university of groningen

faculty of science and engineering

science education and communication

Het onderwijs over en de leerresultaten van machten en exponenten in de onderbouw van vwo

Betawetenschappelijk onderzoek

Maart 2021

Student: T. Reitsma

Eerste begeleider: Prof.dr. M.J. Goedhart

Tweede begeleider: Dr. A.E. Sterk

Inhoudsopgave

1 Introductie

In veel vakgebieden is het onderwerp exponentiële groei wel terug te vinden: in de economie met rente, in de natuurkunde met radioactief verval, in de biologie met toe- of afname van bacteriën of virussen en in de aardrijkskunde met populatiegroei of -afname.

Aan de basis van exponentiële groei staat machtsverheffen, een onderwerp dat ook ik als beginnend leraar aan een tweede klas gymnasium moest uitleggen. Wat mij opviel bij deze klas was dat de leerlingen dit onderwerp erg lastig vonden. Veel fouten werden er gemaakt, ook tijdens de toets.

Maar wat was nu de oorzaak van deze fouten? Hadden de leerlingen te weinig inzet getoond? Of was het onderwerp niet genoeg of misschien wel verkeerd uitgelegd? Om een antwoord op deze vragen te krijgen, ben ik begonnen aan dit onderzoek.

In dit onderzoek zal onderzocht worden wat de huidige staat van het onderwijs in machten en exponenten is. Hierbij zal het onderzoek zich voornamelijk richten op de onderbouw van havo en vwo, waarbij een derde klas vwo ook gebruikt zal worden als onderzoeksgroep.

In dit onderzoek zal ingegaan worden op de vraag welke fouten leerlingen maken bij dit onderwerp bij de eerder genoemde vwo-klas en welke fouten leraren van de onderbouw havo en vwo tegenkomen bij hun leerlingen.

Daarnaast zal ook onderzocht worden op welke manier dit onderwerp uitgelegd wordt aan de leerlingen. Welke didactiek gebruiken de leraren? En in hoeverre is hun uitleg gebaseerd op het lesboek? Ook zal er aandacht zijn voor de manier waarop leraren dagelijkse voorbeelden gebruiken om dit onderwerp de leerlingen uit te leggen.

Omdat uit onderzoek is gebleken dat veel leraren gebruik maken van het lesboek (Olsen et al., 2008), waarbij het lesboek ook vaak als leidend beschouwd wordt, zal ook een lesboek-analyse gedaan worden. In deze analyse zal ingegaan worden op hoe dit onderwerp geïntroduceerd wordt en welke onderwerpen aan bod komen, ook in welke volgorde. Daarnaast zullen de opgaven onderzocht worden. Op welke manier oefenen leerlingen? En worden leerlingen ook gedwongen om goed na te denken over de structuur van exponentiële groei?

Voordat dit onderzoek echter uitgevoerd zal worden, zal eerst gekeken worden wat er in de vakliteratuur over dit onderwerp bekend is. Zijn er volgens deze onderzoeken ook zoveel fouten bij leerlingen? En wat is de reden volgens deze onderzoeken?

Ook zullen de verschillende didactische benaderingen onderzocht worden die in de vakliteratuur beschreven zijn. Hierbij zal ook ingegaan worden op wat de voor- en nadelen van deze manieren van uitleg zijn.

2 Literatuuronderzoek

In het literatuuronderzoek zal ingegaan worden op de verschillende fouten die leerlingen maken. Daarna zal ook ingegaan worden op de manieren van uitleg die in de literatuur besproken worden. Hierbij zullen bij een aantal van deze manieren ook onderzoeken aangehaald worden, waarbij deze manieren zijn getest.

Voordat hierop ingegaan zal worden, zullen eerst een aantal cognitieve benaderingen bij het leren van machten en exponenten. Dit zal gebruikt worden bij de analyse in het literatuuronderzoek van de fouten die leerlingen maken en bij de verschillende manieren van uitleg.

2.1 Cognitieve benaderingen

Voor dit gedeelte van het verslag is voornamelijk het boek "The second handbook of research on the psychology of mathematics education: The journey continues" van Gutiérrez et al. (2016) gebruikt. In dit boek zijn onder andere theorieën beschreven hoe leerlingen wiskunde leren. Verschillende van deze theorieën zullen nu besproken worden. Er zal worden ingegaan op de volgende theorieën:

- Concept-beeld en concept-definitie
- Proces en object (APOS)
- Variatie en covariatie
- Semiotiek

2.1.1 Concept-beeld en concept-definitie

Vaak wordt in de wiskunde gebruik gemaakt van een definitie om een concept te beschrijven. Daarnaast worden vaak veel voorbeelden gebruikt. Daarnaast zijn er vaak verschillende plaatsen waar een concept wordt gebruikt. Het eerstgenoemde wordt ook wel een concept-definitie genoemd, een regel die wordt gebruikt om een concept te specificeren. De voorbeelden en verschillende manieren van gebruik van het concept maakt deel uit van het concept-beeld: "de totale cognitieve structuur die geassocieerd wordt met een concept, waarbij alle mentale beelden en bijbehorende eigenschappen en processen omvat worden" (vertaald uit het artikel van Tall & Vinner (1981, p. 152)).

Tall & Vinner (1981) bespreken het concept van formules. De volgende definitie kan hiervoor gegeven worden: "Een formule is een relatie tussen twee sets A en B waarbij elke waarde in A precies met 1 waarde uit B gerelateerd is". Maar leerlingen die dit onderwerp hebben gehad, zullen mogelijk deze definitie niet meer kennen. Andere beelden die hierbij aan de orde komen, zullen hier wel mee geassocieerd kunnen worden: een grafiek, een tabel met waarden of een actie die een getal a naar $f(a)$ verwijst.

Het kan echter zijn dat concept-beeld en concept-definitie niet overeen komen of elkaar tegenspreken. Een voorbeeld waar een concept-beeld niet juist is, kan gevonden worden bij het aftrekken van getallen. Wanneer dit op de basisschool geleerd wordt, zal een leerling een beeld kunnen vormen dat aftrekken een getal altijd kleiner maakt. Dit beeld zorgt echter voor problemen zodra negatieve getallen een rol gaan spelen. Vandaar dat Tall & Vinner (1981) ook aangeven dat alle mentale eigenschappen die geassocieerd worden met het concept, ook opgenomen moeten worden in het concept-beeld.

Vanuit het concept-beeld wordt vervolgens ook geredeneerd. Het kan zijn dat hierdoor "per ongeluk" het juiste antwoord wordt gegeven. Zo worden in het onderzoek van Tall & Vinner (1981) verschillende functies gegeven, waarbij de vraag is of deze functies continu of onderbroken zijn. Bij de functie $f(x) = x^2$ wordt hierbij bijvoorbeeld door leerlingen als redenatie gegeven: het bestaat uit één formule, waardoor het continu is. Dit verkeerde beeld zal er echter voor zorgen dat leerlingen bij de formule $f(x) = 1/x$ ook aangeven dat het continu is, wat niet het geval is. Om er dus achter te komen of een leerling een goed beeld heeft van een bepaald concept, zal ook doorgevraagd moeten worden. Mogelijk komen namelijk de goede antwoorden uit een verkeerd beeld.

Dit kan ook toegepast worden op machtsverheffen. Bij negatieve exponenten komt er namelijk een negatief getal in beeld. Omdat x^{-a} één minteken heeft, gaan sommige leerlingen er vanuit dat het antwoord negatief is, ofwel dat $x^{-a} = -x^a$. Dit heeft te maken met het feit dat bij een vermenigvuldiging met één negatief getal het antwoord negatief moet zijn (zoals $-3 \cdot 3 = -9$ en $-3 \cdot -4 = 12$).

2.1.2 Proces en object

Bij wiskunde zijn er een aantal abstracte concepten die bestaan uit verschillende processen. Een welbekend voorbeeld hiervan is het concept van functie als een object, waarin verschillende processen verweven zijn met betrekking tot het uitrekenen van waarden van de functie, die vervolgens weer in een grafiek getekend kunnen worden. Deze manier van denken komt voort uit de APOS-theorie (Dubinsky & McDonald, 2001).

Bij de APOS-theorie zijn er vier niveaus van begrip: een actie-, proces-, object- en schema-begrip. Een actie is een herhaalbare fysieke of mentale transformatie van objecten naar andere objecten (Weber, 2002b). Bij functies in het algemeen wordt bij dit begrip van de leerlingen verwacht dat ze onder andere getallen kunnen invullen in een formule en zo de desbetreffende functiewaarde te bepalen (Chimhande et al., 2017). Bij machtsverheffen kan de leerling a^x uitrekenen wanneer x een positief geheel getal is, door een herhaalde vermenigvuldiging ($a \cdot \ldots \cdot a$, n keer) (Weber, 2002a).

Een proces-begrip is een stapje verder. Een vergelijking als $2x - 1 = 11$ wordt opgevat als een proces: eerst vermenigvuldig je x met 2 en vervolgens trek je er 1 af(van den Boogaart, 2021).

Een object-begrip is nog een stapje verder. Hierbij wordt een vergelijking niet meer als een proces van rekenkundige operaties gezien, maar als het object "de vergelijking $3x - 2 = x + 4$"(van den Boogaart, 2021).

Wat alle niveaus van begrip vereisen specifiek voor machtsverhefen, is terug te vinden in paragraaf 2.3.4.

Er zit echter wel een nadeel aan deze theorie: leerlingen hebben vaak moeite met het overgaan van het proces-niveau naar het object-niveau. Sommige leerlingen zijn in staat om zowel processen van een bepaald concept als ook het concept als object te begrijpen, maar verbanden leggen tussen die twee lukt dan niet (Niss, 1999, p. 17).

2.1.3 Variatie en covariatie

Een andere manier waarop concepten met betrekking tot functies benaderd kunnen worden, is de variationele en covariationele benadering.

Bij de variationele benadering wordt leerlingen gevraagd een generale regel te maken voor een gegeven rij getallen met een patroon. Gutiérrez et al. (2016) gebruiken hierbij het voorbeeld van de volgende reeks:

$$2,\ 5,\ 8,\ 11,\ 14,\ 17.$$

Hierbij werden verschillende antwoorden gegeven door leerlingen:

- Kwantificeren van de groei-regel in symbolen (bijv. $+3$);
- Kwantificeren door het geven van specifieke voorbeelden (bijv. $2 \cdot 3 + 2$, $3 \cdot 3 + 2$, etc.);
- Correcte relatie waarbij onbekenden worden gebruikt (bijv. $3 \cdot ? + 2$).

Bij covariatie wordt er niet met maar een variabele, maar met twee variabeles gewerkt, die ten opzichte van elkaar veranderen. Deze benadering bestaat uit vijf mentale acties (Gutiérrez et al., 2016, p. 12):

1. Coördineren van een variabele als een andere verandert;
2. Coördineren van de richting van veranderen van een variabele als een andere verandert;
3. Coördineren van de grootte van verandering;
4. Coördineren van de gemiddelde snelheid van verandering;
5. Coördineren van de momentane verandering van de functie.

Volgens Gutiérrez et al. (2016) onderstreept deze manier het belang van modelleren in het creëren van een functie. Veel leraren hebben bij een functie vaak alleen aandacht voor wat aan de rechterkant van het =-teken staat (Gutiérrez et al., 2016, p. 12). Hiermee wordt niet een covariatie, maar variatie aangeleerd. Daarbij lijkt het verre van duidelijk te zijn hoe van variatie naar covariatie te gaan.

Een verdere uitwerking van het gebruiken van covariatie is terug te vinden in paragraaf 2.3.2. In deze paragraaf is deze manier van uitleg ook verder toegespitst op machtsverheffen en exponentiële groei.

2.1.4 Semiotiek

In de semiotiek wordt gewerkt met een semiotisch systeem. Volgens Ernest (2006) bestaat een semiotisch systeem uit drie delen:

1. Een set van tekens, tekens die bijvoorbeeld zijn uitgesproken, opgeschreven, getekend of elektronisch gecodeerd (algoritmes).
2. Een set van regels voor het maken en transformeren van tekens, inclusief het potentiële vermogen tot creativiteit bij het maken van zowel atomaire (enkele) als moleculaire (samengestelde) tekens.
3. Een set van relaties tussen de tekens en hun betekenis, belichaamd in een onderliggende betekenisstructuur.

Deze definitie kan echter uitgebreid worden volgens English & Kirshner (2015) naar een semiotische bundel, waarbij ook semiotische sets een rol spelen. Een semiotische set bestaat uit (vrij vertaald uit English & Kirshner (2015))

1. De tekens die mogelijk zijn gecreëerd met verschillende acties die een intentioneel karakter hebben, zoals spreken, schrijven, tekenen, gebaren.
2. De wijze van het creëren van tekens en het mogelijk transformeren van deze tekens; deze manieren zijn mogelijk regels of algoritmes, maar kunnen ook andere manieren van actie of creatie zijn die gebruikt worden door de leerling.
3. De relatie tussen deze tekens en hun betekenis, belichaamd in een onderliggende betekenisstructuur.

Een semiotische set is dus een set van tekens die gemaakt zijn door bijvoorbeeld spreken (gesproken taal), schrijven (notatie van onderdelen), tekenen (grafische weergave van onderdelen) of gebaren. Hierbij wordt ook de manier waarop dit wordt gecreëerd meegenomen, zoals bij de notatie van onderdelen ook rekenregels en algoritmes meegerekend worden. Daarnaast zijn ook de relaties tussen deze verschillende tekens meegenomen in deze sets. Denk hierbij bijvoorbeeld aan de relatie tussen verschillende rekenregels.

Een semiotische bundel bestaat uit twee delen:

1. Een collectie van semiotische sets
2. De relaties tussen deze verschillende sets

Een voorbeeld van een semiotische bundel is het spreken met bijbehorende gebaren (English & Kirshner, 2015). Deze bundel bestaat uit twee diep met elkaar verweven semiotische sets, namelijk de set van gebaren en de set van gesproken taal.

Hoe semiotiek specifiek toe te passen is op machtsverheffen, heb ik niet kunnen vinden in de literatuur. Daarom is de onderstaande indeling gemaakt op basis van de bovenstaande kennis over semiotische sets en bundels.

De semiotische bundel voor machtsverheffen bestaat uit de volgende semiotische sets:

- Gesproken taal;
- Notatie van machtsverheffen en exponentiële groei;
- Grafische weergave.

De semiotische set "gesproken taal" bevat de volgende onderdelen:

- De uitspraak van de machten en de gesproken uitleg hierbij;
- De uitspraak van rekenregels en de gesproken uitleg hierbij;
- De uitspraak van overige onderdelen bij het machtsverheffen en exponentiële groei.

De semiotische set "notatie van machtsverheffen en exponentiële groei" bevat het volgende:

- De macht, waaronder het grondtal en de exponent;
- De diverse regels
- Het verband tussen verschillende regels;
- De formule voor exponentiële groei.

De semiotische set "grafische weergave" bevat het volgende:

- Tabellen met waarden gekoppeld aan exponentiële groei en afname;
- De grafieken van exponentiële groei en afname;
- Het verband tussen de verschillende grafieken.

Daarnaast kunnen tijdens de uitleg van machtsverheffen ook gebaren aan bod komen. Deze zouden in principe ook onder een semiotische set geplaatst kunnen worden. Hier is echter niet voor gekozen, omdat de analyse daarvan buiten het bereik van dit verslag ligt.

Diverse fouten die besproken worden in paragraaf 2.2, vinden hun oorsprong in de verschillende sets. Zo worden er fouten gemaakt door gesproken taal, een van de semiotische sets die bij dit onderwerp hoort. Ook fouten met rekenregels kunnen hun plaats vinden in een van deze sets. De relatie tussen de verschillende machten en rekenregels is niet duidelijk voor de leerling.

2.1.5 Samenvatting

In dit deel van het literatuuronderzoek is ingegaan op verschillende cognitieve benaderingen van het wiskunde-onderwijs, waarbij specifiek het gebied van machten en exponenten behandeld is. Dit is gedaan aan de hand van de volgende vier benaderingen:

- Concept-beeld en concept-definitie
- Proces en object (APOS)
- Variatie en covariatie
- Semiotiek

Bij "Concept-beeld en concept-definitie" is besproken hoe leerlingen een concept-beeld hebben, maar dat deze ook niet overeen hoeft te komen met de concept-definitie die de leerlingen hebben of hebben gekregen. Dit kan vervolgens weer zorgen voor fouten. Het is daarom belangrijk om te weten welk beeld de leerlingen hebben bij een concept, maar nog belangrijker om dat beeld dusdanig te beïnvloeden dat deze overeenkomt met de definitie.

Bij "Proces en object (APOS)" is een manier besproken waarop het denken van leerlingen gecategoriseerd wordt in vier niveaus. Leerlingen kunnen volgens deze methode vanaf het eerste niveau, via het tweede en derde niveau, uiteindelijk opklimmen tot het vierde niveau. Op het eerste niveau kan de leerling alleen nog maar machtsverheffen met gehele positieve getallen, terwijl op het laatste niveau de leerling het concept kan loskoppelen van een concrete operatie met getallen en kan redeneren met rekenregels.

Bij "Variatie en covariatie" is een manier besproken waarop functies kunnen worden uitgelegd. Het doel van deze manier is verbanden leggen tussen verschillende punten van de functies, om op die manier een begrip te krijgen van wat een bepaalde functie nu precies is en wat de bijbehorende grafiek is.

Bij "Semiotiek" is besproken hoe onder andere spreken, schrijven, tekenen en gebaren samen een semiotische bundel vormen. In deze bundel bevinden zich een aantal semiotische sets. Deze sets bestaan weer uit verschllende tekens (gesproken taal, notatie, tekeningen, etc.) en verbanden of regels tussen deze tekens. Hoe deze indeling specifiek voor machten en exponenten gemaakt kan worden, is hierbij ook uitgelegd. Daarnaast is hierbij ook aangegeven dat verschillende fouten hun oorsprong vinden in een van deze sets.

2.2 Misconcepties gemaakt door leerlingen

In de bestaande literatuur zijn veel fouten te vinden die leerlingen vaak maken. In deze paragraaf wil ik ingaan op de volgende volgende fouten:

- De betekenis van machtsverheffen
- Regels niet kennen
- Fouten met een minteken, onderverdeeld in
  - minteken in het grondtal
  - minteken in de exponent
- Gebroken exponenten

2.2.1 De betekenis van machtsverheffen

Er zijn twee fouten die betrekking hebben op de betekenis van machtsverheffen. Ten eerste wordt machtsverheffen soms gezien als een vermenigvuldiging van het grondtal met de exponent. Ten tweede wordt de functie van het grondtal en de exponent wel eens omgewisseld.

Machtsverheffen als vermenigvuldiging: Leerlingen weten vaak dat een macht iets heeft te maken met een vermenigvuldiging. Dit kan echter leiden tot de volgende fout: 5^2 wordt gezien als $5 \cdot 2$ of $2 \cdot 5$ (Ulusoy, 2019). Deze fout komt door het gebruik van taal: wanneer machtsverheffen een vermenigvuldiging wordt genoemd, kan het zijn dat leerlingen het grondtal met de exponent vermenigvuldigen.

Omwisselen van de rol van het grondtal en de exponent: Andere leerlingen begrijpen al beter wat machtsverheffen is. Er is een begrip van dat machtsverheffen een herhaalde vermenigvuldiging van een getal met zichzelf. Hier komt echter een ander aspect naar boven: welk getal moet nu met zichzelf vermenigvuldigd worden? In het onderzoek van Ulusoy (2019) waren er leerlingen die de rol van het grondtal en de exponent omwisselden: 2^6 werd gezien als $6 \cdot 6$ in plaats van $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$.

Ulusoy (2019) noemt ook een reden voor dit probleem. In de definitie van machtsverheffen wordt het woord "vermenigvuldigen" gebruikt. In dit onderzoek wordt dit aangemerkt als een obstakel, wat gedefinieerd wordt volgens de definitie van Duroux (1983). Een obstakel moet voldoen aan de volgende 5 kenmerken(Ulusoy, 2019):

- Het is een stukje kennis of een concept en niet een moeilijkheid of gebrek aan kennis
- Deze kennis zorgt voor informatie die geschikt is voor een specifieke situatie
- Buiten deze specifieke situatie is dit echter incorrect
- Deze kennis is gebaseerd op zowel incidentele onnauwkeurigheden als ook het tot stand brengen van een beter stuk kennis
- Nadat de onnauwkeurigheid ervan is vastgesteld, blijft het toch weer aanhoudend opduiken

2.2.2 Regels niet goed toepassen

Naast dat er fouten zijn, doordat leerlingen de betekenis van machtsverheffen niet kennen, zijn er ook fouten die gemaakt worden, doordat de regels met betrekking tot machtsverheffen niet goed toegepast worden. De grote oorzaak hierachter is dat de leerlingen de logica van diverse regels niet begrijpen.

Omdat er zoveel fouten gemaakt worden met betrekking tot de regels van het machtsverheffen, zullen deze fouten nu behandeld worden in de volgende punten:

1. De regel $a^0 = 1$
2. Regels voor het vermenigvuldigen van machten
3. Regels voor het delen van machten
4. Regels voor het optellen van machten
5. Regels voor negatieve exponenten

Deze regels zullen we nu een voor een langs gaan, waarbij de fouten bij de regels genoemd zullen worden, naar aanleiding van het onderzoek van Ulusoy (2019). Voor meer informatie over dit onderzoek, zie appendix A.4.

De regel $a^0 = 1$

Er zijn drie antwoorden die vaak als antwoord gegeven worden op een vraag in de vorm van a^0: 0, a en 1, waarbij het laatste het juiste antwoord is. Ulusoy geeft hierbij de volgende redenen:

0 als een neutraal element (Engels: identity element): Bij optellen is 0 een neutraal element: $x + 0 = 0 + x = x$. Dit wordt soms ook toegepast door leerlingen bij machtsverheffen: a^0 wordt dan gezien als a.

0 als absorberend element: Bij vermenigvuldigen is 0 een absorberend element: $a \cdot 0 = 0$ voor elk getal a. Omdat machtsverheffen gezien wordt als een herhaalde vermenigvuldiging, waarbij in dit geval 0 een rol speelt, moet het antwoord van a^0 wel 0 zijn.

Regels voor het vermenigvuldigen van machten

De regel $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ Bij deze regel worden de volgende fouten gemaakt: exponenten worden met elkaar vermenigvuldigd ($a^x \cdot a^y = a^{xy}$, de grondtallen worden met elkaar vermenigvuldigd ($a^x \cdot a^y$ is gelijk aan $(a \cdot a)^{x+y}$) of een combinatie van de voorgaande twee fouten ($a^x \cdot a^y = (a \cdot a)^{xy}$).

De regel $a^x \cdot b^x = (ab)^x$ Bij opdrachten waar deze regel gebruikt moet worden, worden de volgende fouten gemaakt: exponenten worden met elkaar vermenigvuldigd ($a^x \cdot b^x = (ab)^{x \cdot x}$), exponenten worden opgeteld ($a^x \cdot b^x = (ab)^{x+x}$) of de grondtallen worden bij elkaar opgeteld ($a^x \cdot b^x = (a+b)^x$).

De regel $a^x \cdot b^y$ *kan niet verder vereenvoudigd worden* Bij opdrachten in deze vorm worden veel van de voorgaande fouten ook gemaakt: de grondtallen worden met elkaar vermenigvuldigd of opgeteld en exponenten worden opgeteld of vermenigvuldigd.

Regels voor het delen van machten

De regel $a^x/a^y = a^{x-y}$ Fouten die bij deze regel gemaakt worden zijn: delen van de exponenten ($a^x/a^y = a^{x/y}$), exponenten vermenigvuldigen ($a^x/a^y = a^{xy}$) en grondtallen delen ($a^x/a^y = (a/a)^{x-y} = 1^{x-y}$).

De regel $a^x/b^x = (a/b)^x$ Bij deze regel worden de volgende fouten gemaakt: De grondtallen worden met elkaar vermenigvuldigd in plaats van gedeeld ($a^x/b^x = (ab)^x$), exponenten worden van elkaar afgetrokken ($a^x/b^x = (a/b)^{x-x} = (a/b)^0$), de grondtallen worden van elkaar afgetrokken ($a^x/b^x = (a-b)^x$) of de exponenten worden gedeeld ($a^x/b^x = (a/b)^{x/x} = (a/b)^1$).

Regels voor het het optellen van machten

De regel $a^x + a^x = 2 \cdot a^x$*:* Bij deze regel worden verschillende fouten gemaakt. In het onderzoek van Ulusoy komen hierbij drie fouten aan bod: exponenten worden opgeteld, grondtallen worden opgeteld en een combinatie van deze twee.

Exponenten worden opgeteld: Bij de opgave $3^5 + 3^5 + 3^5$ wordt het antwoord 3^{15} gegeven. Hierbij wordt $3^5 + 3^5 + 3^5$ dus gezien als 3^{5+5+5}.

Grondtallen worden opgeteld: Bij deze opgave waren er ook leerlingen die het antwoord 9^5 gaven. Hierbij wordt $3^5 + 3^5 + 3^5$ dus gezien als $(3+3+3)^5$.

Exponenten en grondtallen worden opgeteld: Daarnaast waren er leerlingen die de voorgaande twee fouten combineerden. Hierdoor kregen ze de volgende vergelijking: $3^5 + 3^5 + 3^5$ is gelijk aan $(3+3+3)^{5+5+5} = 9^{15}$.

De regel $a^x + a^y$ *kan niet verder vereenvoudigd worden:* Bij deze regel worden twee fouten gemaakt, die ook beschreven zijn bij de regel *De regel* $a^x + a^x = 2 \cdot a^x$: exponenten worden opgeteld of grondtallen en exponenten worden opgeteld. Bij het eerste krijgen we hierdoor $a^x + a^y = a^{x+y}$. Bij het tweede krijgen we $a^x + a^y = (2a)^{x+y}$.

Regels voor negatieve exponenten

De fouten bij negatieve exponenten worden uitgelegd bij *Minteken in de exponent*. De regel die daar ook aan bod zal komen is $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

2.2.3 Mintekens in machten

Minteken in het grondtal
Er zijn in de literatuur verschillende fouten te vinden waarbij het minteken in het grondtal van een macht zorgt voor problemen. De meest voorkomende fout is de volgende: $-a^p$ is gelijk aan $(-a)^p$

Er is echter niet maar een oorzaak te noemen voor deze fout. Cangelosi et al. (2013) noemen drie verschillende redenen waarom deze fout gemaakt kan worden: (gesproken) taal, groeperen en notatie.

(Gesproken) taal: In gesproken taal is $-a^p$ gelijk aan $(-a)^p$ (min a tot de macht p).

Dit zou opgelost kunnen worden door machten op een andere manier uit te spreken. Cangelosi et al. (2013) noemen hierbij verschillende voorbeelden in het Engels, waarbij woorden als "inverse" worden gebruikt, maar ook gebruik wordt gemaakt van pauzes. Zelf geven ze bij het laatste aan dat pauzes in zulke zinnen moeilijk te horen zijn.

Groeperen: Een andere oorzaak voor dit probleem is dat leerlingen denken dat het minteken altijd bij het grondtal hoort, haakjes of niet. Hierbij geven Cangelosi et al. (2013) een reden waardoor dit zou komen: $(-n) = -n$, waardoor leerlingen kunnen denken dat de haakjes niet uitmaken (ofwel, dat $(-a)^p$ gelijk is aan $-a^p$).

Daarnaast kan ook context hierbij een rol spelen. Zo kan $15 - 3^2$ wel goed uitgerekend worden, maar kan alsnog de misconceptie blijven dat -3^2 gelijk is aan 9 (want je trekt 9 af van 15).

Notatie: Een derde oorzaak voor dit probleem is notatie. Doordat leerlingen tijdens de berekening de haakjes vergeten op te schrijven, kan dit probleem zich ook voordoen. Zo werd er bij de toets van Cangelosi et al. (2013) de volgende fout gemaakt:

$$(-8)^{2/3} = \sqrt[3]{-8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$$

Deze leerling bereikte wel het goede antwoord, maar vergat bij de tweede stap de haakjes rondom -8. Had de leerling met deze fout doorgerekend, dan zou het antwoord -4 moeten worden. Doordat deze leerling zich in de volgende stap direct verbeterde, kwam het goede antwoord uiteindelijk wel uit deze opgave.

Minteken in de exponent
Naast dat er fouten worden gemaakt met het minteken in het grondtal, worden er ook veel fouten gemaakt met het minteken in de exponent. Hierbij geven Cangelosi et al. (2013) twee verschillende redenen waarom deze fout gemaakt kan worden: taal en notatie. Daarnaast geeft Ulusoy (2019) nog een reden: het wegdenken van het minteken.

Taal: In het Engels wordt bij negatieve exponenten vaak gebruik gemaakt van het werkwoord "flipping", wat in het Nederlands "omdraaien" betekent. Er komt namelijk een breuk in het spel.

Niet altijd is echter duidelijk wat er precies omgedraaid moet worden. Zo werden er in de onderzoeken van Cangelosi et al. (2013) en van Ulusoy (2019) verschillende antwoorden gegeven op de opgave 2^{-3}: $\frac{2}{1/3}$, $\frac{2}{3/1}$, $\frac{3}{2}$ en $2^{\frac{1}{3}}$. Wat deze leerlingen niet goed hebben begrepen, is hoe de breuk nu precies gemaakt moet worden.

Notatie: Ook notatie kan een rol spelen. Leerlingen kunnen bijvoorbeeld de volgende regel wel kennen, maar alsnog fouten maken: $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

Zo waren er in het onderzoek van Cangelosi et al. (2013) leerlingen die dit extrapoleerden naar het volgende regel: $a^{-x} = \frac{x}{a}$.

Wegdenken van het minteken: In het onderzoek van Ulusoy (2019) geven een aantal leerlingen als antwoord op de vraag 2^{-6} het volgende antwoord: $2^{-6} = 2^6 = 64$. Dit kan 3 redenen hebben: de leerlingen hebben het minteken over het hoofd gezien, ze kennen de regel $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ niet of, zoals in het onderzoek van Ulusoy naar voren komt, is het een macht met een even exponent, waardoor het minteken niets meer uitmaakt. Wat de leerling bij het laatste fout doet, is dat hierbij de regel van het grondtal voor de exponent gebruikt wordt. Als de exponent namelijk een even getal is, dan is $a^x = (-a)^x$.

2.2.4 Gebroken exponenten

Daarnaast zijn er verschillende fouten met gebroken exponenten. In het onderzoek van Cangelosi et al. (2013) komen hierbij enkele fouten aan bod. Hiervan is ook een aantal waarbij negatieve getallen een hoofdrol spelen. Deze fouten zijn besproken onder *Fouten met een minteken.*

$a^{\frac{p}{q}} = \frac{ap}{q}$: deze fout heeft te maken met de betekenis van machtsverheffen. In dit geval is a^x gelijk gesteld aan ax.

$a^{\frac{p}{q}} = \frac{a^p}{q}$: deze fout heeft te maken met de betekenis van machtsverheffen met een breuk. De leerling weet hoe het gewone machtsverheffen werkt, maar hoe om te gaan met de noemer van de breuk in de exponent is niet bekend.

Beide fouten hebben te maken met de betekenis van machtsverheffen. Hierbij wordt niet "herhaald vermenigvuldigen", maar een lineair verband aangegeven. Bij de eerstgenoemde fout wordt dit voor het volledige machtsverheffen gedaan; deze fout heeft niet specifiek betrekking op de gebroken exponent. Bij de tweede fout weet de leerling wel wat machtsverheffen is, maar benadert de noemer van de breuk op een lineaire manier: $a^{\frac{p}{q}}$ moet volgens deze berekening maal q (in plaats van tot de macht q) worden gedaan om a^p te krijgen.

2.2.5 Samenvatting

In deze paragraaf zijn verschillende fouten langsgekomen, verdeeld in de volgende categorieën:

- De betekenis van machtsverheffen
- Regels niet kennen
- Fouten met een minteken, onderverdeeld in

  - minteken in het grondtal
  - minteken in de exponent
- Gebroken exponenten

In het onderstaande schema zijn de fouten weergegeven die hierboven zijn behandeld:

Categorie	Fouten bij deze categorie
Betekenis van machtsverheffen	Machtsverheffen als vermenigvuldiging, omwisselen rol grondtal en exponent
Regels niet kennen	
Regel $a^0 = 1$	$a^0 = 0$, $a^0 = a$
Regel $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	Grondtallen optellen of vermenigvuldigen, exponenten vermenigvuldigen of combinatie van deze fouten
Regel $a^x \cdot b^x = ab^x$	Grondtallen optellen, exponenten optellen of vermenigvuldigen of combinatie van deze fouten
Regel $a^x \cdot b^y$ kan niet verder vereenvoudigd worden	Grondtallen optellen of vermenigvuldigen, exponenten optellen of vermenigvuldigen of combinatie van deze fouten
Regel $a^x/a^y = a^{x-y}$	Exponenten delen of vermenigvuldigen, grondtallen delen
Regel $a^x/b^x = (a/b)^x$	Grondtallen vermenigvuldigen of aftrekken, exponenten aftrekken of delen
Regel $a^x + a^x = 2a^x$	Eexponenten optellen, grondtallen optellen
Regel $a^x + a^y$ kan niet verder vereenvoudigd worden	Exponenten optellen, grondtallen optellen
Fouten met een minteken	
Minteken in het grondtal	$(-a)^p = -a^p$
Minteken in de exponent	a^{-p}: $-a^p$, $\frac{a}{p/1}$, $\frac{p}{a}$, $\frac{a}{1/p}$ en $a^{1/p}$
Gebroken exponenten	$a^{\frac{p}{q}}$: $\frac{ap}{q}$ en $\frac{a^p}{q}$

Tabel 1: Fouten uit de literatuur, verdeeld over verschillende categorieën

Van veel van deze fouten is de oorzaak besproken. Hierbij is voornamelijk ook de semiotiek uit paragraaf 2.1.4 en concept-beeld versus concept-definitie uit paragraaf 2.1.1 gebruikt. De eerstgenoemde is terug te vinden bij bijvoorbeeld het minteken in het grondtal, bij de fout dat $-a^p$ is gelijk aan $(-a)^p$. De fout kan onder andere liggen aan gesproken taal, omdat deze twee uitdrukkingen in gesproken taal gelijk zijn aan elkaar.

De laatstgenoemde, concept-beeld versus concept-definitie, komt terug bij bijvoorbeeld de fouten bij de betekenis van machtsverheffen, waarbij machtsverheffen als vermenigvuldigen wordt gezien en 2^5 gelijk gesteld wordt aan $2 \cdot 5$. De definitie is dat machtsverheffen herhaald vermenigvuldigen is. Het beeld wat bij deze leerlingen is gecreëerd, is de vermenigvuldiging van het grondtal met de exponent.

Ook zijn er fouten die met dezelfde uitleg bij zowel semiotiek als concept-beeld versus concept-definitie passen. Zo kan het voorbeeld dat bij concept-beeld versus concept-definitie gegeven is in de voorgaande alinea, ook onder semiotiek geplaatst worden. Doordat machtsverheffen (herhaald) vermenigvuldigen wordt genoemd, beginnen de leerlingen het grondtal met de exponent te vermenigvuldigen.

2.3 Manieren van uitleg

In de literatuur worden verschillende manieren beschreven waarop machten en exponenten uitgelegd kunnen worden. In deze paragraaf zal ingaan worden op verschillende manieren van uitleg, waarbij ook de negatieve kanten van elke uitleg aan bod komen.

De volgende onderwerpen zullen als volgt aan bod komen:

1. Splitsen
2. Verband-leggende benadering
   - Covariationele benadering
   - correspondentiële benadering
3. Functionele benadering
4. Algoritmische benadering
5. Benadering van Pitta-Pantazi, Christou en Zachariades
6. Continue concept van exponenten

Een aantal van deze manieren van uitleg is ook getest in de praktijk in andere onderzoeken. Hiervan zullen we ook enkele langsgaan.

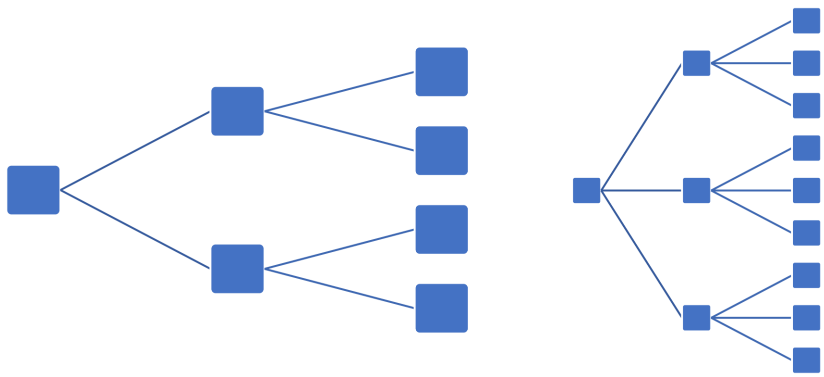
2.3.1 Splitsen

Voordat we ingaan op wat de methode van splitsen precies inhoudt, willen we eerst ingaan op waar het vandaan komt. De methode is namelijk gebaseerd op de manier waarop we vermenigvuldigen vaak zien. Een vermenigvuldiging is namelijk een herhaalde toevoeging van een bepaald getal (Bergsma, 2019). Zo kunnen we $3 \cdot 2$ zien als $2 + 2 + 2$. Dit kunnen we zien als een optel-structuur.

Zoals optellen en aftrekken een basis vormt voor vermenigvuldigen, zo vormt vermenigvuldigen en delen een basis voor machtsverheffen. Zo kunnen we 5^3 zien als $5 \cdot 5 \cdot 5$. Het machtsverheffen kunnen we daarom zien als een splits-structuur. Dit kan worden weergegeven als een boomdiagram, zie afbeelding 1 (Bergsma, 2019). In het linkerdeel van het figuur is elke stap naar rechts een 2-splitsing, en in het rechterdeel van het figuur is elke stap naar rechts een 3-splitsing. Zo wordt in het linkerdeel 2^2 uitgebeeld en in het rechterdeel 3^2.

Om het verband tussen de optel-structuur en de splits-structuur duidelijk te maken, hebben Confrey & Smith (1995) een lijst met relaties tussen de splits-structuur en de tel-structuur gegeven. Een deel van deze lijst is hieronder (vertaald) weergegeven:

Wanneer er negatieve exponenten worden geïntroduceerd, zal op dit idee voortgeborduurd kunnen worden. Wanneer men namelijk een boomdiagram



Afbeelding 1: Voorbeeld boomdiagrammen van splitsen (Bergsma, 2019, p. 7)

Splitsen	Tellen
1 is de oorsprong	0 is de oorsprong
De basis-eenheid is n	De basis-eenheid is 1
Een n-splitsing maken is de operatie naar de volgende rij	1 optellen is de operatie naar de volgende rij
Vermenigvuldigen en delen zijn de basisoperaties	Optellen en aftrekken zijn de basisoperaties
Machtsverheffen is gecreëerd door herhaald vermenigvuldigen	Vermenigvuldigen is gecreëerd door herhaald optellen

Tabel 2: Tabel met hierin splitsen en tellen vergeleken (Confrey & Smith, 1995, p 75)

met 2-splitsingen heeft, zoals in afbeelding 1, ligt de nadruk op het telkens vermenigvuldigen met 2 of delen door 2. Als er dus gevraagd zal worden wat 2^{-1} moet zijn, zal hierbij vanaf 1 een stap naar links gemaakt moeten worden, waarbij er gehalveerd moet worden, zodat het antwoord 1/2 is.

Er zitten echter wel beperkingen aan deze manier van uitleg. Avitzur (2012) geeft aan dat er maar een beperkte definitie van exponenten hierbij geïntroduceerd wordt, namelijk die van natuurlijke getallen. Dit zal op de een of andere manier uiteindelijk uitgebreid moeten worden, maar kan niet altijd gedaan worden met het beeld wat leerlingen met splitsen ontwikkeld hebben. Zo is het voor leerlingen moeilijk te begrijpen wat nu drie en een halve splitsing is. Daarnaast is een irrationaal getal nog moeilijk te interpreteren als een aantal splitsingen.

Een oplossing hiervoor bieden kan door bijvoorbeeld telkens nieuwe definities toe te voegen of aan te passen. Hierdoor worden echter ontwikkelde ideeën over machten en exponenten soms tegengesproken, wat voor verwarring bij leerlingen zal zorgen.

2.3.2 Verband-leggende benadering

In de verband-leggende benadering relateert men de natuurlijke getallen met exponenten. Hierbij gebruikt men de functie $x \mapsto a^x$, waarbij x een reëel getal is. Hierbij zijn twee varianten van uitleg mogelijk:

1. We laten twee sets van getallen zien die met elkaar verbonden zijn. 1-0, 2-1, 4-2, 8-3, 16-4, etc. en laten leerlingen het verband opzoeken. Als het rechtse getal 1 hoger wordt, wordt het linkse getal vermenigvuldigd met 2. Dit wordt de covariationele benadering genoemd.
2. We leggen uit hoe de functie werkt (dus $a^x = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$, x keer) en laten leerlingen hierbij dus het verband tussen verschillende machten ontdekken. Dit wordt de correspondentiële benadering genoemd

Covariationele benadering De covariationele benadering van functies heeft als doel leerlingen een beeld te laten krijgen van een functie. Er worden twee rijen met getallen met elkaar verbonden (Confrey & Smith, 1994). Een voorbeeld hiervan is gegeven in de onderstaande tabel:

12	10	8	6	4	2	0	-2	-4
4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4

Het doel bij deze benadering is dat leerlingen erachter komen wat het verband is tussen de bovenste en de onderste rij. Bij dit voorbeeld kunnen we zien dat als in de onderste rij 1 afgetrokken wordt, dan wordt in de bovenste rij 2 afgetrokken. Op deze manier is bijvoorbeeld te zien dat er een lineair verband is tussen deze twee rijen getallen.

Dit kunnen we ook doen met andere functies, zo ook met exponentiële functies, zie de onderstaande tabel:

16	8	4	2	1	1/2	1/4	1/8	1/16
4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4

Hierbij is het verband dat wanneer er onder 1 afgetrokken wordt, er boven gedeeld wordt door 2. En als er onder 1 bij komt, er boven vermenigvuldigd wordt met 2.

In het onderzoek van Ferrari-Escolá et al. (2016) wordt een lesmethode besproken die deze benadering gebruikt. Voor een samenvatting van dit onderzoek, zie appendix A.4. In dit onderzoek wordt beschreven hoe met behulp van een kaartspel het verband tussen machten wordt ontdekt. Ook wordt er beschreven hoe er met behulp van deze kaarten regels worden ontdekt, zowel met vermenigvuldigen als delen. Ook negatieve machten worden hierbij ontdekt.

Uit dit onderzoek bleek dat leerlingen het verband tussen de kaarten snel doorhadden. De opdrachten waarbij ze kaarten moesten maken die nog misten, zowel met positieve als ook negatieve getallen en breuken, konden ze allemaal uitvoeren. Er was zelfs iemand die hierbij een grafische weergave probeerde te formuleren: "this has the form of a... hyperbola".

In dit onderzoek was er echter ook een groep leerlingen die de kaart $(0, 0)$ als noodzakelijke beginkaart zagen. Door een korte interruptie van de leerkracht, waarbij de nadruk gelegd werd op het verband tussen de verschillende kaarten, konden de leerlingen uiteindelijk wel uitleggen waarom deze kaart er toch niet bij hoorde.

Correspondentiële benadering De correspondentiële benadering heeft als doel om een regel te maken, waar bij elke x-waarde een y-waarde hoort. Deze regel heeft meestal de vorm van $y = f(x)$(Confrey & Smith, 1994). Als we bijvoorbeeld de regel $y = 5x + 2$ nemen, dan kan een leerling een tabel maken met waardes die hierbij horen:

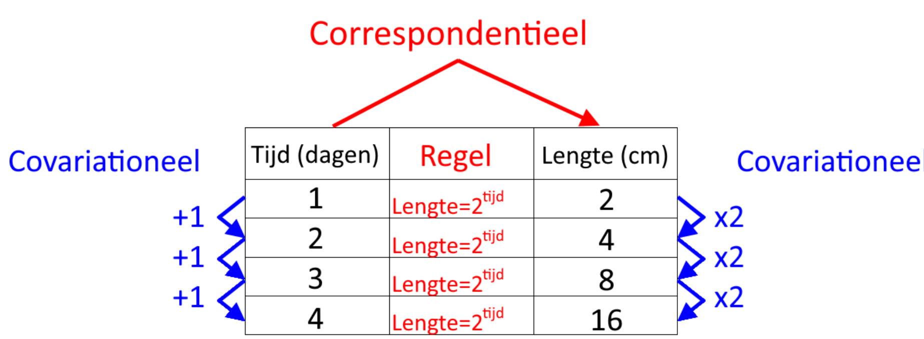
-18	-13	-8	-3	2	7	12	17	22
-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4

Dit kan ook toegepast worden bij machten: $y = a^x$. Hierbij wordt meestal de definitie gegeven $a^x = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n keer). Hierdoor kunnen leerlingen de volgende tabel maken (voor $a = 2$):

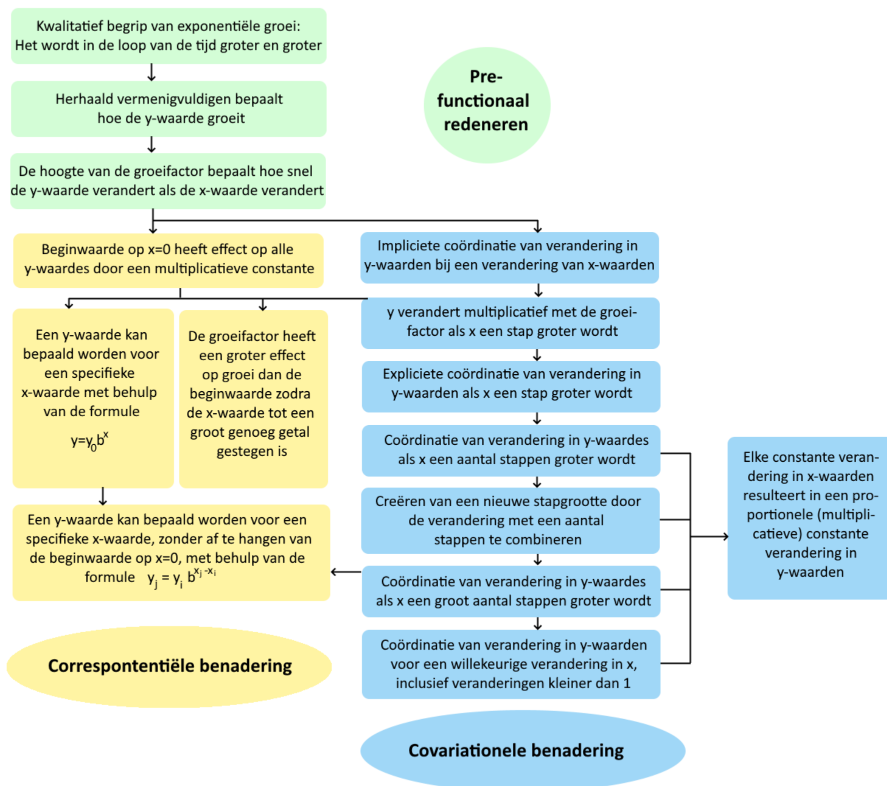
2	4	8	16	32	64	128	256	512
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Covariationeel versus correspondentieel De covariationele en de correspondentiële benadering zijn beide te gebruiken om het verband bij exponentiële groei of afname te laten zien. In afbeelding 2 is duidelijk te zien wat het verschil is tussen deze twee benaderingen.

Hoe verschillende denkstappen en inzichten in deze twee benaderingen op elkaar volgen, is te zien in afbeelding 3. Hierbij is ook het pre-functioneel redeneren opgenomen, wat niet in afbeelding 2 voorkomt.



Afbeelding 2: Covariationeel vs correspondentieel, afgeleid van Panorkou et al. (2014)



Afbeelding 3: Covariationeel vs correspondentieel, vertaald uit Ellis et al. (2013)

In afbeelding 3 blijkt dat er van een covariationele benadering altijd naar een correspondentiële benadering gegaan kan worden. Inzichten die verkregen worden door de correspondentiële benadering, worden ook verkregen bij de covariationele benadering.

Daarnaast volgt uit deze afbeelding dat bij de covariationele benadering telkens gekeken wordt naar de verandering van y ten opzichte van een verandering van x. Op deze manier kan ook naar negatieve x-waarden gewerkt worden. Bij de correspondentiële benadering zullen de negatieve x-waarden opnieuw gedefinieerd moeten worden.

2.3.3 Functionele benadering

De functionele benadering heeft als doel om negatieve en rationele exponenten te introduceren door een grafiek. Eerst worden de natuurlijke getallen geïntroduceerd bij de exponenten, volgens de definitie $a^x = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n keer). Daarna wordt een grafiek gemaakt die door deze punten loopt, de grafiek van a^x.

Er zit echter wel een nadeel aan deze manier van aanpak. Leerlingen kunnen ook een andere lijn door deze punten tekenen, een die door de oorsprong (0,0) gaat, wat ook te zien is in het voorbeeld van Rabin et al. (2013), waar een leraar dit toepast.

Daarnaast begint ook deze benadering bij de natuurlijke getallen, wat een beperkt beeld van exponenten is, zoals eerder aangegeven bij de methode "Splitsen", maar ook aangegeven door Avitzur (2012).

2.3.4 Algoritmische benadering

De algoritmische benadering wordt beschreven door Weber (2002b). Hierbij wordt gebruik gemaakt van de APOS theorie van Dubinsky & McDonald (2001). Hierbij worden vier verschillende stappen beschreven, die afgeleid zijn van de vier volgende stappen: actie, proces, object en schema. Deze stappen worden hieronder uitgewerkt.

Machtsverheffen als actie: Bij deze stap moeten leerlingen een bepaalde actie kunnen toepassen. In het geval van machtsverheffen is dit de actie $a^x = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n keer).

Machtsverheffen als proces: Bij deze stap moeten leerlingen inzien wat het proces van machtsverheffen is. Hierbij is het niet meer van belang dat leerlingen kunnen uitrekenen wat een macht nu precies is, maar veel meer kunnen redeneren over dat 2^x een stijgende functie is, die steeds sneller stijgt.

Wel is hier nog steeds, net als bij de vorige stap, de exponent een natuurlijk getal.

Machtsverheffen als object: Bij deze stap gaat het niet meer om het berekenen van een macht. Een leerling moet een macht gaan zien als object, de uitkomst van een vermenigvuldiging. Hierbij moeten leerlingen dus ook kunnen beredeneren dat $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$. Leerlingen schrijven hierbij nog steeds a^x als x factoren van a.

Machtsverheffen schema: Onder het schema verstaan we een verzameling van acties, processen en objecten die ontwikkeld zijn in het voorgaande gedeelte, waarbij het in een cognitief schema aan elkaar verbonden wordt. Bij machtsverheffen horen hier in het schema natuurlijk nog een aantal zaken, zoals machtsverheffen met gebroken exponenten en negatieve getallen. Op dit niveau moeten deze zaken ook beredeneerd kunnen worden door de leerling, waarbij het niet "maar een regel uit het wiskundeboek" is. De logica achter deze regels moet ook begrepen worden.

Om de eerste twee niveaus te bereiken, wordt er gebruik gemaakt van het schrijven van een algoritme. In dit algoritme wordt een for-loop gebruikt. In woorden omschreven werkt het algoritme als volgt voor de som a^x:

We geven eerst s de waarde 1.
Begin van de for-loop: Voor een x aantal stappen moet het volgende uitgevoerd worden:
    s moet vermenigvuldigd worden met a.
Einde van de for-loop.

Na deze for-loop is het antwoord op a^x gelijk aan s.

Doordat leerlingen op deze manier in aanraking komen met exponenten, hoopt Weber (2002b) dat de leerlingen beter de definitie van a^x als een vermenigvuldiging met een x aantal a's zullen begrijpen. Hierdoor zullen vragen zoals "Waarom is 2^{x+1} twee keer zo groot als 2^x?" en "Waarom is $(-1)^x$ negatief als x oneven is?" beter beantwoord worden dan in de test die Weber (2002b) heeft afgenomen.

Zoals bij eerdere stappen aangegeven, zorgt deze manier er echter voor dat leerlingen een beperkt beeld van machtsverheffen door te beginnen met natuurlijke getallen als exponent.

2.3.5 De benadering van Pitta-Pantazi, Christou en Zachariades

Pitta-Pantazi et al. (2007) hebben op een vergelijkbare manier als Weber (2002b), drie niveaus geformuleerd:

- Pre-conceptueel niveau
- Conceptueel niveau
- Geherstructureerd niveau

Wat deze niveaus precies inhouden, zal worden verteld aan de hand van de benadering van Weber (2002b), die de APOS-theorie gebruikt. Bergsma (2019) heeft deze twee benaderingen vergeleken. In zijn onderzoek zag hij dat er veel overlap was tussen deze benaderingen. Op basis van een toets die hij afgenomen heeft, kwam hij tot een conclusie welke hieronder beschreven staat.

Het pre-conceptuele niveau is te vergelijken met het eerste niveau van Weber (machtsverheffen als actie, zie paragraaf 2.3.4). Leerlingen op dit niveau kunnen machten met positieve gehele getallen in zowel het grondtal als de exponent (Pitta-Pantazi et al., 2007).

Het tweede niveau, het conceptuele niveau, is uitgebreider dan het eerste niveau. In dit niveau kunnen leerlingen de regel $b^x \cdot b^y$ toepassen. Hierdoor overlapt dit niveau volgens Pitta-Pantazi et al. (2007) deels met het tweede niveau van Weber, machtsverheffen als proces. Toch is het conceptuele niveau uitgebreider dan het tweede niveau van Weber, want bij het laatste hoeft de leerling alleen maar met positieve gehele exponenten te kunnen rekenen, terwijl bij de eerste de leerling ook al met negatieve exponenten moet kunnen rekenen (Bergsma, 2019). Bij Weber wordt dit echter pas in het derde niveau, machtsverheffen als object, verwacht van de leerling. Hierdoor komt het conceptuele niveau overeen met de combinatie van het tweede en derde niveau van de APOS-theorie.

Het derde niveau is het geherstructureerde niveau. Bij dit niveau beschouwt de leerling een macht als een wiskundig object (Bergsma, 2019). Daarnaast kunnen de leerlingen op dit niveau ook werken met gebroken machten en reële machten. Dit komt overeen met het laatste niveau van de APOS-theorie.

2.3.6 Continue concept van machtsverheffen

Bij het continue concept van exponenten worden vier principes genoemd die we hieronder zullen behandelen:

- Beeld en berekening van elkaar scheiden
- Beginnen met een kwalitatief begrip van exponenten
- Werken met natuurkundige grootheden van een continue aard
- Gehele getallen gebruiken als geval binnen het continue domein

Nu zullen we ingaan op deze vier principes, op basis van de uitleg van Avitzur (2012)

Beeld en berekening van elkaar scheiden: Voor het berekenen van gehele, gebroken of negatieve exponenten, zijn er verschillende regels. Door juist één beeld te schetsen van wat machtsverheffen precies betekent, zullen leerlingen hier makkelijker mee kunnen redeneren dan wanneer het allemaal onverbonden regels zullen zijn. Daarnaast zal vanuit het beeld al de genoemde regels kunnen worden ontwikkeld.

Beginnen met een kwalitatief begrip van machtsverheffen: Een van de grote problemen met het begrijpen van machtsverheffen is dat de getallen al snel erg groot of erg klein worden. Door gebruik te maken van visuele voorbeelden, zal dit leerlingen mogelijk een begrip geven wat voor verband er bij machtsverheffen is. Hieruit zullen dan verschillende verwachtingen ontwikkeld kunnen worden, bijvoorbeeld wat er gebeurt als de basis verandert, zonder dat er ook maar iets wordt berekend.

Werken met natuurkundige grootheden van continue aard: Wat bij deze methode voorop staat, is dat er een continu concept wordt ontwikkeld van exponenten. Hiervoor is het nodig dat de voorbeelden die gebruikt worden, ook een continu (in plaats van discreet) beeld hebben. Hiervoor kunnen we werken met bijvoorbeeld lengte, oppervlak en inhoud. Daarnaast zijn deze grootheden visueel voor de leerlingen.

Gehele getallen gebruiken als specifiek geval binnen het continue domein: Nu de leerlingen een beeld hebben van wat machtsverheffen inhoudt, kunnen we ook beginnen met het berekenen van verschillende machten. Hierbij is de berekening van machten met een natuurlijke exponent een begin.

Voorbeeld Het voorbeeld dat in dit onderzoek wordt gegeven, gaat over *magische rupsen.* Deze rupsen moeten een bepaalde hoeveelheid bladeren eten. Deze hoeveelheid is evenredig met de lengte van de rups. De rups krijgt hierdoor een andere lengte: hij wordt even lang als de lengte van de bladeren die hij gegeten heeft.

Dit voorbeeld heeft verschillende voordelen:

- Er kan gekozen worden voor een willekeurige begin-lengte;
- Er kan gekozen worden voor een willekeurige hoeveelheid die de rups moet eten conform de lengte;
- Er kan gekozen worden voor een willekeurige positieve basis. Het is zowel mogelijk dat de lengte afneemt als dat de lengte toeneemt.

- Er wordt geen specifieke tijdsperiode genoemd. Daarnaast kan er gewerkt worden met een tijdsperiode die gedeeld wordt in kleinere tijdsperiodes.

Doordat er geen getallen worden genoemd, worden beeld en berekening van elkaar gescheiden. Er wordt begonnen met een kwalitatief begrip van machtsverheffen, doordat leerlingen hierbij willekeurige begin-lengtes, hoeveelheden eten en basissen kunnen kiezen. Ook wordt er gewerkt met een natuurkundige grootheid van continue aard: lengte. Daarnaast worden gehele getallen gebruikt als specifiek geval binnen het continue domein. Deze zullen uiteindelijk geïntroduceerd worden zodra er getallen in de opgave gebruikt worden.

2.3.7 Samenvatting

In deze paragraaf zijn verschillende manieren langsgekomen hoe het onderwerp Machten en exponenten uitgelegd kan worden. Hierbij zijn ook enkele kritische opmerkingen geplaatst. De volgende manieren zijn langsgekomen:

- Splitsen
- Verband-leggende benadering
  - Covariationele benadering
  - Correspondentionele benadering
- Funcctionele benadering
- Algoritmische benadering
- Benadering van Pitta-Pantazi, Christou en Zachariades
- Continue concept van exponenten

Wat opvalt aan de meeste manieren, is dat ze vooral ingaan op het rekenkundig aspect. De uitzonderingen hierop zijn het continue concept van exponenten. Wel is het mogelijk om bij veel van deze manieren een voorbeeld te gebruiken als ondersteuning van de uitleg.

Een ander punt dat opvalt, is dat veel manieren gebruik maken van stapsgewijs introduceren van machtsverheffen, waarbij eerst alleen positieve gehele exponenten aan bod komen, vervolgens de exponent 0 en daarna ook de negatieve gehele exponenten. Pas later worden ook machten met een niet-gehele exponent geïntroduceerd.

3 Onderzoeksvragen

Zoals er in het voorgaande hoofdstuk (paragraaf 2.2) te zien is, zijn er veel misconcepties op het gebied van machtsverheffen. De onderzoeksvraag die hieruit voortvloeit, luidt:

Op welke manieren wordt onderwijs in machten en exponenten gegeven aan onderbouwleerlingen van vwo en wat zijn de leerresultaten?

Om hier een antwoord op te kunnen geven, zal worden gekeken naar de verschillende misconcepties die er zijn op dit gebied, maar ook naar de verschillende manieren van uitleg bij dit onderwerp.

Om erachter te komen welke misconcepties er bij dit onderwerp zijn, zal er zowel bij leerlingen als bij leraren een onderzoek gedaan worden. Welke misconcepties hebben de leerlingen van een derde klas vwo? En welke misconcepties herkennen leraren van de onderbouw bij hun leerlingen?

Vervolgens zal ook gekeken worden naar de manier van uitleg. Hierbij zal onderzocht worden op welke manier de verschillende leraren dit onderwerp introduceren. Hierbij is het ook van belang dat lesboeken geanalyseerd worden, omdat deze mogelijk een belangrijke rol spelen bij de manier van uitleg van de diverse docenten.

Het onderzoek zal gedaan worden aan de hand van de volgende deelvragen:

1. Welke misconcepties komen er voor bij leerlingen uit een derde klas vwo bij dit onderwerp?
2. Welke misconcepties herkennen leraren bij dit onderwerp?
3. Op welke manier wordt dit onderwerp uitgelegd door verschillende leraren?
4. Wat is de aanpak van de schoolboeken bij de uitleg van dit onderwerp?

4 Methode

Om een antwoord te vinden op deze vragen, zullen er een aantal dingen onderzocht worden. Als eerst zal er een toets afgenomen worden, waaruit de verschillende misconcepties naar voren zullen komen. Daarnaast zal ook aan leraren gevraagd worden middels een vragenlijst wat zij aan misconcepties tegenkomen bij hun leerlingen met betrekking tot dit onderwerp.

Vervolgens zal de leraren gevraagd worden naar hun manier van uitleg. Daarnaast zal ook een lesboek-analyse gedaan worden waarin wordt gekeken naar welke manier van uitleg de verschillende lesmethodes hebben.

4.1 Toets en interviews met leerlingen

4.1.1 Deelnemers

De deelnemende leerlingen waren 30 leerlingen uit klas 3 vwo, bestaande uit 26 meisjes en 4 jongens. Het onderwerp "machten en exponenten" was al eerder aan bod gekomen. De school waar deze leerlingen les krijgen, is een school met 1500 tot 2000 leerlingen. In deze klas zitten zowel atheneum als ook gymnasium leerlingen, zowel uit de stad als van het platteland. Op deze school wordt gebruik gemaakt van de methode Getal en Ruimte. Hierdoor hebben de leerlingen het onderwerp in klas 2 aan het begin van het jaar gehad, ongeveer een jaar geleden.

4.1.2 Dataverzameling

De data is verzameld door middel van een toets met alle deelnemende leerlingen, waarna een aansluitend interview gehouden is met vier van de deelnemende leerlingen, 2 jongens en 2 meisjes.

Creswell (2012) geeft aan dat het belangrijk is om toestemming te krijgen van de deelnemers om de data te verzamelen, het doel van het onderzoek mee te delen en de anonimiteit van de deelnemers te beschermen.

Hiervoor heb ik de leraar en leerlingen gevraagd of ze mee wilden werken aan het onderzoek, zowel voor de toets als voor het interview. Voordat de toets werd gegeven, heb ik uitgelegd wat het doel van het onderzoek was waar ik aan werk. Daarnaast zijn er bij de toets geen namen op de antwoordbladen geschreven, maar zijn de toetsen genummerd van leerling 1 tot leerling 30. Op deze manier wordt de anonimiteit van de leerlingen zo goed mogelijk gewaarborgd. Bij de interviews heb ik de leerlingen specifiek gevraagd of ze bezwaar hadden tegen het opnemen van het gesprek (alleen audio), voorafgaand aan dit gesprek. Hierbij kreeg ik toestemming van alle leerlingen.

Toets De toets werd gegeven tijdens een wiskundeuur van de leerlingen. De leerlingen kregen de hele les de tijd om hieraan te werken. Hierbij was het gebruik van een rekenmachine verboden.

De toets die afgenomen is, is hieronder te zien. Na de toets zal er ook een verantwoording gegeven worden van welke vragen in de toets zijn gezet, waar deze vragen vandaan kwamen en waarom deze vragen belangrijk zijn.

Opdracht 1: Bereken de volgende opgaven:

(a) 2^3
(b) -3^0
(c) 2^{-4}
(d) $5^6 \cdot 5^{-3}$
(e) $0,5^{18} \cdot 2^{18}$
(f) $3^5 \cdot 4^2$
(g) $9^4 : 3^4$

Opdracht 2: Er worden steeds 2 machten gegeven. Zet een $<$, $=$ of $>$ tussen deze machten.

(a) $23^8 \ldots 23^{13}$
(b) $24^9 \ldots 15^9$
(c) $(-12)^{13} \ldots (-12)^{17}$
(d) $-17^{-9} \ldots 17^{-9}$
(e) $0,5^{25} \ldots 0,5^{31}$
(f) $(-12)^{-7} \ldots (-12)^{-9}$

Opdracht 3

(a) Is 5^{12} een even of oneven getal?
(b) Is $(-3)^{10}$ een positief of negatief getal?
(c) Maak de volgende berekening: $2^x \cdot 2^y$

Opdracht 4
Kees heeft het volgende opgeschreven:

$$\frac{3^6}{3^4} = 1^2.$$

Schrijf een uitleg op voor Kees, zodat hij weet wat hij fout heeft gedaan en hoe hij het goede antwoord kan krijgen.

Opdracht 5
Jan heeft thuis een plant die erg snel groeit. Deze plant groeit exponentieel: elke dag wordt de plant vier keer zo groot als de dag ervoor. Op woensdagochtend 6 uur is deze plant 1 cm lang.

(a) Hoe lang is de plant op vrijdagochtend 6 uur (2 dagen later)?
(b) Hoe lang was de plant op maandagochtend 6 uur (2 dagen eerder)?
(c) Hoe lang is de plant op woensdagavond 18 uur? Hoe heb je dit berekend?
(d) Tegen een grafiek van het verloop van de lengte van de plant op het werkblad.

Werkblad:

Verantwoording opgaven Voor deze opgaven heb ik de volgende bronnen gebruikt:

Opdracht 1a,b,c,d,g	Ulusoy (2019)
Opdracht 2a,b,c,d,e,f	Pitta-Pantazi et al. (2007)
Opdracht 3a,b,c	Weber (2002a)
Opdracht 4	Thompson et al. (2012)
Opdracht 5	Het idee van een exponentieel groeiende plant komt van Ellis et al. (2013)

Opdracht 1e en 1f zijn daarna nog bijgevoegd, om ook de rekenregels hierbij te testen.

De bedoeling van de verschillende opgaven is als volgt: Bij opdracht 1 wil ik kijken welke misconcepties er zijn bij verschillende machten (positief, negatief en 0).

Bij opdracht 2 wil ik kijken of leerlingen wel begrijpen wat machtsverheffen inhoudt. Door machten te geven die niet gewoon uit te rekenen zijn, moet de leerling een verder gevorderd begrip hebben van wat machtsverheffen nu precies inhoudt.

Bij opdracht 3 wil ik extra inzichten testen: wanneer is een macht positief en wanneer negatief? En wanneer is een macht even en wanneer oneven? Maar ook: hoe moet je een vermenigvuldiging van machten met hetzelfde grondtal doen? Kennen de leerlingen hiervan de regel nog?

Bij opdracht 4 wil ik testen of de leerling begrijpt waar de regel $a^x/a^y = a^{x-y}$ vandaan komt.

Bij opdracht 5 wil ik testen of de leerling exponentiële groei kan begrijpen met de uitleg die ze tot nu toe hebben gehad. Bij het tekenen van de grafiek, worden daar de lijnen recht (lineair) of met een boog (exponentieel) getrokken? Hierbij worden de eerste opdrachten als inleiding op dit onderwerp gegeven, zodat de leerling al een aantal punten van de grafiek kan tekenen.

Interviews Met een aantal leerlingen heb ik nog een interview gehad naar aanleiding van de toets. Omdat de toetsen genummerd waren, is het niet mogelijk om deze leerlingen direct te linken aan een gemaakte toets. De leerlingen zijn daarom random geselecteerd uit de klas.

Tijdens dit interview werden er verschillende vragen van de toets besproken, waarna ook een tweetal opdrachten werd getoond met de vraag op welke manier deze opgaven opgelost zouden worden. De opgaven waar hierbij om gevraagd werd, waren opgaven waaruit niet direct duidelijk werd wat de redenering van de leerling was of waarbij het mogelijk was dat de leerling ging gokken. De opgaven die hierbij besproken zijn, zijn opgave 2, 3 en 5d. Bij opgave 2 zijn de eerste twee vragen overgeslagen, omdat hierbij het grootste deel van de leerlingen het juiste antwoord had. Bij opgave 3 is de laatste vraag overgeslagen, omdat hierbij bij het overgrote deel de redenering duidelijk was. De vragen voor de interviews zijn terug te vinden in appendix C

Resultatenverwerking Wat voor dit onderzoek het meest van belang is, zijn de fouten die gemaakt zijn op de toets. Daarom zal de analyse zich hier voornamelijk op richten.

Voor deze analyse zullen de verschillende categorieën fouten die bij het literatuuronderzoek naar voren kwamen, behandeld worden. Hierbij zal ingegaan worden op welke fouten er op de toets gemaakt worden, hoe vaak deze fouten voorkomen en hoe het kan dat deze fouten gemaakt worden. Het laatste zal gedaan worden naar aanleiding van het literatuuronderzoek en de interviews met leerlingen.

4.2 Vragenlijst voor leraren

4.2.1 Deelnemers

Voor dit deel van het onderzoek zijn ongeveer dertig leraren benaderd om mee te werken aan dit onderzoek. Deze leraren geven les aan een eerste, tweede of derde klas van het niveau mavo, havo of vwo. Uiteindelijk hebben van deze leraren negen de vragenlijst met antwoorden teruggestuurd. Twee van de leraren zijn beginnend leraar. De anderen zitten al jaren in het vak. Deze leraren geven les aan zes verschillende scholen door Nederland heen. Zes leraren gebruiken de methode Getal en Ruimte tegenover drie leraren die de methode Moderne Wiskunde gebruiken.

4.2.2 Dataverzameling

De data is verzameld door middel van een vragenlijst, die naar alle leraren is gestuurd via de mail, een "mailed questionaire", zoals Creswell (2012) dit noemt.

Vragenlijst Creswell geeft een aantal voor- en nadelen van deze manier van dataverzameling(Creswell, 2012, p. 383). Door deze manier van dataverzameling, kunnen respondenten uit een uitgebreid gebied bereikt worden. Omdat ik deelnemers uit verschillende hoeken van Nederland benaderen wilde, was dit een voordeel dat sterk meetelde. Het tweede voordeel dat genoemd wordt, is dat het ervoor zorgt dat de data vaak snel ontvangen kan worden. Vanwege het tijdsbestek van een masterscriptie is dit een praktisch voordeel. Daarnaast kan dezelfde mail vaker gebruikt worden om verschillende leraren te benaderen. Dit scheelt tijd en energie voor het benaderen van meerdere leraren.

Naast deze voordelen worden er ook twee nadelen genoemd. Ten eerste wordt er genoemd dat respondenten vragen verkeerd interpreteren. Door deze manier van werken is het niet mogelijk om er een vraag over te stellen. Mochten leraren dus een foute interpretatie hebben bij een vraag, dan zal de vraag ook anders beantwoord worden dan bedoeld. Ten tweede kan het voorkomen dat individuen niet reageren op de mail en zo niet meewerken aan het onderzoek. Dit was ook de reden dat er van de dertig benaderde leraren uiteindelijk maar negen meegewerkt hebben aan dit onderzoek. De reden voor dit lage percentage is de druk die op het moment dat dit onderzoek gedaan is, op de leraren lag. Veel leraren hadden het te druk met het organiseren van online lessen, waardoor het niet lukte om deze vragenlijst daarbij nog in te vullen.

De vragenlijst is voornamelijk gebaseerd op de methode Getal en Ruimte. De reden hiervoor is dat in Getal en Ruimte negatieve exponenten wel worden behandeld, terwijl dit niet het geval is bij Moderne Wiskunde. Leraren die les geven uit Moderne Wiskunde, kunnen de vragenlijst echter wel gewoon invullen. Bij een aantal vragen zullen ze waarschijnlijk invullen dat dit niet aan bod komt bij moderne wiskunde.

De vragenlijst bestaat uit twee delen. Het eerste deel gaat over de manier van uitleg. Het tweede deel over de misconcepties. Deze volgorde is gekozen, omdat deze voor leraren logischer is. Zo kunnen ze eerst vertellen wat ze zelf doen (uitleg), om vervolgens ook te vertellen wat ze daarvoor terugkrijgen van de leerlingen (misconcepties). In de verwerking zal dit echter omgewisseld worden. Het soort vragen wat hierdoor gesteld wordt, zijn open vragen. Daardoor kan de respondent zelf invullen wat de eigen ervaringen zijn.

Het eerste deel gaat over de manier van uitleg. Dit is verdeeld in drie stukken. Het eerste stuk gaat over klas 1, het tweede over klas 2 en het derde over klas 3. Op deze manier kunnen leraren die geen les geven aan een van deze klassen, dat stuk overslaan.

In dit deel wordt ingegaan op de verschillende onderwerpen die aan bod komen bij machtsverheffen. Hierbij wordt gevraagd of leraren het boek volgen bij de uitleg en wat ze hieraan toevoegen. Daarnaast wordt er ook gevraagd of leraren voorbeelden gebruiken waardoor leerlingen dit onderwerp beter kunnen plaatsen. Ook wordt er specifiek ingegaan op een aantal zaken die behandeld worden in de verschillende klassen, zoals de negatieve exponenten die in klas twee aan bod komen.

Het tweede deel van de vragenlijst gaat over de fouten die leraren tegenkomen bij dit onderwerp. Hierbij wordt gevraagd naar welke fouten leraren tegenkomen bij de verschillende categorieën fouten die gevonden zijn in de literatuur, zie paragraaf 2.2. Daarbij wordt gevraagd wat de leraren denken dat de reden is dat leerlingen deze fouten maken, maar ook wat leraren er aan doen om deze fouten te voorkomen.

De volledige vragenlijst is te vinden in appendix D.

Resultatenverwerking In de verwerking van de vragenlijsten zal eerst ingegaan worden op de misconcepties die leraren tegenkomen bij leerlingen met betrekking tot het onderwerp machten en exponenten. Bij de analyse zullen de misconcepties geplaatst worden in de verschillende categorieën uit paragraaf 2.2. Hierbij zullen de misconcepties die aangegeven zijn, behandeld worden door telkens te kijken naar wat volgens de leraren de reden is en wat de mogelijke oplossing is.

Hoe het andere deel van de vragenlijst behandeld wordt, is te vinden in de volgende paragraaf over de manieren van uitleg.

4.3 Manieren van uitleg - Vragenlijst voor leraren en een lesboek-analyse

Het wiskunde-onderwijs in Nederland wordt veelal bepaald door de verschillende lesmethodes (Olsen et al., 2008). Daarom zal er een lesboekanalyse gedaan worden van de twee meest gebruikte methodes van Nederland, Getal en Ruimte en Moderne Wiskunde, die in 2009 ongeveer 90% van de markt bepaalden (Van Stiphout, 2011, p. 12). Voordat de lesboekanalyse behandeld zal worden, zal eerst het deel uit de vragenlijst voor leraren behandeld worden, waarin de leraren aangeven hoe ze dit onderwerp uitleggen. Hierbij zal ook aangegeven worden wie het lesboek volgt en wie een andere uitleg volgt. Deze uitleg zal geanalyseerd worden naar aanleiding van de theorie van het Realistisch Reken- en Wiskundeonderwijs, waarop de Nederlandse lesmethodes gebaseerd zijn(Van Stiphout, 2013). Voordat hier op ingegaan zal worden, zal eerst uitgelegd worden wat "conceptual proficiency" inhoudt, een belangrijk onderdeel van deze theorie.

4.3.1 Conceptual proficiency

In het wiskundeonderwijs zijn er verschillende soorten opgaven. Veel van deze opgaven kunnen opgelost worden door een standaard procedure uit te voeren. Denk hierbij aan de balansmethode, waarmee (lineaire) vergelijkingen opgelost worden (zie hiervoor ook het onderzoek van Van Stiphout (2013)).

Andere opgaven eisen echter meer van leerlingen dan alleen een procedure uitvoeren. Denk hierbij aan bijvoorbeeld vergelijkingen als $2(3x + 2) = 3(2x -$

1) + 7, waarbij elke $x \in \mathbb{R}$ een oplossing is. Dit voorbeeld komt uit het onderzoek van Van Stiphout (2013), waarbij minder dan 10% van de leerlingen het antwoord kon geven.

In de vakliteratuur wordt meer gesproken over dit soort opgaven. Skemp (1976) heeft het bijvoorbeeld over "relational understanding", waarbij de leerling weet wat hij moet doen bij een opgave, maar ook waarom. Arcavi (1994) heeft het over "symbol sense", een gevoel voor formules en expressies. Hierbij worden onder andere ook de structuren van formules meegenomen. Daarnaast moet de leerling gebruik kunnen maken van deze structuren.

De vaardigheden die bij dit soort opgaven komen kijken, worden "conceptual proficiency" genoemd, waarbij Van Stiphout (2013, p. 33) een aantal punten noemt die hierbij cruciaal zijn:

- het zien en flexibel gebruik maken van de algebraïsche structuur;
- het omgaan met meerdere betekenissen van symbolen;
- het zien van samenhang tussen de verschillende wiskundige concepten.

4.3.2 Het Realistisch Reken- en Wiskundeonderwijs

Nu behandeld is wat er bedoeld wordt met "conceptual proficiency", zal ingegaan worden op de theorie van het Realistisch Reken- en Wiskundeonderwijs. Deze theorie is gebaseerd op de ideeën van Freudenthal. Freudenthal vond dat het wiskunde-onderwijs dusdanig ingericht moet worden, dat leerlingen de wiskunde kunnen heruitvinden, hierbij geholpen en begeleid door de leraren en het onderwijsmateriaal. Hierbij wordt het leerproces als essentieel gezien.

Bij deze theorie speelt modelleren een belangrijke rol. Een leerling moet een context-opgave modelleren, zodat er wiskundige procedures hierop toegepast kunnen worden. Leerlingen moeten deze modellen niet kant en klaar aangereikt krijgen, maar moeten deze modellen maken door hun eigen wiskundige activiteiten. Dit wordt ook wel "emergent modelleren" genoemd (Gravemeijer, 1999).

Bij dit leerproces wordt het eigen model dat ontwikkeld is bij deze opgaven, verder ontwikkeld tot een model voor formeel wiskundig redeneren (Van Stiphout, 2013). Langzamerhand verschuift het denken over de context die gemodelleerd is, naar het denken over de wiskundige relaties. Denk hierbij bijvoorbeeld aan de verschillende rekenregels die bij machtsverheffen aan bod komen.

4.3.3 Vragenlijsten voor Leraren - Manier van uitleg

Bij het analyseren van de vragenlijst voor leraren zal gekeken worden in hoeverre leraren het boek volgen met de uitleg. Daarnaast zal gekeken worden in hoeverre de uitleg van de leraren overeen komt met de theorie van het Realistisch Reken- en Wiskundeonderwijs.

Hiervoor zal in de eerste plaats gekeken worden naar de beantwoording van de vragen hoe het onderwerp geïntroduceerd wordt in de eerste klas en hoe hierop voortgebouwd wordt in de tweede en de derde klas.

Daarnaast zal ook gekeken worden hoe nieuwe onderdelen bij dit concept uitgelegd worden. Worden deze onderdelen uitgelegd door middel van een contextopgave of worden er nu andere manieren van introduceren gebruikt?

4.3.4 Drie categorieën opgaven

Voor het analyseren van de lesboeken gebruikt Van Stiphout (2013, p. 79) drie categorieën waarin de opgaven opgedeeld worden.

In de eerste categorie zitten de opgaven die leerlingen vragen te redeneren en rekenen in een specifieke context. Hierbij horen onder andere de volgende activiteiten: patronen zoeken in een specifieke situatie, informeel redeneren over een context en een grafiek tekenen vanuit een bepaalde context. Bij opgaven die in deze categorie zitten, ontlenen het grondtal en de exponent rechtstreeks betekenis uit de context.

In de tweede categorie gaat de aandacht meer van de context af naar de wiskundige eigenschappen en kenmerken die bij het onderwerp horen. Hierbij horen onder andere de volgende activiteiten: redeneren en rekenen met machten en het zoeken naar patronen bij de opeenvolgende machten. Bij opgaven uit deze categorie wordt het duidelijk welke rekenregels er zijn en hoe een exponentiële formule opgebouwd is.

In de derde categorie zitten opgaven die leerlingen helpen om "conceptual proficiency" te ontwikkelen. Voorbeelden van opgaven bij deze categorie zijn opgaven die betrekking hebben op reële exponenten en op relaties tussen de verschillende exponentiële formules.

Bij het analyseren zullen de opgaven verdeeld worden over deze drie categorieën. Hierbij zal gekeken worden hoe vaak elk soort opgave per jaar voorkomt in de verschillende lesmethodes bij het onderwerp machten en exponenten.

Voordat de opgaven verdeeld zullen worden over deze categorieën, zal eerst onderzocht worden op welke manier de methodes het onderwerp introduceren en behandelen. Dit zal vergeleken worden met de manieren van uitleg, besproken in paragraaf 2.3.

5 Resultaten

5.1 Toets bij leerlingen afnemen

Voor de analyse van de toets zijn de gegeven antwoorden in tabellen weergegeven in appendix B. Mocht het antwoord niet duidelijk genoeg zijn, is dit vakje leeggelaten.

In de toets werden veel fouten gemaakt. Deze fouten wil ik opdelen in de verschillende categorieën die genoemd zijn bij de misconcepties uit de literatuur, zie paragraaf 2.2. De misconcepties die hier niet onder vallen, zullen daarna besproken worden.

5.1.1 De betekenis van machtsverheffen

De betekenis van machtsverheffen wordt in opgave 1a getest. Uit de toets blijkt dat de meeste leerlingen machtsverheffen zien als een herhaalde vermenigvuldiging van een getal met zichzelf. Op deze manier werd 2^3 dan ook door bijna alle leerlingen goed gemaakt.

Er waren echter twee leerlingen die hierbij een fout maakten. Leerling 13 schreef op dat $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 12$, waarbij de fout zit in het uitrekenen van het product. Leerling 28 heeft geen berekening opgeschreven en gaf het antwoord 6, waarbij het aannemelijk is dat hierbij $2 \cdot 3$ is berekend. Toch laat deze leerling blijken uit opgave 1c dat het principe van machtsverheffen wel begrepen is, al wordt hierbij een andere fout gemaakt.

Sommige leerlingen passen dit principe echter niet goed toe, zodra er hogere machten in beeld komen. Bij opdracht 1e zijn verschillende leerlingen die overgaan op $a^x = a \cdot x$.

Hieronder nogmaals een opsomming van de behandelde fouten, waarbij ook het aantal dat deze fout gemaakt heeft, aangegeven wordt in de laatste kolom.

Opgave en antwoord	Fouten van leerlingen	Aantal keer
$2^3 = 8$	Goed antwoord	28
	$2^3 = 12$	1
	$2^3 = 6$	1
$0,5^{18} \cdot 2^{18} = 1$	Goed antwoord	1
	$0,5 \cdot 18 \cdot 2 \cdot 18$	3

5.1.2 Regels niet kennen

Verschillende opgaven waren gemaakt om te testen of leerlingen de rekenregels met betrekking tot machtsverheffen nog kenden. De fouten die bij deze regels gemaakt zijn, zullen in een tabel weergegeven worden. De regels die we hierbij langsgaan zijn:

1. De regel $a^0 = 1$
2. Regels met betrekking tot vermenigvuldigen van machten
3. Regels met betrekking tot delen van machten

In de onderstaande tabel worden de regels langsgegaan en aangeven welke fouten gemaakt zijn. Hierbij wordt ook aangegeven hoe vaak een fout voorkomt. Soms kan het zijn dat er twee fouten gemaakt worden bij een opgave. In dat geval telt dit zowel bij de een als bij de ander.

Regel	Opgaven	Fouten van leerlingen	Aantal keer
$a^0 = 1$	1b	Goed antwoord	1
		a	14
		0	15
$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	1d, 3c	Goed antwoord	1 en 0
		$(a \cdot a)^{x+y}$	3 en 0
		$a \cdot a \cdot xy$	0 en 12
		$(a \cdot a)^{xy}$	0 en 7
$a^x \cdot b^x = (ab)^x$	1e	Goed antwoord	1
		$(ab)^{2x}$	2
		$ax \cdot bx$	3
		ab	1 (in interview)
$a^x \cdot b^y$ kan niet verder vereenvoudigd worden	1f	Goed antwoord	7
		$(ab)^{xy}$	1
		$(ab)^{x+y}$	3
$a^x/b^x = (a/b)^x$	1g	Goed antwoord	1
		$(ax)/(bx)$	1
		$(a/b)^{2x}$	1
		a/b	2
		Geen regel toegepast	8
$a^x/a^y = a^{x-y}$	4	Goed antwoord	0
		Geen regel toegepast	10

Bij het vergelijken van deze fouten met de literatuur, valt het op dat veel van deze fouten ook al in de literatuur beschreven zijn. Een klein aantal fouten is hierbij niet beschreven, welke nu besproken zullen worden.

Geen regel toepassen

Bij de toets waren er een aantal opgaven waarbij er een regel toegepast moest worden om uiteindelijk over te blijven met een makkelijke opgave. Er waren echter veel leerlingen die deze regels niet meer kenden, waardoor de machten, hoe moeilijk ze soms ook waren, uitgerekend moesten worden.

De discussie zal blijven of dit daadwerkelijk een fout is. Zolang de berekening goed is, komt er uiteindelijk wel het juiste antwoord uit. Maar mochten de leerlingen bij opgaven uitkomen, waarbij er per se een regel toegepast moet worden (omdat er anders teveel werk zit in het berekenen van de machten), zullen ze deze niet kunnen oplossen. Ze hebben dus maar een beperkte kennis van machtsverheffen.

De regel $a^x/b^x = (a/b)^x$

Bij deze regel werd de volgende fout gemaakt: de exponenten werden bij elkaar opgeteld. Hierdoor kwam het antwoord $(a/b)^{2x}$ voor bij een leerling.

De regel $a^x \cdot b^x = (ab)^x$
Bij deze regel werd in de interviews de volgende fout gemaakt: De exponenten zijn gelijk, dus mogen ze weggehaald worden. Wat dan overblijft is $a \cdot b$.

Andere fouten Ook een aantal andere fouten werden gemaakt, die niet zo zeer betrekking hebben op deze regel, maar meer op de betekenis van het machtsverheffen, omdat hierbij a^x gezien werd als $a \cdot x$.

5.1.3 Mintekens in de machten

Ook met mintekens zijn diverse fouten gemaakt. In de onderstaande tabel wordt weergegeven welke soort fouten leerlingen hebben gemaakt bij zowel mintekens in de basis als in de exponent.

Plaats van het minteken	Opgaven	Fouten
Exponent	1c, 1d, 2d	a^{-x}: $-a^x$, $\frac{x}{a}$
Grondtal	2c, 3b	$(-3)^{10}$: 1 min, dus negatief $(-3)^{10} = -3^{10}$
Grondtal en exponent	2f	2 minnen, dus positief. $-7 > -9$, dus $(-12)^{-7} > (-12)^{-9}$

In deze tabel is niet, zoals wel in de voorgaande tabellen, het aantal keer aangegeven dat een fout gemaakt is. Dit heeft te maken met het feit dat verschillende van deze fouten gemaakt zijn in opgave 2 zonder uitleg erbij te geven. Bij deze opgave is het daarom erg lastig om erachter te komen welke fout er gemaakt wordt.

Uit de interviews bleek echter dat deze fouten wel degelijk gemaakt worden bij deze opgaven. Daarom is het niet onbelangrijk om ook deze fouten te verwerken in dit onderzoek.

De fout die het meest voorkwam, had te maken met een negatieve exponent. Veel leerlingen haalden het minteken uit de exponent en schreven deze voor het grondtal. De reden hiervoor wordt eigenlijk al eerder in de toets gezocht. Veel leerlingen wisten niet meer wat de exponenten betekenden zodra deze niet meer positief en geheel waren. Leerlingen maakten daarom al veel fouten met de exponent 0 en zo ook met negatieve exponenten. Hierdoor beginnen leerlingen te raden wat er dan met negatieve exponenten bedoeld wordt.

Een andere fout die veelvuldig voorkwam, was dat de min in de exponent en de min in het grondtal tegen elkaar weggestreept worden, ondanks dat ze een totaal andere betekenis hebben. Hierdoor had een groot aantal leerlingen opdracht 2f per ongeluk goed. Deze fout heeft eigenlijk dezelfde reden als de vorige fout. Leerlingen weten niet wat ze moeten doen, dus gaan ze bedenken wat ze zouden kunnen doen.

5.1.4 Gebroken exponenten

Gebroken exponenten zijn eigenlijk niet getest in deze toets. Alleen in opdracht 5 moet de leerling een grafiek tekenen van een plant die exponentieel groeit. Hierbij wordt specifiek nog gevraagd naar het berekenen van de lengte na een halve dag, waarbij eigenlijk $4^{0,5} = \sqrt{4}$ uitgerekend moet worden. 1 leerling kwam met het idee dat er $1 \cdot 4^{0,5}$ gedaan moest worden, maar heeft hierbij uiteindelijk $4 \cdot 0,5$ van gemaakt. Hierdoor is dit toch niet goed gerekend.

5.1.5 Lineaire regels toepassen bij exponentiële groei

Bij het tekenen van de grafiek bij opdracht 5d heeft het grootste deel rechte lijnen getrokken tussen de verschillende punten. Maar 1 leerling heeft een exponentiële groei getekend.

Van de leerlingen die geïnterviewd waren, was er niemand die gedacht had aan het tekenen van een gebogen lijn. Het is ook makkelijker om rechte lijnen te tekenen. Dit stemt overeen met het artikel van Van Dooren et al. (2005), waarin wordt gesteld dat veel leerlingen de neiging hebben "om uit te gaan van een lineair verband tussen grootheden in situaties waar in feite een ander verband aan de orde is"(Van Dooren et al., 2005, p. 30).

Daarnaast werd, zoals bij gebroken exponenten al aangehaald, ook 5c op deze manier verkeerd beantwoord. Hierbij deelde het grootste deel van de leerlingen 4 door 2, om uiteindelijk bij de factor 2 uit te komen. Dit is echter niet de bedoeling bij deze opgave.

5.2 Leraren interviewen - Misconcepties

Ook leraren geven aan veel fouten met betrekking tot dit onderwerp te zien. In dit deel wil ik de eerder genoemde categorieën fouten (zie paragraaf 2.2 voor deze categorieën) langs gaan, hierbij aangeven welke fouten door leraren gevonden worden en wat volgens hen de beste manier is om dit aan te pakken.

Een aantal leraren gaf bij de verschillende fouten dezelfde manier van aanpak om deze fouten te voorkomen. Deze manieren zullen nu eerst behandeld worden.

5.2.1 Algemeen - redenen van de verschillende fouten

Een van de redenen die genoemd wordt waarom leerlingen zoveel fouten maken met machtsverheffen, is dat leerlingen nog niet genoeg geoefend hebben. Hierdoor zit de kennis nog niet ingeslepen, aldus leraar 1 en 5.

De oplossing hiervoor wordt dan ook geboden door meer oefenen (leraar 1, 2, 4, 5, 7, 8 en 9), ook klassikaal (leraar 2, 4, 8 en 9) of in groepjes (leraar 8). Daarnaast is het ook van belang om de fouten duidelijk te benoemen in de les (leraar 1, 2, 4 en 6). Hierbij zou ook een quiz gemaakt kunnen worden (leraar 1 en 5) met vragen die aan het eind besproken worden.

Andere redenen die genoemd zijn, hebben veelal betrekking op specifieke soorten fouten. Deze zullen nu behandeld worden.

5.2.2 Betekenis van machtsverheffen

De fout $a^p = a \cdot p$ wordt door alle leraren aangegeven als fout die ze tegenkomen bij leerlingen. Naast de algemene reden dat de leerlingen te weinig geoefend hebben (behandeld in paragraaf 5.2.1), wordt er nog een reden genoemd waarom leerlingen deze fout maken. Leerlingen hebben niet door dat machtsverheffen herhaald vermenigvuldigen is, aldus leraar 3. Leerlingen begrijpen het concept van machtsverheffen dus nog helemaal niet.

De oplossing voor dit probleem wordt gegeven door leraar 3: geef eerst les op concreet niveau, begin daarna pas te abstraheren. Laat leerlingen eerst kennis maken met het concept door middel van diverse voorbeelden, zodat leerlingen begrijpen wat machtsverheffen inhoudt. Pas als ze dit begrijpen, kunnen ze ook de moeilijkere en abstractere opgaven begrijpen en maken.

5.2.3 Regels niet kennen

Veel meer fouten dan bij de betekenis van machtsverheffen, worden gevonden bij de verschillende rekenregels. In tabel 3 is een overzicht van welke fouten genoemd zijn door de leraren.

Regel	Fout door leraren aangegeven
$a^0 = 1$	$a^0 = 0$
$\left(\frac{a}{b}\right)^p = a^p/b^p$	$\left(\frac{a}{b}\right)^p = a^p/b$
$a^p/a^q = a^{p-q}$	a^p/a^q kan niet verder herleid worden.
$(a^p)^q = a^{pq}$	$(a^p)^q = a^{p+q}$
$x^2 + x^2 = 2x^2$	$x^2 + x^2 = x^4$
$a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	$a^p \cdot a^q = apq$
Alle regels	Door elkaar halen wanneer exponenten opgeteld, vermenigvuldigd of afgetrokken moeten worden en wanneer de grondtallen vermenigvuldigd of gedeeld moeten worden.

Tabel 3: Fouten met betrekking tot regels van machtsverheffen, door leraren aangegeven

Er worden een aantal redenen genoemd waarom deze fouten voorkomen bij leerlingen. Rekenregels worden vaak toegepast zonder dat er een begrip is waarom deze rekenregel geldt (leraar 9). Op deze manier zal het fout blijven gaan. Daarnaast wordt de stof vaak te snel geabstraheerd (leraar 3 en 5). Begin dus op concreet niveau en pas als dit begrepen wordt, maak het dan abstracter.

Wat erg belangrijk is, is om de regels vaak te herhalen (leraar 1, 5, 6, 7, 9), waarbij bij elke opgave de rekenregel ernaast gezet moet worden (leraar 9).

Ook socratisch lesgeven wordt genoemd door leraar 3. De leerling werkt eerst de som uit, om vervolgens (mocht het antwoord fout zijn) door vragen van de leraar erachter te komen dat er een fout zit in de berekening. Op deze manier ontdekt de leerling wat nu wel de juiste manier van uitrekenen is, om zo de rekenregels die horen bij machtsverheffen te weten te komen.

5.2.4 Fouten met een minteken

De leraren geven ook enkele fouten aan met betrekking tot het minteken. De eerste fout is dat een minteken in het grondtal niet wordt meegerekend in het grondtal (dus $(-3)^2 = -9$ of $-3^2 = 9$, leraar 1, 2, 5, 6, 7, 8 en 9). De tweede fout die aangegeven wordt, is dat een minteken in de exponent wordt verruild voor een minteken in het grondtal ($2^{-3} = -2^3$) (leraar 3).

Er worden een aantal redenen genoemd waarom leerlingen deze fouten maken. Voor de eerste fout (met het minteken in het grondtal) worden twee redenen genoemd. De eerste reden is dat leerlingen het fout in de rekenmachine intoetsen (leraar 2, 7 en 9). De tweede reden is dat leerlingen het verschil met en zonder haakjes niet weten (leraar 5). Hierbij geeft leraar 5 aan dat het handig is om -3 te herschrijven als $(-1 \cdot 3)$. Hierdoor zien leerlingen dat de -1 in het grondtal staat wanneer er haakjes gebruikt worden, maar dat de -1 zonder haakjes buiten het grondtal blijft staan.

Voor de tweede fout (met het minteken in de exponent) wordt ook een reden en een oplossing gegeven door leraar 3. Leerlingen weten niet wat het minteken in de exponent betekent. Om dit op te lossen, kunnen rijen met $3^2 = \quad 3^1 = \quad 3^0 = \quad 3^{-1} =$ gebruikt worden. Hierdoor ziet de leerling het verband tussen de verschillende machten en zal er begrip kunnen komen wat negatieve exponenten nu precies inhouden.

5.2.5 Gebroken exponenten

Bij gebroken exponenten zijn er twee fouten die genoemd worden door leraren. De eerste is dat leerlingen hogere machtswortels niet zien als een macht met gebroken exponent (leraar 8). Hierdoor kan het zijn dat leerlingen een hogere machtswortel zien als een macht met negatieve exponent. Zo wordt $\sqrt[3]{x}$ gelijk gesteld aan x^{-3} (leraar 9).

Een tweede fout die genoemd wordt, is dat leerlingen niet weten wat $x^{\frac{1}{2}}$ betekent (leraar 3). x^1 kunnen ze uitrekenen aan de hand van de definitie van machtsverheffen, het herhaald vermenigvuldigen. Hoe ze echter om moeten gaan met de noemer weten ze niet.

Specifieke oplossingen worden voor deze problemen niet geboden. Het enige wat bij deze antwoorden wordt genoemd, is dat leerlingen meer moeten oefenen.

5.2.6 Andere fouten

Een fout die niet bij de bovenstaande fouten behoort, is het niet gebruiken van de rekenvolgorde (leraar 2 en 3). Een oorzaak hiervoor ligt al bij de basisschool, aldus leraar 2. Daar wordt de rekenvolgorde niet of niet goed aangeleerd.

Leraar 3 geeft hiervoor een oplossing. Maak contextopgaven waaruit blijkt dat de rekenvolgorde wel degelijk van belang is. Hierbij geeft hij het onderstaande voorbeeld.

100 bacteriën verdubbelen zich elk uur. Maak hier een tabel van, zoals hieronder weergegeven. Vergelijk dit met 250 bacteriën die zich elk uur verdubbelen. Dan zie je uiteindelijk dat na 3 uur nog steeds dezelfde factor tussen deze bacteriën zit, namelijk $2,5$. Vandaar dat ook $100 \cdot 2^3$ uitgerekend moet worden door eerst 2^3 uit te rekenen en vervolgens pas vermenigvuldigd moet worden met 100.

Tijd (s)	0	1	2	3
Bacteriën	100	200	400	800

5.3 Leraren interviewen - Manieren van uitleg

Bij het introduceren van het onderwerp machtsverheffen gebruiken de verschillende leraren verschillende manieren. Hierbij zijn een aantal verschillende mogelijkheden (of combinaties hiervan) die leraren aangeven:

1. Het lesboek of de methode volgen
2. Introduceren aan de hand van exponentiële voorbeelden

5.3.1 Het lesboek of de methode volgen

Acht van de negen leraren (leraar 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 en 9) geven aan het lesboek te volgen met betrekking tot de uitleg. De uitleg die in het boek staat, wordt gebruikt om de leerlingen de lesstof te laten begrijpen en ze de opgaven te laten maken. Leraar 2 en 5 geven hierbij aan wel aan te sluiten op de kennis die de leerlingen verworven hebben in voorgaande jaren.

De uitleg die de boeken beschrijven, is terug te vinden in paragraaf 5.4, waar ingegaan wordt op de verschillende lesmethodes.

5.3.2 Introduceren aan de hand van exponentiële voorbeelden

Leraar 3 gebruikt echter het boek niet als leidend middel: "Het boek is slechts een apparaat dat opgaven aanlevert". In zijn lessen gebruikt hij voorbeelden om machtsverheffen te introduceren.

Er zijn verschillende bekende voorbeelden van exponentiële groei, waarvan leraar 3 ook enkele gebruikt. Drie daarvan zijn de schaaklegende (leraar 3 en 6), bacteriën die zich vermenigvuldigen (leraar 3) en spaarrente die jaarlijks met hetzelfde percentage toeneemt/afneemt (leraar 8 en 9).

De schaaklegende, ook bekend als de "wheet and chessboard problem", onder andere beschreven door Robitaille (1974), gaat over een koning die de uitvinder van het schaakspel wilde bedanken. Deze uitvinder vroeg hiervoor om rijst. Op het eerste vakje van het schaakbord 1 korrel, op het tweede vakje 2 korrels, op de derde 4 en zo telkens op een volgend vakje dubbel zoveel als op de voorgaande.

Dit leek een verzoek wat erg klein was; in de eerste acht vakjes komen namelijk nog maar 255 rijstkorrels. Maar dit aantal wordt al snel meer. Uiteindelijk bleek dat hiervoor erg veel rijst nodig was, namelijk 18.446.744.073.709.

551.615 rijstkorrels, wat volgens Robitaille (1974) gelijk stond aan meer dan 500 jaar de rijstoogst van de gehele wereld.

Een ander voorbeeld waarin exponentiële groei wordt gebruikt, is bacteriën die elk uur in aantal verdubbelen. Na een t aantal uur zijn er 2^t maal zoveel bacteriën als daarvoor. Voor een voorbeeld-opgave hiervan, zie appendix E.

Aan de genoemde voorbeelden zitten echter nog wel een beperking: alleen positieve gehele exponenten kunnen hiermee geïntroduceerd worden. Gebroken of reële exponenten hebben extra uitleg nodig. Negatieve exponenten zou in het geval van bacteriën nog wel te introduceren zijn, door "terug te gaan in de tijd", aldus leraar 5.

Een voorbeeld waarbij deze beperkingen echter niet spelen, is te vinden in de paragraaf over het continue concept van machtsverheffen (2.3.6). Hierbij wordt het voorbeeld van magische rupsen uitgelegd.

In het kader van het emergent modelleren is dit een goede manier om het onderwerp te introduceren. Op deze manier moet een leerling namelijk een context modelleren. Van hieruit kan dan uiteindelijk ook dieper op de stof ingegaan worden.

5.3.3 Overige uitleg

Wat opvalt bij het uitleggen van diverse rekenregels, is dat er weer wordt overgeschakeld naar rekenkundige principes. Zo wordt bij machten delen aandacht geschonken aan het principe van delen. "Bij de deling 15:5 moet worden gekeken hoe vaak 5 in 15 past", aldus leraar 3. Daarom moet er bij een deling als $x^5 : x^3$ gekeken worden hoe vaak x^3 in x^5 past, wat x^2 keer is.

Daarnaast worden negatieve exponenten door leraar 3 uitgelegd met behulp van structuur-rijen. Hierbij worden $4^3 =$, $4^2 =$, $4^1 =$, $4^0 =$ en $4^{-1} =$ onder elkaar gezet. De eerste drie kunnen direct opgelost worden. Vervolgens wordt er gekeken naar het verband tussen deze machten, waarbij de leerling moet inzien dat er gedeeld wordt door 4 als de exponent 1 minder wordt. Door dit te extrapoleren, zal uiteindelijk onder andere $4^{-3} = \frac{1}{4^3}$ gevonden worden. Door hierna ook letters in te voeren, zullen leerlingen de algemene regel ontdekken: $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$.

Gebroken exponenten worden door leraar 3 uitgelegd aan de hand van de rekenregels $(a^p)^q = a^{pq}$ en $(\sqrt[p]{x})^p = x$, waarbij de eerste gebruikt wordt om $(x^{\frac{1}{p}})^p = x$ aan te tonen. Hierdoor moeten $\sqrt[p]{x}$ en $x^{\frac{1}{p}}$ wel gelijk zijn.

Deze manieren van uitleg passen echter niet thuis in het kader van het emergent modelleren. Hierbij wordt namelijk niet een voorbeeld uit de praktijk gemodelleerd, voordat er formelere wiskunde aan te pas komt, maar wordt de formele wiskunde direct geïntroduceerd.

5.4 Schoolboeken

De analyse van de schoolboeken zal verdeeld worden in twee delen. In het eerste deel (paragraaf 5.4.1-5.4.3) zullen de twee methodes Getal en Ruimte en Moderne Wiskunde behandeld worden met betrekking tot de manier van uitleg.

In het tweede deel zal ook gekeken worden naar de soort opgaven, gebaseerd op de drie categorieën die genoemd zijn in paragraaf 4.3.4.

5.4.1 Getal en Ruimte

Definities en uitleg Het onderwerp "Machten en exponenten" wordt door de hele schoolperiode behandeld. In de volgende tabel is per onderwerp te vinden in welk jaar dit geïntroduceerd wordt. Veel van deze onderwerpen worden in de jaren erna weer herhaald. Deze tabel is verdeeld in 4 gedeeltes: De definities, de regels, wetenschappelijke notatie en exponentiële groei.

Onderwerp	Klas 1	Klas 2	Klas 3
Definitie macht, grondtal en exponent	8.3		
Rekenvolgorde	8.3		
Machten met een negatief grondtal	8.3		
Machten vermenigvuldigen	8.5	1.4	
Machten optellen	8.5	1.4	
Machten van producten	8.6	1.4	
Machten van machten	8.6	1.4	
Machten delen		1.5	
Machten met een negatieve exponent		1.5	
Wortel als macht		4.4	
Wetenschappelijke notatie bij			
grote getallen (groter dan 1)	8.4	1.6	
kleine getallen (kleiner dan 1)		1.6	
Definitie en formule van exponentiële groei			8.1
Exponentiële afname			8.1
Lineaire en exponentiële groei vergeleken			8.3
Machtsfuncties ($f(x) = ax^n$)			8.5
Hogeremachtsvergelijkingen			8.6

In hoofdstuk 8 van klas 1 worden machten voor het eerst geïntroduceerd. Dit wordt gedaan met een inleidende opdracht over een proefwerkblaadje door midden scheuren. De twee helften worden vervolgens op elkaar gelegd en nogmaals door midden gescheurd. Op deze manier krijgen we steeds een verdubbeling van het aantal papiertjes, ofwel een exponentiële groei van het aantal papiertjes.

Door deze manier van introduceren, zullen leerlingen wel machten met een positief gehele exponent kunnen begrijpen. Teruggaan naar een negatieve exponent is echter veel moeilijker, maar niet onmogelijk. Zo zou je bijvoorbeeld de helft van het aantal papiertjes van de stapel weg kunnen nemen. Op die manier vermenigvuldig je het eigenlijk met 2^{-p}.

Ook moet het grondtal bij dit voorbeeld een positief geheel getal zijn. Wat betekent het als je een papier in 0 stukken scheurt? Of in een negatief aantal stukken?

Daarnaast zorgt deze manier er ook voor dat gebroken exponenten en exponenten met een rationeel getal niet begrepen zullen worden met dit voorbeeld. Wat betekent het als je een papier 2,5 keer door midden scheurt?

Hierna worden machten geïntroduceerd:

Een macht is een product van gelijke factoren

De bovenstaande definitie beperkt zich tot natuurlijke getallen in de exponent. Wel worden ook machten met een negatief grondtal hierbij inbegrepen, welke ook worden behandeld in dezelfde paragraaf. Hierbij wordt nadrukkelijk ingegaan op wanneer een macht positief of negatief is bij een negatieve basis.

Het voorbeeld van het scheuren van een papier wordt echter niet verder gebruikt in de rest van de opgaven.

Vervolgens worden regels behandeld over het vermenigvuldigen van machten, wanneer je machten kunt optellen (gelijksoortige termen), hoe je een macht van een product en een macht van een macht berekent. Het vermenigvuldigen van machten, een macht van een product en een macht van een macht worden uitgelegd aan de hand van rekenkundige voorbeelden, zoals $(ab)^5 = ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab \cdot ab = a^5b^5$(Dijkhuis et al., 2017, p. 114). Daarna wordt uit deze voorbeelden een regel getrokken: "Bij een macht van een product neem je elke factor tot die macht"(Dijkhuis et al., 2017, p. 114). De uitleg bij wanneer en hoe je machten kunt optellen, gebruikt een voorbeeld van een kubus. Elke zijde heeft een oppervlak van a^2, dus is de totale oppervlak $6a^2$. Daarna worden er weer rekenkundige voorbeelden gegeven: $3a^2 + 5a^2 = a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 + a^2 = 8a^2$.

In hoofdstuk 1 van klas 2 wordt er veel herhaling gegeven over machten en exponenten. Daarnaast worden er nog twee regels gegeven over machten delen en negatieve machten, $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ en $a^{-p} = \frac{1}{a^p}$. Bij de eerste regel wordt weer een voorbeeld gegeven ($a^7 : a^3 = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a} = a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4$), waarna de regel $a^x : a^y = a^{x-y}$ gegeven wordt. Voor de tweede regel wordt de eerste regel toegepast bij het voorbeeld $\frac{x^3}{x^5} = x^{-2}$. Daarnaast wordt de genoemde deelsom uitgerekend, zodat er $\frac{1}{x^2}$ uit komt. Door nu deze twee antwoorden aan elkaar gelijk te stellen, krijgen we $x^{-2} = \frac{1}{x^2}$. Hieruit volgt vervolgens de algemene regel $x^{-p} = \frac{1}{x^p}$.

In hoofdstuk 4 van klas 2 wordt er gesproken over wortels. Hierbij wordt ook de regel $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ gegeven.

In hoofdstuk 8 van klas 3 wordt het onderwerp exponentiële groei en afname geïntroduceerd. Bij exponentiële groei wordt als voorbeeld het aantal elektrische auto's in Nederland gegeven. Elk jaar wordt dit aantal verdubbeld, aldus het voorbeeld. Hier volgt vervolgens de formule $N = 10000 \cdot 2^t$ uit. Hier volgt een algemene formule uit: $N = b \cdot g^t$. Aan de hand van deze formule worden de begrippen "beginhoeveelheid" en "groeifactor" uitgelegd.

Bij exponentiële afname wordt uitgelegd hoe aan de formule gezien kan worden of er sprake is van toe- of afname. $g > 1$ betekent toename. $0 < g < 1$ betekent afname.

Lineaire en exponentiële groei worden daarna met elkaar vergeleken. Hierbij worden lineaire groei en exponentiële groei uitgelegd als "Per tijdseenheid neemt de hoeveelheid met hetzelfde aantal toe" en "Per tijdseenheid wordt de hoeveelheid met dezelfde factor vermenigvuldigd"(Dijkhuis et al., 2019, p. 98) respectievelijk.

Vergelijking met de literatuur Getal en Ruimte maakt gebruik van de correspondentiële benadering. Eerst wordt de regel gegeven, namelijk $a^p = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (p keer). Deze regel wordt vervolgens toegepast bij een aantal opgaven.

Andere regels worden afgeleid van deze regel, zoals de regels van het vermenigvuldigen en delen van machten, maar ook regels over machten van machten. Op basis van deze regels worden vervolgens ook negatieve exponenten geïntroduceerd.

Ook bij de exponent $\frac{1}{2}$ worden deze regels gebruikt om deze exponent te introduceren. Hierbij wordt gebruik gemaakt van de logica dat $\sqrt{x}^2 = x = (x^{1/2})^2$.

5.4.2 Moderne Wiskunde

Definities en uitleg Het onderwerp "Machten en exponenten" wordt door de hele schoolperiode behandeld. In de volgende tabel is per onderwerp te vinden in welk jaar dit introduceert. Veel van deze onderwerpen worden in de jaren erna weer herhaald. Deze tabel is verdeeld in 4 gedeeltes: De definities, de regels, wetenschappelijke notatie en exponentiële groei.

Onderwerp	Klas 1	Klas 2	Klas 3
Definitie macht, grondtal en exponent	8.2		
Rekenvolgorde	8.2		
Machten met een negatief grondtal	9.5		
Machten vermenigvuldigen			9.2
Machten van producten			9.3
Machten van machten			9.2
Machten delen			9.2
Machten met een negatieve exponent			
Wortel als macht			
Wetenschappelijke notatie bij			
grote getallen (groter dan 1)		7.5	
kleine getallen (kleiner dan 1)		7.5	
Definitie en formule van exponentiële groei		7.3-7.4	1.4-1.5
Exponentiële afname		7.4	1.4-1.5
Machtsfuncties ($f(x) = ax^n$)			7.4
Hogeremachtsvergelijkingen			11A.4, 11B.4

In hoofdstuk 8 van klas 1 wordt het onderwerp Machten en exponenten geïntroduceerd. Hierbij wordt begonnen met het herhalen van kwadraten.

Hierna wordt er een voorbeeld gegeven van bacteriën die elk uur verdubbelen. Op deze manier wordt een tabel gemaakt, waarbij elk uur het aantal bacteriën verdubbelt.

Op deze manier zullen leerlingen machten met positieve gehele exponenten kunnen begrijpen. Voor het behandelen van negatieve of gebroken exponenten zal er echter een ander voorbeeld gebruikt moeten worden.

In dit hoofdstuk wordt een macht uitgelegd aan de hand van een voorbeeld: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$, dus 81 is de vierde macht van 3.

In hoofdstuk 9 wordt nogmaals machtsverheffen aangestipt, waarbij negatieve grondtallen gebruikt worden. Hierbij wordt ook aangegeven wanneer een getal positief of negatief is, namelijk bij een even of oneven exponent, respectievelijk. Dit wordt vervolgens met een voorbeeld aangetoond.

In hoofdstuk 7 van klas 2 worden exponentiële groei en afname geïntroduceerd, waarbij ook de formule $h = b \times g^t$ wordt gegeven. Hierbij wordt ook de afspraak $g^0 = 1$ genoemd.

In dit hoofdstuk worden verschillende voorbeelden gegeven. Het eerste voorbeeld gaat over een groot meer met snelgroeiende waterplanten, waarvan de hoeveelheid in een week verdubbelt. De tweede gaat over een olie dat zich over water verspreidt. De olievlek wordt elk uur drie keer zo groot.

Wat opvalt bij deze voorbeelden, is dat dit continue veranderingen zijn, waarbij ook gebroken exponenten een rol kunnen gaan spelen. Daarnaast is het ook mogelijk om bij deze voorbeelden terug te gaan in de tijd en zo te werken met negatieve exponenten.

Rekenregels worden in hoofdstuk 9 van klas 3 voor het eerst genoemd. Dit wordt gedaan door eerst een opgave te geven waaruit deze regels volgen. Vervolgens worden in de uitleg deze regels gegeven, waarna deze regel toegepast wordt bij een aantal voorbeelden.

Vergelijking met de literatuur De manier die Moderne Wiskunde gebruikt om machten en exponenten te introduceren, lijkt op de functionele benadering. Eerst worden de machten met natuurlijke getallen in de exponent uitgelegd aan de hand van de definitie $a^x = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ (n keer). Vervolgens wordt er een grafiek getekend die door deze punten heen loopt, voor alleen de positieve punten. Hierbij wordt de formule voor deze lijn gegeven.

Deze grafiek wordt gegeven, door middel van het voorbeeld van waterplanten die erg snel groeien. Doordat het startpunt niet op 0 maar op b (uit de formule $b \times g^t$) ligt, wordt hieruit geconcludeerd dat $g^0 = 1$.

5.4.3 Getal en Ruimte versus Moderne Wiskunde

Getal en Ruimte introduceert het onderwerp Machten en exponenten op een andere wijze dan Moderne wiskunde. Bij de eerstgenoemde wordt er begonnen met exponenten met een positief geheel getal, waarna hiervoor regels worden gemaakt. Vanuit deze regels worden ook negatieve machten geïntroduceerd. Vervolgens wordt in klas 3 de exponentiële groei uitgelegd.

Bij Moderne wiskunde wordt het onderwerp eerst ook geïntroduceerd met exponenten met een positief geheel getal. Hierna gaat men echter al direct over naar exponentiële groei, waarbij alleen positieve exponenten gebruikt worden. Pas in klas 3 worden rekenregels met betrekking tot machtsverheffen uitgelegd.

Wat opvalt bij Moderne Wiskunde is dat er weinig aandacht is voor negatieve exponenten. De enige plaats waar deze voorkomen, is bij de wetenschappelijke notatie of, zoals de methode dit noemt, de standaardvorm.

5.4.4 Analyse opgaven

Bij de analyse van de opgaven zullen de drie categorieën opgaven die in paragraaf 4.3.4 uitgelegd zijn, besproken worden. In deze paragraaf zal nog dieper ingegaan worden op verschillende opgaven die bij deze categorie horen.

Eerste categorie In de eerste categorie zitten opgaven die een contextuele situatie analyseren. Een voorbeeldopgave uit Getal en Ruimte gaat over de quiz "Hoe word ik miljonair?", waarbij een deelnemer begint met 50 euro, waarna dit bedrag telkens verdubbeld wordt bij een goed antwoord. Bij een fout antwoord valt de deelnemer terug tot een kwart van het opgebouwde bedrag en is uitgeschakeld. Bij deze opgave wordt gevraagd op welk bedrag iemand staat die vijf antwoorden goed heeft. Daarna wordt gevraagd met welk bedrag iemand naar huis gaat die na 8 goede antwoorden een fout maakt. Als laatst wordt gevraagd na hoeveel goede antwoorden iemand miljonair is. (Dijkhuis et al., 2017, p. 107)

De relatie tussen de opeenvolgende bedragen is exponentieel, maar in deze opgave wordt de term "exponentieel" niet gebruikt. Het grondtal en de exponent ontlenen hun betekenis direct uit de context.

Tweede categorie In de tweede categorie zitten opgaven waarbij de focus niet meer ligt op de context, maar meer op de wiskundige eigenschappen en kenmerken van de context. Een opgave uit Getal en Ruimte die bij deze categorie hoort, gaat over het aantal inwoners in Litouwen. Op 1 januari 2017 is dit aantal 2,82 miljoen. Jaarlijks wordt het aantal inwoners met 0,987 vermenigvuldigd. Hierbij wordt eerst gevraagd om de formule voor exponentiële groei op te stellen voor dit probleem. Daarna wordt gevraagd hoeveel inwoners er zijn op 1 januari 2027. Hierna wordt gevraagd in welk jaar voor het eerst minder dan 2,3 miljoen inwoners in Litouwen zijn. Als laatst wordt gevraagd met hoeveel het inwonersaantal daalt tussen 1 januari 2020 en 1 januari 2030. (Dijkhuis et al., 2019, p. 93)

In deze opgave moet de leerling weten hoe een exponentiële formule opgebouwd is en hoe deze samen te stellen is uit de gegevens die hij krijgt. Daarnaast moet deze formule een aantal keer ingevuld worden om bepaalde antwoorden te vinden. De focus ligt niet meer zo zeer bij de context, maar meer bij de wiskundige eigenschappen en kenmerken van de context. Vandaar dat deze opgave bij de tweede categorie hoort.

Daarnaast zijn pure rekenopgaven ook meegenomen in deze categorie. De reden hierachter is dat leerlingen bij dit soort opgaven de rekenregels gebruiken en hierdoor de focus op de wiskundige eigenschappen en kenmerken ligt.

Derde categorie In de derde categorie zitten opgaven die helpen om "conceptual proficiency" te ontwikkelen. Een voorbeeld van een opgave uit Moderne Wiskunde die in deze categorie hoort, gaat over 4 verschillende formules, namelijk $A : y = 5 \cdot 2^x$, $B : y = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $C : y = 2 \cdot 5^x$ en $D : y = 7 \cdot 1^x$. In een figuur dat bij deze opgave hoort, zijn deze grafieken getekend zonder assenstelsel. Hierbij moet de leerling aangeven welke grafiek bij welke formule hoort. (de Bruin et al., 2018, p. 24)

Bij deze opgave moet de leerling de relatie tussen de verschillende formules zien. De grafiek van A en B snijdt de y-as in hetzelfde punt, waarbij A toeneemt en B afneemt. De grafiek van D is een rechte lijn.

Een extra categorie Er zijn echter een aantal opgaven die niet in te delen zijn in een van deze drie categorieën. De opgaven die hier bedoeld worden, zijn opgaven met betrekking tot negatieve grondtallen en negatieve exponenten.

Negatieve grondtallen In zowel Moderne Wiskunde als ook Getal en Ruimte worden negatieve grondtallen geïntroduceerd aan de hand van het herhaald vermenigvuldigen van het grondtal met zichzelf. Hierdoor leren de leerlingen dat een negatief grondtal met een oneven exponent een negatief antwoord oplevert en een negatief grondtal met een even exponent een positief antwoord.

Dit sluit echter niet aan op een context die leerlingen gehad hebben. In geen enkel voorbeeld dat in de opgaven naar voren komt, komen negatieve grondtallen aan bod. De voorbeelden die gegeven worden bij machtsfuncties (de baan die een vallende steen beschrijft met een hoogte-tijd-grafiek, het vermogen van een windmolen bij een bepaalde windsnelheid met een vermogen-windsnelheid-grafiek, etc.), zijn alleen maar toepassing met positieve grondtallen.

Negatieve grondtallen zouden geïntroduceerd kunnen worden met een context bij machtsfuncties. Een voorbeeld hierbij is de voetbal-vraag in bijlage E.

Negatieve exponenten In Getal en Ruimte worden negatieve exponenten ook zonder context geïntroduceerd. Hierbij wordt de regel $a^p/a^q = a^{p-q}$ geëxtrapoleerd naar machten waarbij $p - q$ negatief is. Daarnaast worden er geen context-opgaven gegeven.

In Moderne Wiskunde worden negatieve exponenten alleen maar bij de wetenschappelijke notatie (ofwel standaardvorm) geïntroduceerd. Hierbij wordt de exponent als volgt genoemd: het aantal plaatsen dat de komma naar rechts verschuift. Dit geeft een heel andere betekenis aan machten dan de betekenis die er tot dan toe gegeven werd.

Negatieve exponenten zouden geïntroduceerd kunnen worden met een context bij exponentiële groei. Een voorbeeld hierbij is het terugrekenen in tijd bij aantallen bacteriën. Een voorbeeld-opgave is de bacterie-vraag in bijlage E.

5.4.5 Bevindingen

Alle opgaven die geanalyseerd zijn, zijn ingedeeld in de bovenstaande vier categorieën. Als een opgave bestond uit een aantal subvragen, waarbij een aantal subvragen bij verschillende categorieën hoorde, dan werd de vraag in de hoogste categorie geplaatst die bij een van de subvragen hoorde. In tabel 4 is een overzicht gegeven hoeveel opgaven bij elke categorie hoort. Bij de hoofdstukken die behandeld zijn, heeft Getal en Ruimte 122 opgaven en Moderne Wiskunde 91 opgaven.

	Getal en Ruimte				Moderne Wiskunde			
Leerjaar	1	2	3	Totaal	1	2	3	Totaal
Categorie 1	7	0	2	9	2	3	1	6
Categorie 2	31	23	18	72	5	19	33	57
Categorie 3	2	0	0	2	0	1	0	1
Categorie 4	12	15	12	39	12	3	12	27
Totaal	52	38	32	122	19	26	46	91

Tabel 4: Aantal opgaven per leerjaar in de vier categorieën bij de methodes Getal en Ruimte en Moderne Wiskunde

Bij de analyse van de opgaven is het opgevallen dat de meeste opgaven bij de tweede categorie behoren. Er is maar een klein deel van de opgaven dat behoort tot de derde categorie, zowel bij Moderne Wiskunde als ook bij Getal en Ruimte. In de derde categorie zitten de opgaven die leerlingen "conceptual proficiency" laten ontwikkelen. Door weinig aandacht aan dit soort opgaven te besteden, zullen leerlingen dus niet het hogere orde-denken ontwikkelen.

Wat echter nog meer opviel, was dat niet elk onderwerp op dezelfde manier wordt geïntroduceerd. Er is, zoals Van Stiphout (2013) aangeeft, een dubbel didactisch spoor. Het eerste spoor begint in een contextuele situatie (categorie 1), waarna langzamerhand meer van de context afgegaan wordt en meer naar de wiskundige kenmerken en karakteristieken van het onderwerp gekeken wordt, nog steeds gebaseerd op de contextuele situatie (categorie 2). Als laatst komen we dan in een situatie waarbij er van de leerling meer denkvermogen gevraagd wordt. Hierbij wordt "conceptual proficiency" ontwikkeld (categorie 3).

Het tweede didactische spoor begint echter bij het geven van een definitie, niet gebaseerd op een contextuele situatie (categorie 4). Hierbij kan de leerling dus niet terugvallen op de context om bepaalde dingen te begrijpen. Onderwerpen die bij deze categorie horen, zijn negatieve grondtallen (bij zowel Getal en Ruimte als ook Moderne Wiskunde) en negatieve exponenten (bij Getal en Ruimte).

6 Conclusie en discussie

In dit onderzoek is gezocht naar een antwoord op de volgende vraag: "Op welke manieren wordt onderwijs in machten en exponenten gegeven aan onderbouwleerlingen van vwo en wat zijn de leerresultaten?". Om hier een antwoord op te vinden, is gekeken naar de verschillende misconcepties die hierbij aan bod komen bij dit onderwerp. Daarvoor is er een toets afgenomen bij leerlingen uit een derde klas vwo, waaruit diverse misconcepties kwamen. Ook zijn leraren geïnterviewd over welke misconcepties zij tegenkomen.

Uit dit onderzoek is gebleken dat er veel misconcepties bij leerlingen zijn, maar ook dat leerlingen vaak alleen maar weten dat machtsverheffen herhaald vermenigvuldigen is. Leraren herkennen deze misconcepties ook en geven aan dat leerlingen vooral meer moeten oefenen om deze fouten te voorkomen.

Naast dit deel van het onderzoek is er ook onderzoek gedaan naar de manier van uitleg, die mogelijk ook een rol speelt bij de misconcepties. Hiervoor hebben de deelnemende leraren hun manier van uitleg uitgelegd. Ook zijn schoolboeken, die een grote rol blijken te spelen in het wiskunde-onderwijs, onderzocht met als uitgangspunt de drie categorieën die besproken zijn door Van Stiphout (2013).

Uit de interviews met leraren is gebleken dat veel leraren de lesmethode volgen, waarbij ze zelf weinig extra lesmateriaal toevoegen. Uit de lesboekanalyse volgt echter dat de lesmethodes een dubbel didactisch spoor hanteren. Enerzijds worden opgaven aan de hand van het emergent modelleren (uit de theorie van het Realistisch Reken- en Wiskundeonderwijs) gegeven, terwijl anderzijds ook opgaven op een andere manier geïntroduceerd worden, namelijk aan de hand van rekenregels.

Het onderwijs in machten en exponenten in de onderbouw van vwo kan dus op veel punten verbeterd worden. In de volgende twee paragrafen zal ik dan ook ingaan op de vragen hoe misconcepties voorkomen of verbeterd kunnen worden en hoe de manier van uitleg veranderd en verbeterd kan worden.

6.1 Misconcepties

Uit de toets, afgenomen bij 30 leerlingen uit een derde klas vwo, is gebleken dat er veel misconcepties zijn bij leerlingen met betrekking tot dit onderwerp. Veel fouten die ook in de literatuur beschreven zijn, kwamen voor in de toets. Een overzicht van de fouten die voorkwamen, is te vinden in tabel 5 op bladzijde 78. Hierin zijn ook alle misconcepties aangegeven die gevonden zijn in andere onderzoeken uit de behandelde literatuur en de misconcepties die door leraren aangegeven zijn. Hierbij zijn de misconcepties verdeeld in de volgende categorieën:

- Misconcepties bij de betekenis van machtsverheffen;
- Misconcepties bij de rekenregels;
- Misconcepties bij mintekens in of bij machten;
- Misconcepties bij gebroken exponenten;
- Overige misconcepties.

Wat opviel bij het behandelen van de toets, was dat leerlingen eigenlijk alleen maar wisten dat machtsverheffen herhaald vermenigvuldigen was. Opgaven met rekenregels werden erg slecht gemaakt. Hieruit blijkt dat de leerlingen dit onderwerp nog niet genoeg beheersen.

Uit de vragenlijst die afgenomen is bij leraren, is gebleken dat veel misconcepties die in de toets voorkwamen, ook bekend zijn bij leraren. Daarnaast gaven de leraren ook verschillende oplossingen voor het verbeteren of voorkomen van deze fouten aan. Uit deze oplossingen bleek dat volgens veel leraren de leerlingen meer moeten oefenen, bijvoorbeeld door meer huiswerk te maken.

Dit is echter niet altijd de beste oplossing. Daarom zal nu ingegaan worden op de verschillende categorieën misconcepties wat een andere, mogelijk betere oplossing is.

Misconcepties met betrekking tot de betekenis van machtsverheffen kunnen vaak verholpen worden door het woord "vermenigvuldigen" uit de definitie te halen. Een vervanger hiervoor zou kunnen zijn om meer nadruk te leggen op het verband tussen de verschillende machten, zoals in de covariationele benadering wordt gedaan, zie paragraaf 2.3.2. Uiteindelijk zullen leerlingen de regel zelf kunnen ontdekken, dat machtsverheffen herhaald vermenigvuldigen is bij natuurlijke getallen als exponent, maar hebben ze een beter begrip hiervan.

Bij de covariationele benadering kunnen veel praktijkvoorbeelden gebruikt worden, waardoor dit ook kan voldoen aan de principes van het Realistisch Reken- en Wiskundeonderwijs, zie paragraaf 4.3.2.

Of het echt nodig is om deze aanpak te gebruiken met betrekking tot de betekenis van machtsverheffen, valt nog te betwijfelen. Uit de resultaten van de toets blijkt namelijk dat de leerlingen wel goed wisten wat dit inhield, zolang het kleine getallen waren. Zodra de getallen echter groter werden, werd vaak overgeschakeld naar vermenigvuldigen van grondtal en exponent.

Misconcepties met betrekking tot rekenregels kunnen op twee manieren, gecombineerd, opgelost worden. Leerlingen moeten weten waar de regels vandaan komen, hoe de regels ontstaan zijn. Ze moeten ze zelf ontdekt hebben volgens de theorie van het Realistisch Reken- en Wiskundeonderwijs. De covariationele benadering zou hierbij een manier zijn om leerlingen de regels te laten ontdekken. Door hierbij voorbeelden te gebruiken, kan dit gerealiseerd worden.

Daarnaast moet er veel geoefend worden, om de rekenregels in te slijpen, zoals een van de leraren dat noemde.

Misconcepties met betrekking tot mintekens in of bij machten hebben mogelijk een andere reden. Negatieve getallen in machten worden namelijk op een andere manier geïntroduceerd dan het emergent modelleren voorschrijft, zowel bij Getal en Ruimte als ook Moderne Wiskunde, alhoewel de laatste geen aandacht schenkt aan negatieve exponenten. Deze onderwerpen worden namelijk niet geïntroduceerd aan de hand van voorbeelden waarbij een exponentiële groei of een hogere-machtsvergelijking speelt.

Mintekens in de exponent kunnen geïntroduceerd worden aan de hand van exponentiële groei, zoals de bacterie-vraag uit appendix E. Hierin gaat men in de tijd terug, waardoor de exponent negatief wordt.

Mintekens in het grondtal kunnen niet geïntroduceerd worden aan de hand van exponentiële groei. Daarom zal het geïntroduceerd moeten worden aan de hand van een voorbeeld waar machtsfuncties een rol spelen. Een voorbeeld hoe dit mogelijk is, is ook te vinden in appendix E.

Gebroken exponenten zijn niet veel terug gekomen tijdens dit onderzoek. Dit heeft ook met name de reden dat gebroken exponenten veelal in de bovenbouw aan bod komen. Daarnaast gebruiken veel leerlingen hiervoor de rekenmachine, zoals verschillende leraren aangaven in de vragenlijst.

Een andere soort fout kwam echter wel vaker voor, namelijk de rekenvolgorde bij opgaven waarbij machtsverheffen een rol speelt. Hierbij kan gebruik worden gemaakt van de introductie die leraar 3 aangaf in de vragenlijst, namelijk door twee groepen bacteriën met elkaar te vergelijken, waarbij de ene groep start met 100 en de andere met 250 bacteriën. Beide groepen verdubbelen elk uur. Hierdoor blijft de verhouding tussen de twee groepen steeds gelijk. Een opgave als $100 \cdot 2^5$ moet hierdoor dus opgelost worden door eerst de macht uit te rekenen en daarna pas de vermenigvuldiging met 100.

6.2 Manieren van uitleg

Uit het deel van de vragenlijst over de manier van uitleg blijkt dat veel leraren de uitleg van het lesboek gebruiken tijdens de lessen. Er worden wel extra dingen toegevoegd, maar het grootste deel komt uit het boek. Het boek staat hierdoor centraal in de lessen.

De analyse van de lesmethodes wijst uit dat er een dubbel-didactisch spoor te vinden is in de schoolboeken. Een deel wordt geïntroduceerd op basis van de theorie van het Realistisch reken- en wiskundeonderwijs, waarop ook de schoolboeken gegrond zijn. Een ander deel wordt echter anders geïntroduceerd, namelijk op basis van definities en rekenregels die in voorgaande theorie bekend geworden is bij leerlingen.

Daarnaast is gebleken dat er weinig opgaven in de lesmethodes zijn die "conceptual proficiency" helpen te ontwikkelen, opgaven waarbij een standaardprocedure niet genoeg is om bij het goede antwoord te komen. Hierover is in paragraaf 4.3.1 meer geschreven.

Dit zorgt voor de volgende implicatie: lesboeken moeten veranderen of leraren moeten zelf meer gaan toevoegen aan de les. Negatieve grondtallen en negatieve exponenten moeten op een andere manier geïntroduceerd worden. In paragraaf 6.1 is al aangegeven wat een mogelijke manier is om deze negatieve getallen in een macht te introduceren.

Freudenthal (1984) geeft in zijn boek aan dat de manier van beginnen bij de eenvoudige wiskunde helemaal niet een goed idee is. Hij schrijft:

> Er zijn twee redenen waarom mensen eenvoudige wiskunde als het erop aankomt niet kunnen toepassen. De één is de verkeerde volgorde: eerst een formele of abstracte methode onderwijzen en achteraf onderwijzen hoe je hem toepast, terwijl het juist omgekeerd zou moeten: Beginnen met rijke contexten om ze te mathematiseren -

> dus abstracties wel als uitkomsten maar niet als uitgangspunten van het leerproces. (Freudenthal, 1984, p. 47)

Daarom moeten machten in hun geheel anders geïntroduceerd worden. Er moet gestart worden bij exponentiële groei en bij machtsfuncties. Hierbij moet de nadruk liggen op het verband tussen de machten. Als de exponent 1 hoger wordt, wordt de macht vermenigvuldigd met het grondtal. Of als het grondtal groter wordt bij machtsfuncties, stijgt de grafiek steeds sneller.

Vanuit deze twee concepten, namelijk machtsfuncties en exponentiële functies, moet het concept van machtsverheffen met gehele getallen volgen, een specifiek onderdeel van de exponentiële functies en machtsfuncties.

Daarnaast moeten er meer opgaven komen die "conceptual proficiency" helpen te ontwikkelen. Hierdoor zullen leerlingen begrijpen hoe machten en exponenten nu precies in elkaar steken.

6.3 Beperkingen

In dit onderzoek is veel naar boven gekomen. Maar er zitten wel diverse beperkingen aan dit onderzoek. Zo zijn er maar 30 leerlingen uit één klas geweest die de toets gemaakt hebben. Om conclusies te trekken over het niveau van de leerlingen met betrekking tot het onderwerp machten en exponenten, zouden er meer leerlingen, verdeeld over diverse scholen in Nederland, mee moeten werken aan dit onderzoek.

Daarnaast zijn er ook maar een beperkt aantal leraren geweest die meegewerkt hebben aan dit onderzoek. Hierdoor was er uiteindelijk maar een leraar die een andere manier van lesgeven gekozen had dan het volgen van het boek. Daarom zou het goed zijn als er in vervolgonderzoek een grotere onderzoeksgroep van leraren meegenomen wordt. Dit zorgt namelijk voor het verkrijgen van meer ervaringen met betrekking tot het niet volgen van een lesmethode, waardoor hier meer sterkere en zwakkere punten van naar boven kunnen komen.

Toch valt het op dat de resultaten uit dit onderzoek overeen komen met de resultaten uit andere onderzoeken. Zo bleek uit het onderzoek van Olsen et al. (2008) dat het Nederlandse onderwijs veelal bepaald wordt door lesboeken, iets wat ook uit de vragenlijsten van leraren bleek. Daarnaast blijkt uit het onderzoek van Van Stiphout (2011) ook dat schoolboeken een dubbel-didactisch spoor hebben. En ook de misconcepties die gevonden zijn bij de leerlingen komen overeen met andere onderzoeken, zoals het onderzoek van Ulusoy (2019).

References

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the learning of Mathematics*, *14*(3), 24–35.

Avitzur, A. (2012). Exponentiation is not repeated multiplication: Developing exponentiation as a continuous operation. *Proceedings of the 34th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

Bergsma, Y. (2019). *Students' Understanding of Exponents and Exponential Functions at a Secondary School in the Northern Netherlands* (Bachelor's thesis). University of Groningen. (`https://fse.studenttheses.ub.rug.nl/20116/1/bMATH_2019_BergsmaY.pdf`)

Cangelosi, R., Madrid, S., Cooper, S., Olson, J., & Hartter, B. (2013). The negative sign and exponential expressions: Unveiling students' persistent errors and misconceptions. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(1), 69–82.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 352–378.

Chimhande, T., Naidoo, A., & Stols, G. (2017). An analysis of grade 11 learners' levels of understanding of functions in terms of apos theory. *Africa Education Review*, *14*(3-4), 1–19.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. In *Learning mathematics* (pp. 31–60). Springer.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for research in mathematics education*, 66–86.

Creswell, J. (2012). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research (4th ed.).* Boston, MA: Pearson.

de Bruin, I., van der Eijk, E., Manintveld, J., Nannings, S., van Proosdij, G., Roll, C., ... Smeenk-van Broekhoven, G. (2018). *Moderne wiskunde, 2b havo/vwo* (12th ed.). Groningen: Noordhoff Uitgevers.

Dijkhuis, J., Admiraal, C., Verbeek, J., de Jong, G., Houwing, H., Kuis, J., ... Cornelisse, I. (2017). *Getal en ruimte, 1 havo/vwo deel 2* (12th ed.). Groningen: Noordhoff Uitgevers.

Dijkhuis, J., Admiraal, C., Verbeek, J., de Jong, G., Houwing, H., Kuis, J., ... Cornelisse, I. (2019). *Getal en ruimte, 3 vwo deel 2* (12th ed.). Groningen: Noordhoff Uitgevers.

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). Apos: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 275–282). Springer.

Duroux, A. (1983). La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure. *Petit X*(3), 43-66.

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Dogan, M. F., Williams, C., & Amidon, J. (2013). Correspondence and covariation: Quantities changing together. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.

English, L. D., & Kirshner, D. (2015). *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed.). Abingdon: Routledge.

Ernest, P. (2006). A semiotic perspective of mathematical activity: The case of number. *Educational studies in mathematics*, *61*(1-2), 67–101.

Ferrari-Escolá, M., Martínez-Sierra, G., & Méndez-Guevara, M. E. M. (2016). “multiply by adding”: Development of logarithmic-exponential covariational reasoning in high school students. *The Journal of Mathematical Behavior*, *42*, 92–108.

Freudenthal, H. (1984). *Appels en peren / wiskunde en psychologie.* Van Walraven.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical thinking and learning*, *1*(2), 155–177.

Gutiérrez, Á., Leder, G. C., & Boero, P. (2016). *The second handbook of research on the psychology of mathematics education: The journey continues.* Rotterdam: Brill — Sense.

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in mathematics education. *Educational studies in mathematics*, *40*(1), 1–24.

Olsen, J., Martin, M., & Mullis, I. (2008). TIMMS 2007 Technical Report. *Boston MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Linch School of Education, Boston College*.

Panorkou, N., Maloney, A. P., & Confrey, J. (2014). *Expressing covariation and correspondence relationships in elementary schooling.* NCTM.

Pitta-Pantazi, D., Christou, C., & Zachariades, T. (2007). Secondary school students’ levels of understanding in computing exponents. *The Journal of Mathematical Behavior*, *26*(4), 301–311.

Rabin, J. M., Fuller, E., & Harel, G. (2013). Double negative: the necessity principle, commognitive conflict, and negative number operations. *The Journal of Mathematical Behavior*, *32*(3), 649–659.

Robitaille, D. F. (1974). Mathematics and chess. *The Arithmetic Teacher*, *21*(5), 396–400. Retrieved from `http://www.jstor.org/stable/41190919`

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, *77*, 1–7.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, *12*(2), 151–169.

Thompson, D. R., Senk, S. L., & Johnson, G. J. (2012). Opportunities to learn reasoning and proof in high school mathematics textbooks. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(3), 253–295.

Törner, G., & Arzarello, F. (2012). Grading mathematics education journals. *European Mathematical Society Newsletter*, *86*, 52-55.

Ulusoy, F. (2019). Serious obstacles hindering middle school students' understanding of integer exponents. *International Journal of Research in Education and Science*, *5*(1), 52–69.

van den Boogaart, T. (2021). Waar is de wiskunde-didactiek in volgens barton? *Euclides*, *96*(4), 4–7.

Van Dooren, W., De Bock, D., & Verschaffel, L. (2005). Intuïties en intuïtieve regels: interpretatiekader voor fouten van leerlingen?(deel 2). *Nieuwe Wiskrant*, *24*(3), 30–35.

Van Stiphout, I. (2011). The development of algebraic proficiency. *Eindhoven: Eindhoven University of Technology*.

Van Stiphout, I. (2013). Uit de ivoren toren: het dubbele didactische spoor in de schoolmethoden. *Nieuwe Wiskrant*, *32*(3), 32–36.

Weber, K. (2002a). Developing students' understanding of exponents and logarithms. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1-4*, 1019-1027.

Weber, K. (2002b). Students' understanding of exponential and logarithmic functions. *Murray, KY: Murray State University. (ERIC Document Reproduction Service No. ED477690).*

A Literatuuronderzoek

Voor mijn literatuuronderzoek heb ik het boek van Creswell (2012) gebruikt. In dit boek worden 5 stappen gegeven van het schrijven van een literatuuronderzoek:

- *Identificeren van sleutelwoorden* die in zoekopdrachten gebruikt zullen worden
- *Literatuur zoeken* over het onderwerp door verschillende soorten bronnen en databases te gebruiken
- *Kritisch de literatuur evalueren en selecteren* voor de review
- *Literatuur overzichtelijk maken*
- *Literatuur review schrijven* die de geselecteerde bronnen samenvat voor in het literatuurverslag.

A.1 Identificeren van sleutelwoorden

Om sleutelwoorden te bedenken, geeft Creswell (2012) aan dat het handig is om een voorlopige werktitel te hebben. De titel waar ik mee ben begonnen is "Lesgeven van exponenten op de middelbare school - verschillende manieren van lesgeven en hoe omgaan met misconcepties". Vanuit deze titel kwam ik al snel op de sleutelwoorden "exponenten", "middelbare school" en "misconcepties". Vertaald naar het engels worden dit dus "exponents", "High school" en "misconceptions", met als variant "exponential".

A.2 Literatuur zoeken en selecteren

Aan de hand van deze sleutelwoorden ben ik gaan zoeken in de online databases ERIC en ScienceDirect, waarbij ik bij de laatstgenoemde gezocht heb in de Journal of Mathematical Behaviour. Daarbij viel het me op dat het woord "misconceptions" leidde tot het krijgen van geen resultaat. Daarom heb ik dit woord uit de zoekterm gelaten.

A.2.1 ERIC

Eerst heb ik bij ERIC gezocht. Daarbij heb ik gezocht op exponent*. Hierbij heb ik als verplichting gesteld dat de volledige tekst beschikbaar moest zijn. Daarbij heb ik 638 artikelen gevonden.

Om dit aantal te beperken, heb ik het ook verplicht gesteld dat het peer-reviewd moest zijn. Nu bleven er nog 337 artikelen over. Daarop heb ik alleen in de titel en keywords gezocht. Hierdoor bleven er uiteindelijk nog 33 artikelen over. Hiervan heb ik er 6 geselecteerd die ik uiteindelijk toegevoegd heb aan de literatuurlijst. Deze selectie heb ik gemaakt op basis van de volgende vragen:

- Wordt het onderwerp "hoe exponenten uitleggen" of "begrip van leerlingen van exponenten" of "misvattingen bij de uitleg van exponenten" besproken?

- Is de groep die besproken is, middelbare schoolleerlingen (het liefst klas 2, ofwel 8 graders)?
- Is het volledige artikel beschikbaar?

Ook vond ik in een aantal artikelen een verwijzing naar het artikel van Weber (2002a).

Daarna heb ik het artikel van Törner & Arzarello (2012) doorgelezen. Hierin staat een beoordeling van tijdschriften. Daarop heb ik weer in ERIK gezocht op "exponent*", waarbij het volledige artikel beschikbaar moest zijn, peer-reviewd en in een van deze tijdschriften gepubliceerd. Hierdoor bleven er nog 6 artikelen over, waarvan een artikel al gevonden was bij een eerdere zoektocht.

A.2.2 ScienceDirect

Daarna heb ik in ScienceDirect gezocht. Hier gebruikte ik het trefwoord "exponent", wat moest voorkomen in de titel, abstract of sleutelwoorden. Hierbij vond ik 6 artikelen. Hiervan was er 1 die inging op exponentiële groei, waarbij universitaire studenten waren betrokken. Hierdoor viel deze af.

Vervolgens heb ik nog verder gezocht met het trefwoord "exponent", waarbij het niet per se in de titel, abstract of sleutelwoorden. Hierbij vond ik 55 artikelen. Hierbij heb ik vervolgens gekeken naar de eerder genoemde vragen. Toen ik alle bronnen langs was gegaan met deze vragen, bleven er nog 12 artikelen over.

A.3 Literatuur overzichtelijk maken

Om de literatuur overzichtelijk te maken, heb ik eerst alle literatuur verdeeld in twee groepen:

1. Manieren van uitleg
2. Misconcepties

De manieren van uitleg heb ik vervolgens opgedeeld in meerdere delen:

- Splitsen
- Verband-leggende benadering
- Functionele benadering
- Benadering van Pitta-Pantazi, Christou en Zachariades
- Algoritmische benadering
- Continue concept van exponenten

A.4 Literatuur Review

Als laatst zijn er de belangrijkste artikelen samengevat. De samenvattingen hiervan zijn hieronder te lezen.

Avitzur, A. (2012). Exponentiation is not repeated multiplication: Developing exponentiation as a continuous operation. *Proceedings of the 34th Annual*

Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Onderzoeksprobleem

Het concept machten en exponenten is vaak een probleem-concept, vooral wanneer dit concept uitgebreid wordt naar negatieve en gebroken exponenten. Leerlingen hebben geen begrip van wat exponenten zijn. Ze weten een aantal regels of hebben een beeld van een aantal voorbeelden gecombineerd.

Onderzoek

Er zijn verschillende manieren waarop exponenten worden geïntroduceerd. Zo is er in een onderzoek getest hoe het begrip van exponenten bij leerlingen is wanneer er een exponentiele functie wordt geïntroduceerd, eerst voor alleen natuurlijke getallen, maar later uitgebreid naar negatieve en gebroken exponenten. Ook worden de benaderingen van Weber en Confrey aangehaald en daarbij aangegeven wat er mist.

Het grote probleem van al deze manieren is dat men begint met natuurlijke getallen in de exponent, waardoor de leerlingen een beperkte definitie krijgen van exponenten. Hierdoor worden leerlingen gedwongen om hun beeld wat ze bij machten en exponenten hebben, constant aan te passen door de uitbreidingen van de definitie die ze telkens krijgen.

Een ander groot probleem is dat er teveel aandacht is voor berekeningen.

Oplossing

Om hier vanaf te komen, moeten er een aantal dingen veranderen: De berekening moet gescheiden worden van het beeld van machtsverheffen. Hierbij moet gebruik gemaakt worden van voorbeelden die alle waardes kunnen hebben, zoals bij een lengte. Gehele getallen moeten hierbij worden gebruikt als een geval waarin we ook bepaalde berekeningen kunnen doen.

Om dit te doen, wordt de volgende optie aangegeven: Machtsverheffen wordt gedefinieerd als "een bewerking die een hoeveelheid multiplicatief veranderd, op basis van de huidige omvang van de hoeveelheid"(Avitzur, 2012). Hierbij wordt een voorbeeld gegeven van hoe je dit vervolgens kunt uitbeelden.

Bergsma, Y. (2019). *Students' Understanding of Exponents and Exponential Functions at a Secondary School in the Northern Netherlands* (Bachelor's thesis). University of Groningen.

Onderzoeksprobleem

Leerlingen op de middelbare school vinden het vaak lastig om regels met betrekking tot exponenten en logaritmes toe te passen. Zelfs na de middelbare school hebben ze vaak nog problemen met betrekking tot het goed toepassen van deze regels.

In het onderzoek worden ook een aantal verschillende manieren van uitleg behandeld.

Hypothese en onderzoeksvraag

De hoofdvraag die in dit onderzoek wordt gesteld is wat het begrip van leerlingen op de middelbare school is met betrekking tot exponenten en exponentiele functies. Hiervoor worden de verschillende staten van begrip van Pitta-Pantazi et al. (2007) gebruikt om te evalueren.

Dataverzamelingsprocedure

In het onderzoek worden 17 leerlingen tussen de 16 en 18 jaar getoetst met een toets gebaseerd op vragen uit andere literatuur. Nadat de leerlingen deze toets hebben gemaakt, worden een aantal van deze leerlingen gevraagd om nog een aantal vragen uit te leggen, waarom ze op een bepaald antwoord kwamen.

Bevindingen/resultaten

Uit de test die eerder beschreven is, werden de resultaten van 14 leerlingen in 3 categorieën gezet: de preconceptuele, de conceptuele en de geherstructureerde fase. In de eerste fase heeft men nog moeilijkheden met negatieve grondtallen en exponenten. In de tweede fase heeft men nog moeilijkheden met negatieve gebroken exponenten en gebroken grondtallen. In de laatste fase is deze kennis allemaal bekend.

7 leerlingen hadden de laatste fase bereikt. 2 leerlingen zaten nog in de eerste fase en 5 leerlingen in de tweede fase.

Cangelosi, R., Madrid, S., Cooper, S., Olson, J., & Hartter, B. (2013). The negative sign and exponential expressions: Unveiling students' persistent errors and misconceptions. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(1), 69–82

Onderzoeksprobleem

Leerlingen en studenten hebben maar een beperkte kennis van exponenten en logaritmes. Hierbij valt het op dat fouten die leerlingen van de middelbare school en fouten die op de universiteit gemaakt worden, veel gemeenschappelijk hebben.

Hypothese en onderzoeksvraag

In het onderzoek vraagt men zich af of er hardnekkige fouten zijn die gemaakt worden bij het berekenen van opdrachten met exponenten. Daarnaast wordt afgevraagd welke fouten dit dan zijn en hoe ze gecategoriseerd kunnen worden.

Dataverzamelingsprocedure

In het onderzoek naar deze vragen hebben 904 universitaire studenten deelgenomen aan een toets. Van deze studenten zijn er 18 geselecteerd voor een vervolginterview over het denkproces van studenten bij het maken van deze opgaven.

De toets bestond uit 3 delen: In het eerste deel werd gevraagd om 8 opgaven uit te rekenen. In het tweede deel werd gevraagd de tekens “$<$”, “$=$” en “$>$” te plaatsen tussen twee machten. In het derde deel wordt er eerst gevraagd naar een theoretische kennis (waarom 2^{x+1} twee keer zo groot is als 2^x). Daarna wordt gevraagd of bepaalde machten positief of negatief zijn.

Bevindingen/resultaten

Uit de toets blijkt dat er wel degelijk hardnekkige fouten zijn onder de studenten. Deze fouten hadden veelal te maken met het min-teken, zowel in het grondtal als ook in de exponent.

De onderzoekers suggereren dat er een onderontwikkeling in het begrip van inverses is, waardoor deze problemen ontstaan. Daardoor concluderen ze dat leraren en lesmethodes meer moeten doen met het ”neutraal element” (engels: identity element) en inverses, zowel bij vermenigvuldigen als bij optellen.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for research in mathematics education*, 66–86.

Onderzoek

Veel studenten blijken nadat ze een algebra-cursus gehad hebben, toch niet de fundamentele kennis tot zich genomen te hebben. Maar de helft van de studenten herkende een logaritmische grafiek, en zo zijn er nog meer voorbeelden van wat er allemaal niet goed zit bij deze studenten.

In dit onderzoek wordt gekeken naar hoe we exponenten beter kunnen begrijpen. Dit wordt gedaan door middel van verschillende manieren: Splitsen en een covariationele benadering. Deze methodes worden volledig uitgelegd, hoe ze werken, wat de voordelen zijn en waardoor dit wel een effectieve manier van uitleggen is.

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Dogan, M. F., Williams, C., & Amidon, J. (2013). Correspondence and covariation: Quantities changing together. *North American Chapter of the International Group for the Psychology ofMathematics Education.*

Onderzoeksprobleem

Exponentiele groei is zowel voor leraren als voor leerlingen een concept dat moeilijk te begrijpen is. Daarnaast wordt genoemd hoe verschillende theorieën hierover spreken, waarbij de covariationele en de correspondentiële benadering aan bod komen.

Hypothese en onderzoeksvraag

In dit onderzoek wordt de nadruk gelegd op 2 voorbeelden van een continue groei, zodat leerlingen van het idee afgaan dat machtsverheffen alleen voor gehele getallen is, waarbij het een herhaalde vermenigvuldiging is.

Dataverzamelingsprocedure

In het onderzoek wordt in een 12-daagse cursus 3 leerlingen van 13-14 jaar uitleg gegeven over exponentiële groei. De leerlingen wordt het verband aangetoond tussen tijd en een exponentiëel groeiende plant.

Bevindingen/resultaten

Uit dit onderzoek blijkt dat een covariationele benadering van dit concept ondersteunend is voor een correspondentiële benadering. Daarom zal lesgeven met een covariationele benadering effectiever zijn voor het begrip dat leerlingen hebben van exponentiële groei.

Ferrari-Escolá, M., Martínez-Sierra, G. & Méndez-Guevara, M.E.M. (2016). "Multiply by adding": Development of logarithmic-exponential covariational-reasoning in high school students. *The Journal of Mathematical Behavior*, 42, 92–108.

Onderzoeksprobleem

Covariationele benadering kan in veel wiskundige concepten gebruikt worden. Met name in het gebied van functies speelt het een grote rol, zo ook bij exponentiele functies.

Hypothese en onderzoeksvraag

- Wat zijn de intellectuele acties, zowel op discreet als op dynamisch gebied van exponentieel-logaritmisch covariationeel denken in het onderzoek?
- Welke levels van covariationeel denken zijn door de studenten bereikt na dit onderzoek?

Dataverzamelingsprocedure

In het onderzoek werden 15 leerlingen van 17-18 jaar in 5 sessies van 2 uur gefilmd of geaudiotaped. Ze kregen onder andere een kaartspel, waarmee ze opdrachten moesten maken. Daarnaast werd het werk wat de leerlingen maakten ook geanalyseerd, volgens de 5 levels van covariationeel denken van een onderzoek van Carlson et al. (2002).

Bevindingen/resultaten

Volgens de onderzoekers werd het covariationeel denken ontwikkeld bij deze studenten. Dit volgde uit de analyze op basis van de eerder genoemde 5 levels van covariationeel denken. Ondanks dat dit onderzoek zich voornamelijk richtte op de ontwikkeling van discreet covariationeel denken, werd er ook continue covariationeel denken ontdekt bij sommige studenten.

Pitta-Pantazi, D., Christou, C., & Zachariades, T. (2007). Secondary school students' levels of understanding in computing exponents. *The Journal of Mathematical Behavior,* 26(4), 301–311.

Onderzoeksprobleem

Er is veel educatief onderzoek geweest naar verschillende moeilijke wiskundige onderwerpen, maar weinig naar machten en exponenten.

Hypothese en onderzoeksvraag

Het doel van dit onderzoek is om het niveau van begrip van leerlingen op het gebied van machtsverheffen te beschrijven, om vervolgens dit niveau te analyseren aan de hand van de "conceptual change theory" en de invloed van de preconcepties van leerlingen op dit begrip.

Dataverzamelingsprocedure

In dit onderzoek worden 202 leerlingen van een middelbare school in Cyprus een toets gegeven. In deze toets wordt 20 keer een paar machten gegeven waarbij de leerling een $<$, $=$ of $>$ tussen deze paren moet zetten. De leerlingen werden op basis van de antwoorden ingedeeld op 3 verschillende groepen op basis van niveau: preconceptueel, conceptueel of geherstructureerd niveau. De vragen waren ingedeeld zodat er voor elk niveau een aantal vragen waren.

Van elk van deze 3 groepen werden 10 leerlingen geïnterviewd over hun antwoorden. Deze interviews werden opgenomen met zowel beeld als geluid.

Bevindingen/resultaten

De onderzoekers konden de leerlingen indelen in 3 niveaus. Bij het eerste niveau, het preconceptuele niveau, viel het op dat leerlingen vooral bleven hangen aan de voorbeelden die gegeven waren, waarbij machtsverheffen wordt gezien als herhaald vermenigvuldigen en waarbij het grondtal en de exponent gehele positieve getallen zijn.

Bij het tweede niveau (conceptueel) was het ook mogelijk om negatieve gehele getallen te gebruiken. De leerlingen begrepen dat a^{-x} gelijk is aan $1/a^x$.

Bij het derde niveau (geherstructureerd) was het ook mogelijk om in de exponent een breuk te plaatsen. Hierbij begrepen de leerlingen dat $a^{p/q}$ gelijk is aan $\sqrt[q]{a^p}$.

Ulusoy, F. (2019). Serious obstacles hindering middle school students' understanding of integer exponents. *International Journal of Research in Educationand Science*, 5(1), 52–69.

Onderzoeksprobleem

Machtsverheffen is een belangrijk onderwerp om exponentiële functies, logaritmes en calculus te begrijpen. Daarnaast is het belangrijk om verschillende modellen te begrijpen uit diverse velden. Toch hebben leerlingen hier vaak moeite mee; ze herinneren regels bijvoorbeeld niet.

Hypothese en onderzoeksvraag

In dit onderzoek worden twee onderzoeksvragen gesteld. In de eerste vraag wordt onderzocht wat het prestatieniveau van 2e klas (8-grade) leerlingen is in machtsverheffen met gehele getallen, zowel met positieve en negatieve gehele getallen, als ook 0 in de exponent. Hierbij wordt ook gekeken naar de verschillende operaties (vermenigvuldigen en delen).

De tweede vraag gaat in op wat de obstakels zijn die deze leerlingen dwars zitten om dit onderwerp goed te begrijpen. Hierbij wordt gekeken naar hoe deze obstakels gecategoriseerd kunnen worden.

Dataverzamelingsprocedure

Voor dit onderzoek zijn 165 leerlingen uit de 2e klas van twee middelbare scholen in Turkije. Deze leerlingen zijn gekozen, omdat het curriculum voorschrijft dat deze leerlingen moeten kunnen machtsverheffen met positieve, negatieve gehele getallen en 0 in de exponent. Daarnaast moeten deze leerlingen ook de basisregels van het machtsverheffen kennen.

Voor deze leerlingen is een toets gemaakt, bestaande uit 10 vragen, waarbij zowel positieve als negatieve gehele getallen in de exponent voorkwamen, 0 in de exponent en verschillende regels met betrekking tot machtsverheffen. Naar aanleiding van de gemaakte toetsen werden leerlingen geïnterviewd.

Bevindingen/resultaten

Uit dit onderzoek blijkt dat er veel fouten worden gemaakt op het gebied van machtsverheffen met gehele getallen. De fouten in dit onderzoek zijn gecategoriseerd als

- Fouten met betrekking tot de betekenis van machtsverheffen
- Fouten met betrekking tot 0 in de exponent
- Fouten met betrekking tot negatieve exponenten
- Fouten met betrekking tot operaties
  - Fouten met betrekking tot optellen van machten
  - Fouten met betrekking tot vermenigvuldigen van machten

– Fouten met betrekking tot delen van machten

Deze fouten worden allemaal uitgewerkt en onderverdeeld in een aantal obstakels die leerlingen hierbij tegenkomen.

Weber, K. (2002b). Students' understanding of exponential and logarithmic functions. *Murray, KY: Murray State University. (ERIC Document Reproduction Service No. ED477690)*

Onderzoeksprobleem

Machtsverheffen en logaritmes zijn belangrijke onderwerpen in de wiskunde. Ondanks dat hebben veel leerlingen moeite met deze onderwerpen. Daarnaast is er weinig onderzoek gedaan naar hoe het begrip van machten en exponenten ontwikkelt.

Hypothese en onderzoeksvraag

Het doel van dit onderzoek is om een theorie te beschrijven van hoe leerlingen het begrip van machtsverheffen en logaritmes mogelijk ontwikkelen. Daarnaast wordt het begrip van leerlingen getest in de context van deze theorie.

Dataverzamelingsprocedure

De theorie hoe het begrip van machtsverheffen en logaritmes zich ontwikkelt, is gebaseerd op de APOS theorie van Dubinsky & McDonald (2001). Nadat dit beschreven is, wordt de verzamelde data onder studenten geanalyseerd in het kader van deze theorie.

De data werd verzameld onder 15 leerlingen van een universiteit in de verenigde staten. Ze hadden 3 weken les gehad in een pre-calculus vak over machten en exponenten. Deze leerlingen werd gevraagd een aantal vragen met betrekking tot exponentiële en logaritmische functies te beantwoorden.

Bevindingen/resultaten

In de theorie werden vier verschillende, opeenvolgende niveaus van begrip geformuleerd: een "action understanding" (a^x is $a \cdot \ldots a$ (x keer)), een "process understanding" (machtsverheffen zien als functie, met als inverse logaritmes), machten als resultaat van een proces (een macht is de uitkomst van machtsverheffen), een "generalized process understanding" (niet-gehele exponenten zijn hierbij ook mogelijk).

Hierbij werd ook een mogelijke manier van lesgeven gegeven. Bij elke stap wordt aangegeven wat de leraar voor opdrachten globaal moet uitvoeren.

Weber, K. (2002a). Developing students' understanding of exponents and logarithms. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 1-4, 1019-1027.

Onderzoeksprobleem

Machten en logaritmes zijn erg belangrijk in de wiskunde, maar ook in maatschappelijke onderwerpen, zoals populatiegroei en dergelijke. Ondanks dat er ook een aantal studies zijn die geprobeerd hebben een nieuwe manier van educatie op dit gebied te benaderen, zijn deze manieren nog niet getest en beoordeeld.

Hypothese en onderzoeksvraag

In dit onderzoek worden twee zaken uitgevoerd. Ten eerste wordt er een manier beschreven waarop leerlingen kunnen worden onderwezen in machten en logaritmes en ten tweede wordt de effectiviteit van deze instructie getest in een pilotstudy.

Dataverzamelingsprocedure

Twee groepen van een universiteit uit het zuiden van de verenigde staten deden mee aan dit onderzoek. Gedurende 3 weken werden de testgroep en de controlegroep onderwezen in machten en logaritmes. Aan het eind van deze 3 weken werden deze studenten allemaal geïnterviewd. Hierbij kregen ze 11 vragen, waarbij de eerste 4 basisvragen waren, de volgende 3 regel-vragen en de laatste 4 conceptuele vragen. De antwoorden per vraag per groep (testgroep en controlegroep) werden met elkaar vergeleken.

Bevindingen/resultaten

Uit de resultaten was te zien dat de leerlingen uit de testgroep vaker het juiste antwoord gaven dan de leerlingen uit de controlegroep. De testgroep was vaak ook in staat om verschillende regels uit te leggen en te reconstrueren.

B Toets

In deze bijlage zullen de resultaten van de toets per leerling beschreven worden. Vanwege de anonimiteit van de leerlingen, zijn de leerlingen genummerd van leerling 1 tot leerling 30.

B.1 Antwoorden per leerling

In deze paragraaf staan de antwoorden per leerling. Bij niet voldoende doorgerekende opgaven of opgaven waarbij geen antwoord gegeven was, is de desbetreffende cel leeg gelaten. Bij goed beantwoorde opgaven (of dusdanig goed doorgerekende opgaven) is de cel groen gekleurd. Bij foute antwoorden is de cel rood gekleurd.

In opgave 5d worden 4 kleuren gebruikt: ook geel is hier toegevoegd. Hierbij geeft groen aan dat er een exponentiele groei in de grafiek weergegeven wordt. Bij geel worden er rechte lijnen tussen alle punten getrokken. Bij oranje worden rechte lijnen getrokken tussen de positieve punten. Bij rood wordt er een rechte lijn getrokken door 2 punten.

Opdracht 1: Bereken de volgende opgaven:

(a) 2^3
(b) -3^0
(c) 2^{-4}
(d) $5^6 \cdot 5^{-3}$
(e) $0,5^{18} \cdot 2^{18}$
(f) $3^5 \cdot 4^2$
(g) $9^4 : 3^4$

Leerling	1a	1b	1c	1d	1e	1f	1g
1	8	-3	-16	$15625 \cdot 125$			
2	8	0	-16	3	0	729	
3	8	-3	16			$243 \cdot 16$	
4	8	-3	-16			$729 \cdot 16$	
5	8	-3	-16	$725 \cdot -125$	$9 \cdot 36 = 324$	$\ldots \cdot 16 = \ldots$	
6	8	-3	-16	16	324		
7	8	0	-16				
8	8	-3	-16	$15625 \cdot -125$		3888	
9	8	-3	16			12^{10}	3
10	8	-3				243	81
11	8	-3	16	$15625 \cdot -125$		$243 \cdot 16$	
12	8	0	-16	$15625 \cdot -1$	$9 \cdot 32$		$36 : 12 = 3$
13	12	0				$414 \cdot 16$	
14	8	-3	-8			$186 \cdot 16$	$9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \quad \cdot \quad 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
15	8	0	16	$1225 \cdot -125$		$244 \cdot 16$	$1458 : 81$
16	8	0	-16	125	1	$81 \cdot 16$	3
17	8	-3	16	25^3	1^{36}	12^7	3^8
18	8	0	-16	25^3	1^{36}	12^7	3
19	8	0	-16		heel weinig	3888	$6561 : 81$
20	8	0	16	$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot -5 \cdot -5 \cdot -5$		$251 \cdot 16$	$6561 : 81$
21	8	-3	0,0002				$6561 : 81$
22	8	-3	16	$78125 \cdot -125$		3888	$6561 : 81$
23	8	0	$2 - 16$			$243 - 16$	
24	8	0	16	$15625 \cdot -125$			$63261 : 81$
25	8	-3	16	$3125 \cdot -125$			
26	8	-1	$\frac{1}{16}$			243	$6561 : 81 = 81$
27	8	0	16	25^{-3}		12^7	
28	6	0	-16				
29	8	0				3888	$6498 : 71$
30	8	0	0,5	$15625 \cdot \frac{3}{5} = \frac{46875}{5}$		$243 \cdot 16$	$162 : 27 = 6$

Opdracht 2: Er worden steeds 2 machten gegeven. Zet een $<$, $=$ of $>$ tussen deze machten.

(a) $23^8 \ldots 23^{13}$
(b) $24^9 \ldots 15^9$
(c) $(-12)^{13} \ldots (-12)^{17}$
(d) $-17^{-9} \ldots 17^{-9}$
(e) $0,5^{25} \ldots 0,5^{31}$
(f) $(-12)^{-7} \ldots (-12)^{-9}$

Opdracht 3

(a) Is 5^{12} een even of oneven getal?
(b) Is $(-3)^{10}$ een positief of negatief getal?
(c) Maak de volgende berekening: $2^x \cdot 2^y$

Leerling	2a	2b	2c	2d	2e	2f	3a	3b	3c
1	$<$	$>$	$<$	$>$	$<$	$>$			4^{xy}
2	$<$	$>$	$<$	$>$	$<$	$<$	Even	Positief	$2^2 \cdot 2^2$
3	$<$	$>$	$>$	$<$	$>$	$>$	Even	Positief	$4xy$
4	$<$	$>$	$>$	$<$	$<$	$>$	Even	Negatief	$4xy$
5	$<$	$>$	$<$	$<$	$<$	$<$	Even	Negatief	$4xy$
6	$<$	$>$	$<$	$<$	$<$	$<$	Even	Negatief	$4xy$
7	$<$	$>$	$>$	$>$	$<$	$>$	Oneven	Negatief	$4xy$
8	$<$	$>$	$<$	$<$	$>$	$>$	Oneven	Negatief	
9	$<$	$<$	$<$	$>$	$<$	$<$		Positief	$4xy$
10	$<$	$>$	$<$		$<$	$<$	Even	Positief	$4xy$
11	$<$	$>$	$>$	$>$	$<$	$<$		Positief	4^{xy}
12	$<$	$>$	$<$	$<$	$<$	$<$	Even	Negatief	$2^2 \cdot 2^4$ voor $x = 2$ en $y = 4$
13	$<$	$>$	$<$	$<$	$<$	$<$	Oneven	Negatief	
14	$<$	$>$	$<$	$>$	$<$	$<$	Oneven	Negatief	$4xy$
15	$<$	$>$	$>$	$>$	$<$	$>$	Even	Positief	
16	$<$	$>$	$>$	$>$	$<$	$<$	Oneven	Positief	$2^x 2^y$
17	$<$	$>$	$>$	$>$	$<$	$<$	Even	Negatief	4^{xy}
18	$<$	$>$	$<$	$=$	$<$	$>$	Oneven	Positief	4^{xy}
19	$<$	$>$	$<$	$>$	$<$	$<$	Even	Negatief	
20	$<$	$>$	$>$	$<$	$<$	$<$		Positief	$4xy$
21	$<$	$>$	$<$	$<$	$<$	$<$	Oneven	Positief	4^{xy}
22	$<$	$>$	$<$	$>$	$<$	$<$	Even	Negatief	$2x \cdot 2y$
23	$<$	$>$	$<$	$>$	$<$	$<$	Even	Positief	4^{xy}
24	$<$	$>$	$>$	$>$	$<$	$<$	Even	Positief	$4xy$
25									
26	$<$	$>$	$<$	$>$	$<$	$<$	Even	Positief	4^{xy}
27	$<$	$>$	$<$	$>$	$<$	$<$	Even	Positief	Kan niet
28	$<$	$>$	$<$	$<$	$<$	$<$	Even	Negatief	
29	$<$	$>$	$<$	$=$	$<$	$<$	Even	Negatief	$4xy$
30	$<$	$>$	$>$	$>$	$>$	$<$	Even	Positief	$4xy$

Opdracht 4
Kees heeft het volgende opgeschreven:

$$\frac{3^6}{3^4} = 1^2.$$

Schrijf een uitleg op voor Kees, zodat hij weet wat hij fout heeft gedaan en hoe hij het goede antwoord kan krijgen.

Leerling	antwoord
1	$3^6/3^4 = 729/81 \neq 1$
2	
3	$\frac{729}{81} = \ldots$
4	Eerst machten uitrekenen, daarna pas delen
5	
6	
7	Eerst machten wegwerken en dan delen
8	
9	Eerst 3^6 uitrekenen en 3^4 en dat delen
10	
11	
12	Eerst 3^6 en 3^4 uitrekenen en dan is het veel makkelijker
13	Ze moeten gelijk zijn
14	
15	$\frac{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}{3\cdot3\cdot3\cdot3} = \frac{729}{81} = \ldots$
16	Hij moet $^{6-4}$ doen i.p.v. $^{6:4}$
17	
18	
19	
20	
21	
22	Dit is het verschil en je moet het delen door
23	Eerst machten oplossen en dan delen
24	
25	
26	Je doet $\frac{3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3}{3\cdot3\cdot3\cdot3}$
27	
28	
29	Eerst machten uitrekenen en dan delen
30	

Opdracht 5

Jan heeft thuis een plant die erg snel groeit. Deze plant groeit exponentieel: elke dag wordt de plant vier keer zo groot als de dag ervoor. Op woensdagochtend 6 uur is deze plant 1 cm lang.

(a) Hoe lang is de plant op vrijdagochtend 6 uur (2 dagen later)?
(b) Hoe lang was de plant op maandagochtend 6 uur (2 dagen eerder)?
(c) Hoe lang is de plant op woensdagavond 18 uur? Hoe heb je dit berekend?
(d) Tegen een grafiek van het verloop van de lengte van de plant op het werkblad.

Leerling	5a	5b	5c	5d
1	8 cm	0,25:4	6 cm	Recht, positieve punten
2	16 cm	0,25 cm	2 cm	Recht, alle punten
3	$2 \cdot 4 = 8$		2x zo groot, dus 2 cm	
4	16 cm	0,25:4	2cm, de helft van 4	Recht, positieve punten
5	16 cm			Recht, positieve punten, woe 0 cm
6				
7	16 cm	0,16 cm	2 cm, halve dag, dus x2	Recht, positieve punten
8	16 cm	0 cm	2x zo groot	Recht, 2 punten,
9	$4 \cdot 2 = 8cm$	1:8	2 cm	Recht, alle punten
10	$2^4 + 1 = 9$cm	-8		Recht, alle punten
11				
12			Dan is de plant 2x zo groot	
13	16 cm	0,25:4		exponentieel, positieve punten
14	8cm	$1 : 8 = \frac{8}{10} = 0,8cm$	$24 : 12 = 2,4 : 12 = 1/3$	
15	$1 \cdot 4^2 = 8$	$1 : 4^2 = 1/24$	$1 \cdot 4^{0,5} = 2$	Recht, positieve punten, woe 0cm
16	16 cm	0,0625 cm	2 cm	Recht, positieve punten
17	8 cm	-8 cm	2 cm	Recht, 2 punten, woe 0cm
18	8 cm		2x zo groot	Recht, positieve punten, woe 0cm
19	16 cm			
20	1,5 cm	3 cm		Recht, positieve punten
21	16 cm	0,25:4		Recht, 2 punten, woensdag 0cm
22	224 cm	1^{-8}		Recht, 2 punten
23	$1^4 \cdot 2 = 2$			Recht, 2 punten
24	4 cm	-4 cm		
25				
26	16 cm	1/16 cm	8 cm	Recht, 2 punten, woe 0cm
27				
28				
29	16 cm	het bestond toen nog niet	4:2=2 cm	Recht, positieve punten, woe 0cm
30	16 cm	$0,06\frac{1}{4}$ cm	2 cm	Recht, alle punten

C Interview leerlingen

C.1 Opdracht 2c-f, 3a-b en 5d

- Leg je antwoorden bij 2c-f en 3a-b eens uit (stuk voor stuk gevraagd).
- Bij opdracht 5d had je rechte lijnen tussen de punten. Waarom?

C.2 Nieuwe opdrachten

Ik heb nog 2 opdrachten. Als deze opgaven op de toets zouden komen, hoe zou je ze dan oplossen?

- $3333^5 : 1111^5$
- $\left(\frac{1}{12}\right)^8 \cdot 24^8$

D Interview Leraren

Aan welk van de volgende klassen geeft u les of hebt u de afgelopen jaren les gegeven in havo, vwo of Mavo?

- Klas 1
- Klas 2
- Klas 3

D.1 Uitleggen van het onderwerp

Uitleg voor klas 1 (als u hier les aan geeft of heeft gegeven)
In klas 1 krijgen de leerlingen voor het eerst te maken met machten en exponenten. Hoe introduceert u dit onderwerp?

- Volgt u de uitleg die in het boek staat? Wat voegt u dan zelf toe aan de uitleg?
- Gebruikt u voorbeelden uit het dagelijks leven bij het introduceren van dit onderwerp? Zo ja, welke? En op wat voor manier? En worden deze voorbeelden ook gebruikt zodra verschillende rekenregels bij dit onderwerp worden geïntroduceerd en uitgelegd?
- Heeft u nog een lesvoorbereiding / Powerpoint / iets anders wat u hiervoor gebruikt? Zou u deze dan toe willen voegen?

Uitleg voor klas 2 (als u hier les aan geeft of heeft gegeven)
In klas 2 hebben de leerlingen al een basis van machten en exponenten. In de methode Getal en Ruimte komen er twee nieuwe onderwerpen/regels aan bod: Machten delen en Negatieve machten.

- Op welke manier bouwt u verder op wat de leerlingen al weten van klas 1?
- Op welke manier legt u machten delen uit?
- Op welke manier legt u negatieve machten uit?
- Heeft u nog een lesvoorbereiding / Powerpoint / iets anders wat u hiervoor gebruikt?

Uitleg voor klas 3 (als u hier les aan geeft of heeft gegeven)
In klas 3 krijgen de leerlingen te maken met exponentiële groei. Hierbij komen ook machtsfuncties aan bod.

- Op welke manier bouwt u verder op wat de leerlingen al weten van klas 1 en 2?
- Hoe legt u de machten uit met een niet geheel exponent (breuk in de exponent/rationeel getal in de exponent)?
- Heeft u nog een lesvoorbereiding / Powerpoint / iets anders wat u hiervoor gebruikt? Zou u deze dan toe willen voegen?

D.2 Fouten die leerlingen maken

Er zijn veel fouten te vinden die leerlingen maken bij het machtsverheffen.

- Welke fouten of misconcepties komt u tegen bij uw leerlingen?
  - Welke fouten met betrekking tot de betekenis van machtsverheffen?
  - Welke fouten met betrekking tot rekenregels die niet (goed) toegepast worden?
  - Welke fouten met betrekking tot een minteken?
  - Welke fouten met betrekking tot gebroken exponenten?
  - Welke fouten die niet bij de bovenstaande fouten horen?
- Wat is naar uw mening de reden dat leerlingen deze fouten maken?

D.3 Het voorkomen van fouten

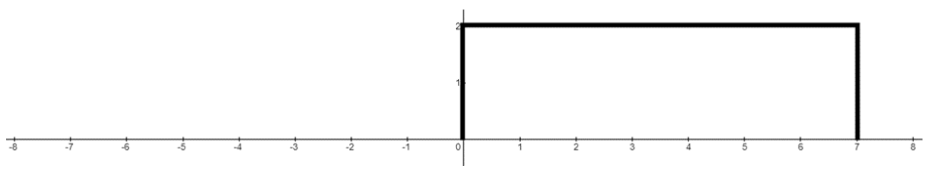
In de bovenstaande vragen is het onderwerp "fouten van leerlingen" besproken. Nu wil ik het hebben over de manier waarop geprobeerd wordt deze fouten te voorkomen

- Wat doet u eraan om de fouten, die net genoemd zijn, te voorkomen?
  - Bij fouten met betrekking tot de betekenis van machtsverheffen?
  - Bij fouten met betrekking tot rekenregels die niet (goed) toegepast worden?
  - Bij fouten met betrekking tot een minteken?
  - Bij fouten met betrekking tot gebroken exponenten?
  - Bij fouten die niet bij de bovenstaande fouten horen?
- Wat moeten leerlingen doen om ervoor te zorgen dat zij deze fouten niet maken? En op welke manier worden ze hiervoor gestimuleerd door de leraar?

E Opgaven in de context van machtsverheffen

E.1 Voetbal-vraag

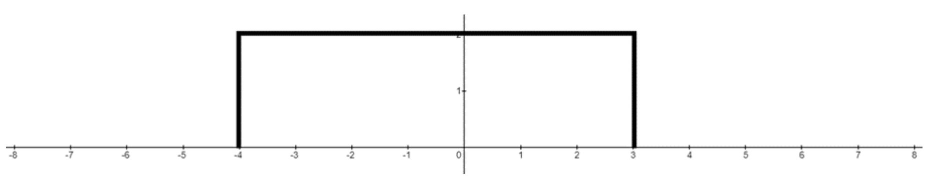
De achtertuin van Tim en Gert is 16 meter lang. Langs de schutting is de tuin genummerd van -8 tot 8, zie afbeelding 4. Ook hebben ze een voetbal-goal van 7 meter. De linker paal wordt bij 0 neergezet, zodat de rechter paal bij 7 komt. Met een bal schieten ze in het goal. Om te berekenen hoeveel punten iemand haalt, wordt het cijfer waar de bal binnen geschoten is, met zichzelf vermenigvuldigd. Als Tim de bal bij 3 naar binnen schopt, krijgt hij 3x3=9 punten.



Afbeelding 4: Achtertuin met goal

(a) Gert schopt de bal bij 6 in het goal. Hoeveel punten krijgt hij?
(b) Tim schopt de bal precies in het midden van het goal (bij 3,5). Hoeveel punten krijgt hij?
(c) Hoeveel punten kunnen Tim en Gert maximaal krijgen per keer dat ze de bal in het goal schieten?

Gert en Tim verplaatsen het goal. Nu staat de linker paal bij -4, zie afbeelding 5.



Afbeelding 5: Achtertuin met goal verplaatst

(d) Tim schopt de bal bij -2 binnen. Hoeveel punten krijgt hij?
(e) Hoeveel punten kunnen Tim en Gert nu maximaal krijgen per keer dat ze de bal in het goal schieten?

E.2 Bacterie-vraag

Bioloog Tom heeft een nieuw soort bacterie ontdekt. Deze soort breidt snel uit. Op dag 10 zijn er 10.000 bacteriën van deze soort. Elke dag verdubbelt dit aantal zich.

(a) Hoeveel bacteriën zijn er op dag 11? En hoeveel op dag 12?
(b) Op welke dag zijn er meer dan 100.000 bacteriën?

Tom wil graag weten hoeveel bacteriën er de voorgaande dagen waren.

(c) Hoeveel bacteriën waren er op dag 9? en hoeveel op dag 8?
(d) Op welke dag waren er voor het eerst meer dan 1.000 bacteriën?

F Tabel met fouten

In de onderstaande tabel zijn zo goed als alle fouten te vinden die tegengekomen zijn in de literatuur, bij de toets of in de vragenlijst.

Fouten met betrekking tot de betekenis van machtsverheffen		
Fout / Misconceptie		**Tegengekomen in/bij**
Vermenigvuldigen van grondtal met exponent		Literatuur, docenten en toets
Omwisselen rol grondtal en exponent		Literatuur
Fouten met betrekking tot de rekenregels		
Regel	**Fout / Misconceptie**	**Tegengekomen in/bij**
$a^0 = 1$	$a^0 = a$ $a^0 = 0$	Literatuur en toets Literatuur, docenten en toets
$a^x a^y = a^{x+y}$	Grondtallen optellen of vermenigvuldigen, exponenten vermenigvuldigen of een combinatie van deze fouten	Literatuur, docenten en toets
$a^x b^x = (ab)^x$	Grondtallen optellen, exponenten optellen of vermenigvuldigen of een combinatie van deze fouten	Literatuur, docenten en toets
$a^x b^y$ kan niet verder vereenvoudigd worden	grondtallen optellen of vermenigvuldigen, exponenten optellen of vermenigvuldigen of een combinatie van deze fouten	Literatuur, docenten en toets
$a^x / b^x = (a/b)^x$	Exponenten delen of vermenigvuldigen, grondtallen delen Geen regel toepassen	Literatuur, docenten en toets Toets
$a^x / a^y = a^{x-y}$	Grondtallen vermenigvuldigen of aftrekken, exponenten aftrekken of delen Geen regel toepassen	Literatuur, docenten en toets Toets
$a^x + a^x = 2a^x$	Exponenten optellen, grondtallen optellen	Literatuur, docenten en toets
$a^x + a^y$ kan niet verder vereenvoudigd worden	Exponenten optellen, grondtallen optellen	Literatuur, docenten en toets
$(a^x)^y = a^{xy}$	Exponenten optellen	Docenten
Fouten met betrekking tot mintekens in of bij machten		
Fout / Misconceptie		**Tegengekomen in/bij**

Minteken in het grondtal	$(-a)^p = -a^p$	Literatuur, docenten en toets
Minteken in de exponent	a^{-p}: $-a^p$, $\frac{a}{p/1}$, $\frac{p}{a}$, $\frac{a}{1/p}$ en $a^{1/p}$	Literatuur, docenten en toets
Minteken in grondtal en exponent	$(-a)^{-p} = a^p$	Toets
Fouten met betrekking tot gebroken exponenten		
Fout / Misconceptie		**Tegengekomen in/bij**
$\sqrt[3]{x} = x^{-3}$		Docenten
$a^{p/q}$: $\frac{ap}{q}$ en $\frac{a^p}{q}$		Literatuur
Overige fouten		
Fout / Misconceptie		**Tegengekomen in/bij**
Lineaire regels toepassen bij exponentiële groei		Toets
Verkeerde rekenvolgorde	$3 \cdot 4^2 = 12^2 = 144$	Docenten

Tabel 5: Fouten bij machtsverheffen