(\theta) \\ &= 1 + i\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \\ &= \frac{1}{\cos(\theta)}\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right) \\ &= \sec(\theta)\, e^{i\theta} \end{aligned}$$

Analoog volgt dat

$$1 - iz/n = \sec(\theta)\, e^{-i\theta}$$

En hieruit krijgen we vervolgens dat

$$\begin{aligned} F_n(n\tan(\theta)) &= \frac{1}{2i}\left(\left(1 + \frac{iz}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{iz}{n}\right)^n\right)|_{z=n\tan(\theta)} \\ &= \frac{1}{2i}\sec^n(\theta)\left(e^{in\theta} - e^{-in\theta}\right) \end{aligned}$$

Hieruit volgt dat $F_n(n\tan(\theta)) = 0$ voor $\theta = \frac{k\pi}{n}$ en dus is $F_n(z_k) = 0$ voor

$$z_k = n\tan\left(\frac{k\pi}{n}\right) = n\tan\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)$$

waar we gebruiken dat $n = 2m + 1$ zoals we in lemma 2 hebben aangenomen.

Omdat $\tan(\theta)$ strikt stijgend is in het interval $(-\pi/2, \pi/2)$ volgt dat

$$z_{-m} < z_{-m+1} < ... < z_{-1} < z_0 < z_1 < ... < z_{m-1} < z_m$$

en omdat $\tan(\theta)$ een oneven functie is, geldt dat $z_{-k} = -z_k$ voor elke k.

We hebben $2m + 1 = n$ verschillende nulpunten van $F_n(z)$ dus met behulp van de hoofdstelling van de algebra kunnen we $F_n(z)$ schrijven als

$$\begin{aligned}
F_n(z) &= a \cdot (z - z_0) \prod_{k=1}^{m} \left((z - z_k)(z - z_{-k}) \right) \\
&= a \cdot z \prod_{k=1}^{m} \left((z - z_k)(z + z_k) \right) \\
&= a \cdot z \prod_{k=1}^{m} \left(z^2 - z_k^2 \right) \\
&= a \cdot z \prod_{k=1}^{m} \left(z^2 - n^2 \tan^2 \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right) \\
&= a \cdot z \cdot \prod_{k=1}^{m} -n^2 \tan^2 \left(\frac{k\pi}{n} \right) \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \tan^2 \left(\frac{k\pi}{n} \right)} \right) \\
&= a \cdot z \cdot \prod_{k=1}^{m} \left(-n^2 \tan^2 \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right) \cdot \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \tan^2 \left(\frac{k\pi}{n} \right)} \right)
\end{aligned}$$

Het product $\prod_{k=1}^{m} \left(-n^2 \tan^2 \left(\frac{k\pi}{n} \right) \right)$ is onafhankelijk van z. Dat betekent dat we deze bij de constante a kunnen invoegen. We krijgen dat

$$F_n(z) = \tilde{a} \cdot z \cdot \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{z^2}{n^2 \tan^2 \left(\frac{k\pi}{n} \right)} \right)$$

Wanneer we de machten in gelijkheid (7) uitschrijven, zien we dat $F_n(z) = z + O(z^2)$. Dit impliceert dat $\tilde{a} = 1$ en hiermee hebben we lemma 2 bewezen. $\square$

Van lemma 2 en gelijkheid (6) weten we dat voor alle $x \in \mathbb{R}$ geldt dat

$$\frac{\sin(x)}{x} = \lim_{n \to \infty} \frac{F_n(x)}{x} = \lim_{n \to \infty} \prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \tan^2 (k\pi/n)} \right)$$

waarin we bij de limiet n beperken tot oneven natuurlijke getallen.

We weten dat $\lim_{z \to 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$ en $\cos(0) = 1$, dus

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to \infty} n^2 \tan^2 (k\pi/n) &= \lim_{n \to \infty} n^2 \frac{\sin^2 (k\pi/n)}{\cos^2 (k\pi/n)} \\
&= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{\sin (k\pi/n)}{1/n} \cdot \frac{1}{\cos (k\pi/n)} \right)^2 \\
&= \lim_{n \to \infty} (k\pi)^2 \left(\frac{\sin (k\pi/n)}{k\pi/n} \cdot \frac{1}{\cos (k\pi/n)} \right)^2 \\
&= k^2 \pi^2
\end{aligned}$$

Hieruit halen we dat
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\tan^2(k\pi/n)}\right)=1-\frac{x^2}{k^2\pi^2} \tag{8}$$
Vanuit (8) kunnen we het volgende verkrijgen

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x)}{x}&=\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(1-\frac{x^2}{n^2\tan^2(k\pi/n)}\right)\\&=\prod_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\tan^2(k\pi/n)}\right)\\&=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\end{aligned}$$

En hier zien we Euler's product voor de sinus. □

Er is echter één "maar" in dit verhaal. In ons bewijs hebben we de volgende gelijkheid gebruikt
$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}}\left(1-\frac{x^2}{n^2\tan^2(k\pi/n)}\right)=\prod_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\tan^2(k\pi/n)}\right) \tag{9}$$
zonder dat we deze gelijkheid bewezen hebben.

In hoofdstuk 2.2 hebben we gekeken naar de stellingen van Tannery. Tannery's stelling voor oneindige producten, stelling 4, kunnen we gebruiken om te laten zien dat (9) inderdaad geldig is.

Bewijs. Uit (6) en lemma 2 weten we dat voor alle $z\in\mathbb{C}$ geldt dat

$$\sin(z)=\lim_{n\to\infty}F_n(z)$$

waarin $n=2m+1$ een oneven getal is en $F_n(z)=z\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{z^2}{n^2\tan^2(k\pi/n)}\right)$.

We hebben

$$\sin(z)=\lim_{m\to\infty}z\prod_{k=1}^{m}\left(1-\frac{z^2}{n^2\tan^2(k\pi/n)}\right)=\lim_{m\to\infty}z\prod_{k=1}^{m}(1+a_k(m))$$

waar $a_k(m)=-\frac{z^2}{n^2\tan^2(k\pi/n)}$ met $n=2m+1$.

Omdat $\lim_{z\to 0} \frac{\tan(z)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z} \cdot \frac{1}{\cos(z)} = 1$, zien we dat

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} a_k(m) &= \lim_{m\to\infty} -\frac{z^2}{(2m+1)^2 \tan^2(k\pi/(2m+1))} \\
&= \lim_{m\to\infty} -\frac{z^2}{k^2\pi^2 \left(\frac{\tan(k\pi/(2m+1))}{k\pi/(2m+1)}\right)^2} \\
&= -\frac{z^2}{k^2\pi^2}
\end{aligned}$$

In hoofdstuk 3.3 gaan we een lemma behandelen die zegt dat voor $0 < x < \frac{\pi}{2}$ geldt dat $\sin(x) < x < \tan(x)$. Het bewijs van dit lemma zien we in hoofdstuk 3.3, maar we gaan nu alvast gebruiken dat $x < \tan(x)$ voor $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Wanneer $n = 2m+1$ en $1 \le k \le m$ dan geldt voor alle $z \in \mathbb{C}$ dat

$$\left|\frac{z^2}{n^2\tan^2(k\pi/n)}\right| \le \frac{|z|^2}{n^2(k\pi)^2/n^2} = \frac{|z|^2}{k^2\pi^2} =: M_k$$

Dus voor alle k en m hebben we dat $|a_k(m)| \le M_k$. Omdat $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ convergeert, hebben we met behulp van Tannery's stelling voor oneindige producten dat

$$\begin{aligned}
\sin(z) &= \lim_{m\to\infty} z \prod_{k=1}^{m} (1 + a_k(m)) \\
&= z \prod_{k=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} (1 + a_k(m)) \\
&= z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{k^2\pi^2}\right)
\end{aligned}$$

Wanneer we z vervangen door πz, krijgen we Euler's product voor de sinus. Hiermee hebben we stelling 5, Euler's product voor de sinus, bewezen. $\square$

3.1.5 Wallis' formule

Het tweede bekende oneindige product komt van de wiskundige John Wallis. Wallis' formule luidt als volgt

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots$$

De formule van Wallis is een toepassing van Euler's product voor de sinus. [1]

3.1.6 Bewijs van Wallis' formule

Bewijs. Om de formule van Wallis af te leiden, kijken we nogmaals naar Euler's product voor de sinus.

$$\sin(x) = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right)$$

Wanneer we in dit product x vervangen door $\frac{\pi}{2}$ krijgen we

$$1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2 n^2}\right)$$

Omdat

$$1 - \frac{1}{2^2 n^2} = \frac{2^2 n^2 - 1}{2^2 n^2} = \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)(2n)}$$

zien we dat

$$1 = \frac{\pi}{2} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)(2n)}$$

en hieruit volgt dat

$$\frac{2}{\pi} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n)(2n)}$$

Dit kunnen we vervolgens omschrijven naar Wallis' formule

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}$$

$\square$

3.1.7 Gregory-Leibniz-Madhava formule

De Gregory-Leibniz-Madhava formule ziet er als volgt uit

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \ldots$$

Deze formule wordt ook wel Leibniz's reeks genoemd. Deze reeks is vernoemd naar Gottfried Leibniz. Hij wordt meestal genoemd als diegene die deze reeks als eerste op papier heeft gezet, ondanks dat James Gregory deze reeks waarschijnlijk ook al kende.

Echter de wiskundige en tevens astronoom Madhava of Sangamagramma heeft deze reeks al 200 jaar eerder ontdekt voor Leibniz en Gregory.

3.1.8 Bewijs van de Gregory-Leibniz-Madhava formule

De Gregory-Leibniz-Madhava formule is redelijk snel te bewijzen met behulp van de Taylor reeks voor de arctangens. Het bewijs dat hieronder wordt gegeven berust niet op de Taylor reeks voor de arctangens, maar er wordt gebruik gemaakt van de stellingen van Tannery. Dit is de reden dat het hieronder gegeven bewijs aan de lange kant is.

Bewijs. We beginnen het bewijs met de dubbele hoek formule

$$2\cot(2z) = 2\frac{\cos(2z)}{\sin(2z)} = \frac{\cos^2(z) - \sin^2(z)}{\cos(z)\sin(z)} = \cot(z) - \tan(z)$$

Hieruit kunnen we halen dat

$$\cot(2z) = \frac{1}{2}(\cot(z) - \tan(z))$$

Omdat $\tan(z) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$ krijgen we

$$\cot(2z) = \frac{1}{2}\left(\cot(z) - \cot\left(\frac{\pi}{2} - z\right)\right)$$

Wanneer we in bovenstaande gelijkheid z vervangen door $\pi z/2$, zien we dat geldt dat

$$\cot(\pi z) = \frac{1}{2}\left(\cot\left(\frac{\pi z}{2}\right) - \cot\left(\frac{(1-z)\pi}{2}\right)\right) \tag{10}$$

Laat $z = 1/4$ en dan zien we dat

$$1 = \frac{1}{2}\left(\cot\left(\frac{\pi}{2^3}\right) - \cot\left(\frac{3\pi}{2^3}\right)\right)$$

Wanneer we (10) toepassen op de bovenstaande termen $\cot(\pi/2^3)$ en $\cot(3\pi/2^3)$ krijgen we

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\cot\left(\frac{\pi}{2^4}\right) - \cot\left(\frac{7\pi}{2^4}\right)\right) - \frac{1}{2}\left(\cot\left(\frac{3\pi}{2^4}\right) - \cot\left(\frac{5\pi}{2^4}\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{2^2}\left(\cot\left(\frac{\pi}{2^4}\right) - \cot\left(\frac{3\pi}{2^4}\right) + \cot\left(\frac{5\pi}{2^4}\right) - \cot\left(\frac{7\pi}{2^4}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2^2}\sum_{k=0}^{1}\left(\cot\left(\frac{(4k+1)\pi}{2^4}\right) - \cot\left(\frac{(4k+3)\pi}{2^4}\right)\right)
\end{aligned}$$

Wanneer dit met inductie wordt voortgezet, krijgen we

$$1 = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\left(\cot\left(\frac{(4k+1)\pi}{2^{n+2}}\right) - \cot\left(\frac{(4k+3)\pi}{2^{n+2}}\right)\right) \tag{11}$$

Voor alle $z, w \in \mathbb{C}$ en geen gehele veelvouden van π, hebben we

$$\begin{aligned}\cot(z) - \cot(w) &= \frac{\cos(z)}{\sin(z)} - \frac{\cos(w)}{\sin(w)} \\ &= \frac{\sin(w)\cos(z) - \cos(w)\sin(z)}{\sin(z)\sin(w)} \\ &= \frac{\sin(w-z)}{\sin(z)\sin(w)}\end{aligned}$$

Wanneer we bovenstaande gebruiken in (11) krijgen we

$$1 = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\sin\left(\frac{(4k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)\cdot\sin\left(\frac{(4k+3)\pi}{2^{n+2}}\right)} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} a_k(n) \tag{12}$$

Waarin

$$a_k(n) = \frac{1}{2^n}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\sin\left(\frac{(4k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)\cdot\sin\left(\frac{(4k+3)\pi}{2^{n+2}}\right)}$$

Het idee om Gregory-Leibniz-Madhava's formule hieruit af te leiden, is om n naar oneindig te laten gaan en Tannery's stelling te gebruiken. Hiervoor gaan we eerst bekijken of we aan de voorwaarden voor de stelling van Tannery voldoen.

Ten eerste willen we $\lim_{n\to\infty} a_k(n)$ bepalen.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^n}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\sin\left(\frac{(4k+1)\pi}{4\cdot 2^n}\right)\cdot\sin\left(\frac{(4k+3)\pi}{4\cdot 2^n}\right)} &= 2^3\frac{2^{n+1}}{2^{n+2}\cdot 2^{n+2}}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\sin\left(\frac{(4k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)\sin\left(\frac{(4k+3)\pi}{2^{n+2}}\right)} \\ &= \frac{8}{\pi(4k+1)(4k+3)}\frac{\frac{2^{n+1}}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)}{\left(\frac{2^{n+2}}{(4k+1)\pi}\sin\left(\frac{(4k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)\right)\left(\frac{2^{n+2}}{(4k+3)\pi}\sin\left(\frac{(4k+3)\pi}{2^{n+2}}\right)\right)}\end{aligned}$$

Omdat $\lim_{z\to\infty}\frac{\sin(z)}{z} = 1$ hebben we dat geldt dat

$$\lim_{n\to\infty} a_k(n) = \frac{8}{\pi(4k+1)(4k+3)}$$

Om de andere voorwaarden van Tannery's stelling te verifiëren, hebben we een lemma nodig

Lemma 3. *Als* $|z| \le 1$ *dan geldt dat* $|\sin(z)| \le \frac{6}{5}|z|$

Bewijs. Voor $|z| \le 1$ geldt dat $|z|^k \le |z|$ voor alle $k \in \mathbb{N}$. Ook geldt dat

$$(2n+1)! = (2\cdot 3)(4\cdot 5)\ldots(2n(2n+1)) \le (2\cdot 3)(2\cdot 3)\ldots(2\cdot 3) = (2\cdot 3)^n = 6^n$$

Hieruit kunnen we halen dat

$$\begin{aligned}
|\sin(z)| &= \left|\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|}{6^n} \\
&= |z| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{6^n} \\
&= \frac{1}{1-\frac{1}{6}} |z| \\
&= \frac{6}{5} |z|
\end{aligned}$$

□

Omdat $0 < \frac{\pi}{2^{n+1}} \leq 1$ voor $n \in \mathbb{N}$ zien we met behulp van lemma (3) dat

$$\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) \leq \frac{6}{5} \frac{\pi}{2^{n+1}} \tag{13}$$

Voor $0 \leq k \leq 2^{n-1} - 1$ en $0 \leq l \leq 4$ geldt dat

$$\frac{(4k+l)\pi}{2^{n+2}} \leq \frac{(4(2^{n-1}-1)+l)\pi}{2^{n+2}} = \frac{(2^{n+1}-4+l)\pi}{2^{n+2}} \leq \frac{\pi}{2}$$

Er geldt dat $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x)$ voor alle $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Hierdoor krijgen we

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{(4k+l)\pi}{2^{n+2}} \leq \sin\left(\frac{(4k+l)\pi}{2^{n+2}}\right)$$

Waaruit volgt dat

$$\frac{1}{\sin\left(\frac{(4k+l)\pi}{2^{n+2}}\right)} \leq \frac{\pi}{2} \frac{2^{n+2}}{(4k+l)\pi}$$

Wanneer we bovenstaande combineren met (13) zien we dat voor $0 \leq k \leq 2^{n-1} - 1$ geldt dat

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2^n} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}{\sin\left(\frac{(4k+1)\pi}{2^{n+2}}\right)\sin\left(\frac{(4k+3)\pi}{2^{n+2}}\right)} &\leq \frac{1}{2^n}\left(\frac{6}{5} \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}}\right)\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2^{n+2}}{(4k+1)\pi}\right)\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{2^{n+2}}{(4k+3)\pi}\right) \\
&= \frac{6}{5} \cdot \frac{2\pi}{(4k+1)(4k+3)}
\end{aligned}$$

Het volgt dat voor alle k en n we hebben dat

$$|a_k(n)| \leq \frac{6}{5} \cdot \frac{2\pi}{(4k+1)(4k+3)} =: M_k$$

Omdat $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ convergeert, hebben we de aannames van de stelling van Tannery geverifieerd.

Wanneer we n naar oneindig laten gaan in (12), krijgen we

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} a_k(n) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_k(n) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi(4k+1)(4k+3)} \end{aligned}$$

Waaruit volgt dat

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{(4k+1)(4k+3)}$$

Deze laatste reeks is gelijk aan de Gregory-Leibniz-Madhava formule. Wanneer we partiële breuken gebruiken, zien we dat

$$\frac{2}{(4k+1)(4k+3)} = \frac{1}{(4k+1)} - \frac{1}{(4k+3)}$$

Wanneer we de reeks term voor term uitschrijven, krijgen we

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(4k+1)} - \frac{1}{(4k+3)} \right) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + ...$$

En hier zien we de Gregory-Leibniz-Madhava formule. $\square$

3.2 Nog een bekende formule

3.2.1 Seidels's formule voor log(2)

Er bestaat nog een bekende formule die ons kan doen denken aan de formule van Viète. Deze formule is ontdekt door Philipp Ludwig von Seidel en luidt als volgt

$$\log(2) = \frac{2}{1+\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{1+\sqrt{\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{1+\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}} \cdot \frac{2}{1+\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}} \cdot ...$$

Bovenstaande formule wordt ook wel Seidel's formule voor $\log(2)$ genoemd.

3.2.2 Bewijs voor Seidel's formule voor log(2)

Bewijs. Om Seidel's formule te bewijzen, volgen we het bewijs dat eerder is gegeven voor Viète's formule. Het verschil is dat we hier hyperbolische functies gebruiken in plaats van goniometrische functies.

We kijken in dit bewijs naar een reële x die ongelijk is aan 0. Vanuit de functies voor de sinus hyperbolicus en de cosinus hyperbolicus

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{14}$$

kunnen we de volgende formule afleiden.

$$\sinh(x) = 2\cosh\left(\frac{x}{2}\right)\sinh\left(\frac{x}{2}\right)$$

Wanneer we bovenstaande formule delen door x, zien we dat

$$\frac{\sinh(x)}{x} = \cosh\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{\sinh(x/2)}{x/2} \tag{15}$$

De volgende formule hebben we verkregen door x te vervangen door $\frac{x}{2}$

$$\frac{\sinh(x/2)}{x/2} = \cosh\left(\frac{x}{2^2}\right) \cdot \frac{\sinh(x/2^2)}{x/2^2} \tag{16}$$

Door de gelijkheden (15) en (16) te combineren, zien we dat

$$\frac{\sinh(x)}{x} = \cosh\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cosh\left(\frac{x}{2^2}\right) \cdot \frac{\sinh(x/2^2)}{x/2^2}$$

Als dit met inductie wordt voortgezet, krijgen we

$$\frac{\sinh(x)}{x} = \frac{\sinh(x/2^n)}{x/2^n} \prod_{k=1}^{n} \cosh\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

Omdat $\lim_{z\to 0} \frac{\sinh(z)}{z} = 1$ krijgen we $\lim_{n\to\infty} \frac{\sinh(x/2^n)}{x/2^n} = 1$. Wanneer we n naar oneindig laten lopen, krijgen we

$$\frac{x}{\sinh(x)} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\cosh(x/2^k)} \tag{17}$$

Voor het volgende deel van het bewijs hebben we opnieuw de hyperbolische functies (14) nodig. Wanneer we $x = \log(\theta)$ invullen in (14), en dus $\theta = e^x$, invullen, kunnen we de volgende formules verkrijgen.

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{\theta - \theta^{-1}}{2} = \frac{\theta^2 - 1}{2\theta}$$

$$\cosh\left(\frac{x}{2^k}\right) = \frac{e^{x/2^k}+e^{-x/2^k}}{2} = \frac{\theta^{1/2^k}+\theta^{-1/2^k}}{2} = \frac{\theta^{1/2^{k-1}}+1}{2\theta^{1/2^k}}$$

Uit bovenstaande formules kunnen we de volgende formules halen

$$\frac{x}{\sinh(x)} = \frac{2\theta\log(\theta)}{(\theta-1)(\theta+1)} \qquad \text{en} \qquad \frac{1}{\cosh(x/2^k)} = \frac{2\theta^{1/2^k}}{\theta^{1/2^{k-1}}+1} \tag{18}$$

Wanneer we de gelijkheden (17) en (18) combineren, zien we dat

$$\begin{aligned}
\frac{2\theta\log(\theta)}{(\theta-1)(\theta+1)} &= \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\frac{2\theta^{1/2^k}}{\theta^{1/2^{k-1}}+1} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\prod_{k=1}^{n}\theta^{1/2^k}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{2}{\theta^{1/2^{k-1}}+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\theta^{\sum\frac{1}{2^k}}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{2}{\theta^{1/2^{k-1}}+1}\right)
\end{aligned}$$

We weten dat $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}=1$, en daarom kunnen we schrijven

$$\begin{aligned}
\frac{2\theta\log(\theta)}{(\theta-1)(\theta+1)} &= \theta\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n-1}\frac{2}{\theta^{1/2^k}+1} \\
&= \frac{2\theta}{\theta+1}\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{2}{\theta^{1/2^k}+1}
\end{aligned}$$

Na vermeningvuldiging met $\theta+1$ houden we de volgende formule over

$$\frac{\log(\theta)}{\theta-1} = \prod_{k=1}^{\infty}\frac{2}{1+\theta^{1/2^k}} = \frac{2}{1+\sqrt{\theta}}\cdot\frac{2}{1+\sqrt{\sqrt{\theta}}}\cdot\frac{2}{1+\sqrt{\sqrt{\sqrt{\theta}}}}\cdot\frac{2}{1+\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\theta}}}}}\cdot\ldots$$

Bovenstaande formule wordt ook wel Seidel's formule genoemd. Wanneer we Seidel's formule voor $\log(2)$ willen verkrijgen, vervangen we θ door 2

$$\log(2) = \frac{2}{1+\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{1+\sqrt{\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{1+\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}\cdot\frac{2}{1+\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}}\cdot\ldots$$

□

3.3 Het Bazel-probleem

Het Bazel-probleem draait om het vinden van de exacte waarde van

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

3.3.1 Oplossing van Euler

Het eerste antwoord op het Bazel-probleem is gegeven door Euler in 1734. Het antwoord op dit probleem is namelijk $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Euler heeft in totaal drie verschillende bewijzen gegeven voor zijn antwoord. Eén daarvan is het volgende.

Bewijs. We kijken opnieuw naar Euler's product voor de sinus

$$\frac{\sin(x)}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{1^2\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2^2\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{3^2\pi^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{4^2\pi^2}\right) \cdot ...$$

De rechterkant van deze formule kunnen we schrijven als

$$1 - \frac{x^2}{\pi^2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + ...\right) + ...$$

Op de plaatsen van de puntjes "..." horen machten van x van 4 of hoger. Vervolgens krijgen we

$$\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}\zeta(2) + ...$$

Wanneer we de machtreeks van sinus, $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + ...$, delen door x krijgen we

$$1 - \frac{x^2}{3!} + ... = 1 - \frac{x^2}{\pi^2}\zeta(2) + ...$$

Door omschrijven van deze vergelijking krijgen we

$$\frac{1}{3!} = \frac{\zeta(2)}{\pi^2}$$

en dat geeft ons

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{3!} = \frac{\pi^2}{6}$$

□

Wanneer we kijken naar de huidige maatstaven die worden gebruikt in de wiskunde is dit geen echt bewijs. In de volgende paragraaf zullen we bewijzen dat deze oplossing van Euler juist is.

3.3.2 Bewijs oplossing van Euler

Bewijs. In dit bewijs kijken we naar alle niet gehele getallen $z \in \mathbb{C}$. Uit de goniometrische formule $\sin(2z) = 2\sin(z)\cos(z)$ kunnen we halen dat geldt dat $\sin^2(z) = 4\sin^2(z/2)\cos^2(z/2)$.

Ook weten we dat geldt dat $\cos(z) = \sin(\pi/2 - z)$. Uit deze twee gegevens kunnen we de volgende gelijkheid verkrijgen

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin^2(z)} &= \frac{1}{4\sin^2(z/2)\cos^2(z/2)} \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2(z/2)} + \frac{1}{\cos^2(z/2)}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2(z/2)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi-z}{2}\right)}\right)\end{aligned}$$

Wanneer we in bovenstaande gelijkheid z vervangen door πz krijgen we

$$\frac{1}{\sin^2(\pi z)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{z\pi}{2}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(1-z)\pi}{2}\right)}\right) \tag{19}$$

Wanneer we vervolgens z gelijkstellen aan $1/2$ zien we dat

$$1 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2^2}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2^2}\right)}\right) = \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2^2}\right)}$$

Wanneer we aan de rechterkant van bovenstaande gelijkheid de gelijkheid (19) gebruiken, met $z = \frac{1}{2^2}$, zien we dat

$$1 = \frac{2}{4^2}\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2^3}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2^3}\right)}\right) = \frac{2}{4^2}\sum_{k=0}^{1}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^3}\right)}$$

Door nog een keer gebruik te maken van (19) voor de termen $\frac{1}{\sin^2(\pi/2^3)}$ en $\frac{1}{\sin^2(3\pi/2^3)}$ krijgen we

$$\begin{aligned}1 &= \frac{2}{4^2}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2^4}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{7\pi}{2^4}\right)}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2^4}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{5\pi}{2^4}\right)}\right)\right) \\ &= \frac{2}{4^3}\left(\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2^4}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{3\pi}{2^4}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{5\pi}{2^4}\right)} + \frac{1}{\sin^2\left(\frac{7\pi}{2^4}\right)}\right) \\ &= \frac{2}{4^3}\sum_{k=0}^{3}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^4}\right)}\end{aligned}$$

Wanneer we deze inductie voortzetten, krijgen we het volgende lemma

Lemma 4. *Voor alle $n \in \mathbb{N}$ geldt dat*

$$1 = \frac{2}{4^n}\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)}$$

Om ons bewijs af te kunnen maken, hebben we nog twee andere lemma's nodig.

Lemma 5. *Voor* $0 < x < \frac{\pi}{2}$ *geldt dat* $sin\,(x) < x < tan\,(x)$*.*

Bewijs. Om lemma 5 te bewijzen, gaan we eerst bewijzen dat $\sin(x) < x$ voor $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Wanneer we dit hebben bewezen, weten we ook dat $\sin(x) < x$ voor alle $x > 0$. Dit kunnen we stellen, omdat x toeneemt en $\sin(x)$ oscilleert.

Wanneer we de machtreeks van sinus gebruiken en we weten dat $\sin(x) < x$ gelijk staat aan $-x < -\sin(x)$, zien we dat geldt dat

$$-x < -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} - \frac{x^9}{9!} + ...$$

Dit is equivalent met

$$\frac{x^3}{3!}\left(1 - \frac{x^2}{4 \cdot 5}\right) + \frac{x^7}{7!}\left(1 - \frac{x^2}{8 \cdot 9}\right) + ... > 0$$

Wanneer $0 < x < 2$ zijn alle termen die binnen de haakjes staan positief. Hieruit kunnen we concluderen dat bovenstaande uitdrukking positief is voor $0 < x < \frac{\pi}{2}$. We hebben nu bewezen dat $\sin(x) < x$ voor $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Ten tweede willen we bewijzen dat $x < \tan(x)$ voor $0 < x < \frac{\pi}{2}$. We weten dat $x < \tan(x)$ gelijk is aan $x\cos(x) < \sin(x)$.

Door de machtreeks van sinus en cosinus te substitueren in $x\cos(x) < \sin(x)$ krijgen we de volgende ongelijkheid

$$x - \frac{x^3}{2!} + \frac{x^5}{4!} - \frac{x^7}{6!} + ... < x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

Deze ongelijkheid kunnen we omschrijven naar

$$x^3\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) - x^5\left(\frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right) + x^7\left(\frac{1}{6!} - \frac{1}{7!}\right) - x^9\left(\frac{1}{8!} - \frac{1}{9!}\right) + ... > 0$$

De linkerkant van de bovenstaande vergelijking is een som van de termen van de vorm

$$x^{2k-1}\left(\frac{1}{(2k-2)!} - \frac{1}{(2k-1)!}\right) - x^{2k+1}\left(\frac{1}{(2k)!} - \frac{1}{(2k+1)!}\right), \quad k = 2, 4, 6, ... \tag{20}$$

Deze termen zijn positief voor $0 < x < 3$. Hieruit kunnen we concluderen dat
$x\cos(x) < \sin(x)$ geldt voor $0 < x < 3$ en dus ook voor $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

De formule (20) is positief dan en slechts dan als

$$x^2 < \frac{\frac{1}{(2k-2)!} - \frac{1}{(2k-1)!}}{\frac{1}{(2k)!} - \frac{1}{(2k+1)!}} = (2k+1)(2k-2), \quad k = 2, 4, 6, ...$$

De rechterkant van deze ongelijkheid is het kleinst voor $k = 2$. Hierdoor kunnen we stellen dat deze ongelijkheid waar is voor $0 < x < 3$ en dus ook voor $0 < x < \frac{\pi}{2}$. We hebben nu bewezen dat $x < \tan(x)$ voor $0 < x < \frac{\pi}{2}$ en hiermee is ons bewijs voor lemma 5 afgerond. □

Lemma 5 hebben we nodig om het volgende lemma te kunnen bewijzen.

Lemma 6. *Voor* $0 < x < \frac{\pi}{2}$ *geldt dat*

$$-1 + \frac{1}{\sin^2(x)} < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2(x)}$$

Bewijs. Van lemma 5 weten we dat geldt $\sin(x) < x < \tan(x)$ voor $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Wanneer we in deze formule de reciproque functies van de sinus toepassen, krijgen we $\cot^2(x) < x^{-2} < \sin^{-2}(x)$ voor $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

Omdat $\cot^2(x) = \cos^2(x) / \sin^2(x) = \sin^{-2}(x) - 1$ kunnen we concluderen dat

$$\sin^{-2}(x) - 1 < x^{-2} < \sin^{-2}(x)$$

Hiermee hebben we lemma 6 bewezen. □

Voor $0 \leq k \leq 2^{n-1} - 1$ hebben we

$$\begin{aligned} \frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}} &\leq \frac{(2(2^{n-1}-1)+1)\pi}{2^{n+1}} \\ &= \frac{(2^n - 1)\pi}{2^{n+1}} \\ &< \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Wanneer we nu lemma 6 toepassen, zien we dat

$$\begin{aligned} -2^{n-1} + \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} &< \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)^2} \\ &< \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(2k+1)\pi}{2^{n+1}}\right)} \end{aligned}$$

Wanneer we beide kanten van bovenstaande ongelijkheid vermeningvuldigen met $2/4^n$ en lemma 4 gebruiken, krijgen we

$$-\frac{1}{2^n} + 1 < \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{(2k'+1)^2} < 1$$

Wanneer we n naar oneindig laten gaan en de insluitstelling gebruiken, kunnen we concluderen dat geldt dat

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Wanneer we nu gaan sommeren over even en oneven getallen, krijgen we

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

En hieruit volgt dat

$$\frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Wanneer we dit oplossen voor $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ krijgen we Euler's formule

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ...$$

$\square$

4 Conclusie

In deze scriptie hebben we gekeken naar oneindige sommen en producten. We hebben gekeken naar wat oneindige producten zijn en wanneer deze convergeren en absoluut convergeren. Hiernaast hebben we gekeken naar de stellingen van Tannery en in hoofdstuk 3 hebben we gekeken naar een aantal speciale gevallen. Wat hierbij opvalt is dat de stellingen van Tannery meerdere keren gebruikt kunnen worden om speciale gevallen te bewijzen. In het geval van de Gregory-Leibniz-Madhava formule hebben we gezien dat de stellingen van Tannery niet altijd nodig zijn om iets te bewijzen, maar dat het wel zou kunnen wanneer je geen problemen hebt met een wat langer bewijs.

Nog iets dat opvalt is dat veel bewijzen op dezelfde manier gaan. We hebben vaak gezien dat een bewijs begint met een welbekende formule, zoals een dubbele hoek formule of een andere formule met de sinus of de cosinus, en vervolgens door middel van inductie een vergelijking wordt verkregen. Vanuit deze vergelijking volgt, na nog enkele andere stappen, het gevraagde speciale geval.

Als laatste hebben we gekeken naar het Basel-probleem. We hebben hierbij het bewijs van Euler bekeken. Aangezien het bewijs van Euler in de hedendaagse wiskunde geen geldig bewijs is, hebben we door middel van een ander bewijs laten zien dat Euler gelijk had en zijn antwoord op het Basel-probleem dus juist is.

Referenties

[1] Paul Loya, *Amazing and Aesthetic Aspects of Analysis: On the incredible infinite*. 2006.

[2] Stephen Abbott, *Understandig analysis*. Springer, 2001

[3] James Stewart, *Calculus Early Transcendentals*, International edition, 7th edition, Brooks/Cole CENGAGA learning,2012