De Priemgetalstelling en de stelling van Dirichlet, twee getaltheoretische stellingen met een analytisch bewijs

Charlotte Vlek

november 2006

Inhoudsopgave

Inleiding

Een priemgetal is een geheel getal groter dan 1, dat alleen door 1 en zichzelf deelbaar is. Veel mensen weten wel wat een priemgetal is, en kunnen er ook wel een paar noemen. Maar ze weten vaak niet dat er nog steeds veel onderzoek naar gedaan wordt, dat er bijvoorbeeld nog altijd mensen bezig zijn met nog grotere priemgetallen bepalen dan we tot nu toe kennen. Dit lijkt een nogal nutteloze bezigheid, aangezien Euclides (3e eeuw v. Chr.) ons al bewezen heeft dat er oneindig veel priemgetallen zijn.
Toch blijft het onderwerp fascinerend. De meeste wiskundigen die zich er mee bezig houden doen dit niet voor het nut, maar voor de schoonheid ervan. En dit laatste is iets dat je misschien alleen begrijpt als je het zelf ook inziet. Zoals Paul Erdős (1913-1996) ooit zei: "Why are numbers beautiful? It's like asking why Beethoven's Ninth Symphony is beautiful. If you don't see why, someone can't tell you. I know numbers are beautiful. If they aren't beautiful, nothing is."

Uitleggen waarom een priemgetal, of algemener getaltheorie, zo mooi kan zijn is dus onmogelijk volgens Erdős. Priemgetallen zijn echter zeker wel bijzonder: de zogenaamde hoofdstelling van de rekenkunde zegt dat elk natuurlijk getal op volgorde na uniek geschreven kan worden als een product van priemgetallen. Je zou het dus kunnen beschouwen als een soort "bouwstenen"van de wiskunde.
Overigens hebben ze ook nog nut: de Britse wiskundige G.H. Hardy (1877-1947) wilde niets liever dan nutteloze (pure) wiskunde beoefenen, en dus begon hij aan de priemgetallen te rekenen. Jaren later bleek zijn werk echter zeer nuttig voor het coderen van geheime militaire boodschappen.

In de nu volgende bachelorscriptie zal gekeken worden naar twee stellingen over priemgetallen: de stelling van Dirichlet over priemgetallen in arithmetische progressies, en de priemgetalstelling. Opvallend is dat beide stellingen getaltheoretisch zijn, en beide een analytisch bewijs hebben. De bewijzen van beide stellingen, die veel overeenkomsten hebben, zullen behandeld worden, naast de geschiedenis hiervan.

Geschiedenis

Al eeuwenlang heeft men zich bezig gehouden met allerlei verschillende problemen die met priemgetallen te maken hebben. Zo heeft men zich ook al heel lang afgevraagd op wat voor manier de priemgetallen verdeeld zijn. Om dit vast te stellen kijken we naar een bepaald getal x, en hoeveel priemgetallen er zijn, kleiner dan dit getal. Dit aantal wordt ook wel aangeduidt met $\pi(x)$, formeel gedefiniëerd als

$$\pi(x) = \#\{p \leq x \mid p \text{ priem}\}.$$

Een belangrijk vraagstuk uit de wiskunde was of er een simpele relatie te vinden is, die zegt hoe $\pi(x)$ zich gedraagt als x naar oneindig gaat. Er werd dus gezocht naar een eenvoudige functie $f(x)$, zodat $\pi(x) \sim f(x)$. Ofwel: zodat de waarde van $f(x)$ het aantal priemgetallen kleiner dan x zo goed mogelijk benadert naarmate x groter wordt. Dat houdt dus in dat de verhouding $\frac{\pi(x)}{f(x)}$ voor x naar oneindig naar 1 moet naderen:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{f(x)} = 1.$$

Over zo'n functie $f(x)$ heeft men lange tijd weinig kunnen zeggen. In 1798 kwam Legendre (1752-1833) met de eerst goede schatting van $f(x)$, die hij in 1808 zelf nog verbeterde tot het volgende vermoeden:

$$f(x) = \frac{x}{\log x - B},$$

waarin log de natuurlijke logaritme is, en B elke willekeurige constante. Als x naar oneindig gaat heeft deze constante B namelijk geen invloed meer, want $\frac{\log x - B}{\log x - C} \to 1$ als $x \to \infty$

Onafhankelijk van dit resultaat ontdekte Gauss (1777-1855) een soortgelijke benadering. Het werd pas na zijn dood gepubliceerd, in 1863, hoewel hij er op 14-jarige leeftijd waarschijnlijk al aan begonnen was. Gauss had het aantal priemgetallen per blok van 1000 getallen genoteerd: tussen 1 en 1000 vond hij 168 priemgetallen, tussen 1001 en 2000 vond hij er 135, en zo had hij een tabel met voor alle blokken van 1000 getallen tot 50.000 het aantal priemgetallen.

Aan de hand van deze gegevens kwam hij tot de volgende benadering van het aantal priemgetallen tussen de getallen a en b:

$$f(x) = \int_a^b \frac{1}{\log u} \mathrm{d}u.$$

Voor de benadering van $\pi(x)$ komt dit dus neer op de volgende formule:

$$f(x) = \int_2^x \frac{1}{\log u} \mathrm{d}u.$$

De benaderingen van Legendre en Gauss lijken erg op elkaar, en door beide schattingen voor $f(x)$ in te vullen in de relatie $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{f(x)} = 1$, krijgen we dezelfde bewering:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1.$$

De bewering in deze laatste vergelijking wordt ook wel de priemgetalstelling genoemd. Dit is een stelling waar grote wiskundigen zich jarenlang het hoofd over gebroken hebben, maar waar uiteindelijk in 1896 bijna tegelijkertijd twee bewijzen voor geleverd werden, door Hadamard (1865-1963) en De la Vallée Poussin (1866-1962). Hier is echter veel werk aan vooraf gegaan, niet alleen van denkers die met hun bijdrage de oplossing van het probleem weer een stukje dichterbij brachten, maar ook andere vooruitgang binnen de wiskunde, die nieuwe inzichten verschafte. Een belangrijk resultaat dat in deze context genoemd mag worden is het bewijs van Euler (1707-1783) dat er oneindig veel priemgetallen zijn, en het daarop geïnspireerde bewijs voor de stelling van Dirichlet over priemgetallen in een arithmetische progressie.

Eulers bewijs dat er oneindig veel priemgetallen zijn

Dat er oneindig veel priemgetallen zijn, is al bekend sinds Euclides dit bewezen heeft. Zijn bewijs hiervan was erg elegant, een bewijs uit het ongerijmde: door aan te nemen dat je *de* eindige verzameling van alle priemgetallen hebt, kun je altijd een priemgetal construeren dat geen element van deze verzameling is.
In 1737 bewees Euler het opnieuw, maar nu met een andere methode. Om te beginnen bewees hij de volgende gelijkheid:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p \text{ priem}} (1 + p^{-s} + p^{-2s} + ...) = \prod_{p \text{ priem}} (1 - p^{-s})^{-1},$$

waarin s een variabele is met $Re(s) > 1$.
De eerste gelijkheid is een gevolg van de hoofdstelling van de rekenkunde, die zegt dat elk positief geheel getal ontbonden kan worden in een uniek product van priemgetallen. Beschouw namelijk eerst het eindige product $\prod_{p\leq P, p \text{ priem}}(1 + p^{-s} + p^{-2s} + ...)$, het product van alle priemgetallen kleiner dan een vast getal

P tot elke willekeurige negatieve macht, veelvoud van s, verheven. Door dit product uit te werken ontstaat er een som van alle mogelijke combinaties van priemgetallen tot de macht $-s$ verheven, waarbij de priemgetallen kleiner zijn dan P. Omdat nu elk positief geheel getal te schrijven is als een uniek product van priemgetallen, en omgekeerd ook elk product van priemgetallen natuurlijk een positief geheel getal is, staat hier precies de som van n^{-s} voor alle n met priemfactoren kleiner dan P. Door nu P naar oneindig te laten gaan ontstaat de gelijkheid. De tweede gelijkheid is verkregen door het omschrijven van het tweede product.

Het product dat op deze manier is afgeleid, wordt ook wel het product van Euler genoemd. Hiermee bewees hij dat er oneindig veel priemgetallen zijn door op te merken dat wanneer er een eindig aantal zou zijn, dat het product voor $s = 1$ dan ook een eindig getal zou zijn. Dit is echter in tegenspraak met het feit dat de somreeks waar deze aan gelijk is oneindig is. Deze reeks is voor $s = 1$ namelijk de bekende *harmonische* reeks, waarvan men ook toen al wist dat die divergeert.

Het bijzondere aan dit nieuwe bewijs van Euler voor het oneindig zijn van het aantal priemgetallen, is dat het op een nieuwe manier tegen het probleem aan kijkt. In plaats van de "ouderwetse"wiskunde gebruikt Euler hier een resultaat uit de analyse, namelijk dat de harmonische reeks divergeert, om een getaltheoretisch probleem op te lossen. Deze nieuwe methode heeft veel bijgedragen aan de 19$^{\text{de}}$ eeuwse getaltheorie.

De stelling van Dirichlet over priemen in arithmetische progressies

Naast de uitspraken die Legendre gedaan heeft over de verdeling van priemgetallen over de natuurlijke getallen, poneerde hij ook een vermoeden aangaande de verdeling van priemgetallen in een zogenaamde arithmetische progressie: een rij getallen van de vorm $a+km$ met a en m vast en k die de natuurlijke getallen doorloopt. Wanneer dan ggd(a,m)=1, zo stelt Legendre, dan bevinden zich in de rij altijd oneindig veel priemgetallen. Oftewel:

Stelling over priemen in arithmetische progressies (Dirichlet): *Als $a, m \geq 1$ met ggd(a,m)=1, dan is de verzameling $P_a = \{p \equiv a \ (mod\, m) | p \ priem\}$ oneindig.*

Deze stelling is in 1837 bewezen door Dirichlet (1805-1859), die daarbij als een van de eersten een deels analytisch bewijs gaf voor een getaltheoretisch probleem. Het bewijs van Dirichlet zal in de rest van dit hoofdstuk volgen.

Dirichlet-dichtheid

Voor het bewijs dat Dirichlet gaf van de stelling over priemen in arithmetische progressies gebruikte hij de zogenaamde Dirichlet-dichtheid van de verzameling P_a. We definiëren deze Dirichlet-dichtheid d van een verzameling $V \subset \mathbb{N}$ als volgt:

$$d := \lim_{s \downarrow 1} \frac{\sum_{p \in V} \frac{1}{p^s}}{\log(\frac{1}{s-1})}, \text{ als deze limiet bestaat.}$$

In de definitie valt gemakkelijk te zien dat de Dirichlet-dichtheid van een eindige verzameling 0 is. Overigens is voor dit bewijs het gebruik van complexe getallen niet nodig. Maar omdat een aantal dingen uit dit bewijs ook nodig zijn voor het bewijs van de priemgetalstelling, zullen ook hier overal complexe getallen worden gebruikt. Met gebruik van de Dirichlet-dichtheid volgt onze stelling over priemen in een arithmetische progressie dus uit de algemenere stelling:

Stelling 1: *Als $a, m \geq 1$ met ggd(a,m)=1, dan heeft de verzameling $P_a = \{p = a \ (mod\, m) | p \text{ priem}\}$ Dirichlet-dichtheid $\frac{1}{\phi(m)}$.*
Hierin is $\phi(m)$ de Euler-ϕ functie, gedefinieerd als

$$\phi(m) = \#\{b < m | \ \mathrm{ggd}(b, m) = 1\}.$$

Deze functie telt dus het aantal getallen kleiner dan een gegeven getal m, die relatief priem zijn met m.
Wanneer we stelling 1 kunnen bewijzen volgt daaruit automatisch de stelling over priemen in arithmetische progressies. De verzameling P_a heeft dan immers een Dirichlet-dichtheid ongelijk aan 0, en de verzameling is dus oneindig.
Om nu stelling 1 te bewijzen gebruiken we zogenaamde modulaire karakters.
Dit zijn homomorfismen χ van de eenhedengroep $G(m) = (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ naar de eenhedengroep $\mathbb{C}^*$.

Bewijs van stelling 1

We bekijken in stelling 1 de Dirichlet-dichtheid van P_a, en zodoende de functie $g_a(s) := \sum_{p \in P_a} \frac{1}{p^s}$. Deze bestaat voor $Re(s) > 1$ omdat $\sum_{p \text{ priem}} p^{-s}$ dan convergeert, zoals bewezen zal worden bij lemma 3. Ook kunnen we $g_a(s)$ anders schrijven:
Lemma 1: *$g_a(s) = \frac{1}{\phi(m)} \sum_\chi \chi(a \ mod\ m)^{-1} f_\chi(s)$ waarbij de som loopt over alle karakters χ van $G(m)$, en $f_\chi(s) := \sum_{p \nmid m} \frac{\chi(p \ mod \ m)}{p^s}$*

Bewijs: we kunnen de gelijkheid inzien door de definitie van f_a in te vullen en de eigenschappen van χ te gebruiken:

$$\frac{1}{\phi(m)} \sum_\chi \sum_{p \equiv a \bmod m} \frac{\chi(a)^{-1}\chi(p)}{p^s} = \frac{1}{\phi(m)} \sum_{p \nmid m} \frac{\phi(m)}{p^s} = g_a(s)$$

Hierin hebben we gebruikt dat

$$\sum_\chi \chi(a \bmod m)^{-1} \chi(p) = \sum_\chi \chi((a \bmod m)^{-1} p \bmod m)$$

$$= \begin{cases} \phi(m) & \text{als } a^{-1}p = 1 \ (\mathrm{mod}\ m) \text{ dus als } p = 1 \ (\mathrm{mod}\ m) \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Deze laatste gelijkheid volgt uit het feit dat $\chi((a \bmod m)^{-1} p \bmod m)$ alleen een bijdrage levert, namelijk 1, als $a^{-1}p = 1$ (mod m). Bovendien zijn er precies $\phi(m)$ verschillende χ. Zie ook [8] pagina 63.

Omdat we kijken naar de dichtheid van de verzameling priemgetallen, vullen we deze andere schrijfwijze voor $g_a(s)$ in in de definitie van de Dirichlet-dichtheid. Dan krijgen we:

$$d := \lim_{s \downarrow 1} \frac{\frac{1}{\phi(m)} \sum_\chi \chi(a \bmod m)^{-1} f_\chi(s)}{\log(\frac{1}{s-1})}.$$

Hierin kunnen de breuk $\frac{1}{\phi(m)}$ buiten de limiet halen, en als we dan de rest naar 1 kunnen krijgen, vinden we de dichtheid $d = \frac{1}{\phi(m)}$. Dit is precies wat de stelling beweert. Als we dan kijken naar een gedeelte van de overblijvende limiet, blijkt dat:
Lemma 2:

$$\lim_{s\to 1} \frac{f_\chi(s)}{\log(\frac{1}{s-1})} = 1$$

voor $\chi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$ *met* $\chi(a \mod m) = 1$ *voor alle* $a \mod m$.

Om dit lemma te kunnen bewijzen kijken we naar de zogenaamde Riemann zeta functie: $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ voor $Re(s) > 1$. Deze Riemann zeta functie zijn we al tegen gekomen bij Eulers bewijs dat er oneindig veel priemgetallen zijn, en zal ook bij het bewijs van de priemgetalstelling een grote rol spelen. Van deze functie weten we de volgende eigenschap:

Lemma 3: *De Riemann zeta functie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ *is holomorf en ongelijk 0 voor* $Re(s) > 1$.
Bewijs: dat de zeta functie holomorf is op $Re(s) > 1$ kunnen we inzien door te kijken naar de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} |n^{-s}| = \sum_{n=1}^{\infty} |e^{-s\log(n)}| = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-Re(s)\log(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-Re(s)}.$$

We zien dat dit precies convergeert als $Re(s) > 1$. Om in te zien dat de zeta-functie niet 0 is op dit gebied, kijken we naar

$$\log\zeta(s) = \sum_{p \text{ priem}} \log(1-p^{-s})^{-1} = -\sum_{p \text{ priem}} \log(1-p^{-s}).$$

Dankzij Euler konden we hier voor de zeta functie het bovenstaande product invullen; zie de paragraaf "Eulers bewijs dat er oneindig veel priemgetallen zijn". De uitdrukking $\sum_{p \text{ priem}} \log(1-p^{-s})$ convergeert. We gebruiken namelijk de eigenschap dat als $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergeert, en $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ bestaat, dat dan ook $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergeert, als alle $a_n,\ b_n > 0$. In dit geval nemen we dus $a_n = |\log(1-n^{-s})|$ en $b_n = |n^{-s}|$. Dan geldt voor de limiet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\log(1-n^{-s}) - \log 1|}{|n^{-s}|} = |\log' 1| = 1$$

zodat $\sum_{n=0}^{\infty} \log(1-n^{-s})$ absoluut convergeert, en dus gewoon convergeert. De sommatie over alleen de priemgetallen $\sum_{p \text{ priem}} \log(1-p^{-s})$ convergeert dus ook.
Doordat de logaritme van de zeta-functie convergeert, kunnen we nu concluderen dat de functie geen nulpunten heeft voor $Re(s) > 1$.

Om lemma 2 te bewijzen kijken we eerst nog naar een andere eigenschap van de zeta functie:

Lemma 4: *Er geldt*

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \phi(s), \text{ met } \phi(s) \text{ holomorf voor } Re(s) > 0.$$

Bewijs: we schrijven

$$\frac{1}{s-1} = \int_1^\infty t^{-s}\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} t^{-s}\mathrm{d}t.$$

Als we dit invullen voor de zeta functie staat er:

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^\infty (n^{-s} - \int_n^{n+1} t^{-s}\mathrm{d}t) = \frac{1}{s-1} + \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} (n^{-s} - t^{-s})\mathrm{d}t.$$

Voor elke n is de integraal holomorf voor $Re(s) > 0$. Er geldt:

$$|\int_n^{n+1} (n^{-s} - t^{-s})\mathrm{d}t| \leq \sup_{n \leq t \leq n+1} |n^{-s} - t^{-s}|,$$

wat we als volgt kunnen afschatten: we definiëren de functie $f(t) = t^{-s}$ en schrijven dit voor $-s = a + bi$ als:

$$f(t) = t^a(\cos(a \log t) + i \sin(a \log t)).$$

We gebruiken de middelwaardestelling om te zien dat

$$\begin{aligned}|f(n) - f(t)| &= |(Re(f(n)) - Re(f(t))) + i(Im(f(n)) - Im(f(t)))| \\ &\leq |n-t||Re(f)'(\zeta_1) + i(Im(f)'(\zeta_2))|.\end{aligned}$$

We bepalen de afgeleides van het reële deel en het imaginaire deel van $f(t)$ en schatten af:

$$\begin{aligned}|n-t||Re(f)'(\zeta_1)+i(Im(f)'(\zeta_2))| &= |n-t||(\zeta_1^a cos(a \log \zeta_1))' + (\zeta_2^a i \sin(a \log \zeta_2))'| \\ &\leq (|2a| + |2b|)\frac{1}{n^{a+1}}.\end{aligned}$$

Omdat we nu weten dat

$$\sup_{n \leq t \leq n+1} |n^{-s} - t^{-s}| \leq (|2Re(s)| + |2Im(s)|)\frac{1}{n^{Re(s)+1}}$$

kunnen we concluderen dat de reeks

$$\phi(s) := \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} (n^{-s} - t^{-s})\mathrm{d}t$$

uniform convergeert voor $Re(s) \geq \epsilon$, en dus holomorf is.

Nu hebben we voldoende informatie om lemma 2 te bewijzen. We kijken namelijk naar de logaritme van de zeta functie:

$$\log \zeta(s) = \sum_{p \text{ priem},\ k \geq 1} \frac{1}{kp^{ks}} = \sum_{p \text{ priem}} p^{-s} + \sum_{p \text{ priem}} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{kp^{ks}},$$

waarbij de laatste (dubbele) som absoluut gemajoreerd wordt door

$$\sum_{p \text{ priem}} \sum_{k \geq 2} |\frac{1}{p^{ks}}| = \sum_{p \text{ priem}} \frac{1}{|p^s|(|p^s|-1)} \leq \sum_{p \text{ priem}} \frac{1}{p(p-1)} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1,$$

zodat deze begrensd is. Omdat, zoals we gemakkelijk uit lemma 4 kunnen afleiden, de zeta-functie een simpele pool heeft in $s = 1$ geldt

$$\lim_{s \downarrow 1} \frac{\log \zeta(s)}{\log(\frac{1}{s-1})} = 1.$$

Vullen we onze uitwerking van $\log \zeta(s)$ in, dan krijgen we de volgende uitdrukking:

$$\lim_{s \downarrow 1} \frac{\sum_{p \text{ priem}} p^{-s} + \sum_{p \text{ priem}} \sum_{k \geq 2} \frac{1}{kp^{ks}}}{\log(\frac{1}{s-1})} = 1.$$

Wegens de begrensdheid van de dubbele som kunnen we nu concluderen dat:

$$\lim_{s \downarrow 1} \frac{\sum_{p \text{ priem}} p^{-s}}{\log(\frac{1}{s-1})} = 1.$$

Omdat onze functie $f_\chi(s)$ voor $\chi = 1$ slechts een eindig aantal termen afwijkt van $\sum_{p \text{ priem}} p^{-s}$, geldt

$$\lim_{s \downarrow 1} \frac{f_\chi(s)}{\log(\frac{1}{s-1})} = 1 \text{ voor } \chi = 1,$$

en hebben we lemma 2 bewezen.

Met lemma 2 hebben we dus dat $\lim_{s \downarrow 1} \frac{f_\chi(s)}{\log(\frac{1}{s-1})} = 1$ voor $\chi = 1$. We willen graag bewijzen dat voor $g_a(s) := \sum_{p \in P_a} \frac{1}{p^s}$ geldt:

$$\lim_{s \downarrow 1} \frac{g_a(s)}{\log(\frac{1}{s-1})} = \frac{1}{\phi(m)}.$$

Dit geldt inderdaad als we kunnen bewijzen dat

$$\lim_{s \downarrow 1} \frac{\sum_\chi f_\chi(s)}{\log(\frac{1}{s-1})} = 1.$$

Omdat we met lemma 2 al weten dat voor $\chi = 1$ de limiet al naar de gewenste waarde nadert, willen we graag dat voor alle andere χ de f_χ begrensd blijft:

Lemma 5: *Voor $\chi \neq 1$ blijft $f_\chi(s)$ begrensd voor $s \downarrow 1$*

Het bewijs van lemma 5

Om het bewijs van lemma 5 te kunnen leveren, hebben we de theorie van de Dirichlet L-functies nodig. We kijken naar een getal $m \geq 1$ en een karakter χ modulo m. Dit karakter levert de afbeelding $\chi(n) : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ die n afbeeldt op 0 als ggd$(n,\ m) \neq 1$, en anders op op $\chi(n \bmod m)$. We definiëren hierbij de Dirichlet L-functie:

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

Voor $\chi \neq 1$ kunnen we schrijven

$$L(s, \chi) = \Pi_{p \text{ priem}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}}, \text{ voor } Re(s) > 1,$$

met een soortgelijke redenering als het Eulerproduct van de zeta functie.
We gebruiken dit om $\log L(s, \chi)$ te bepalen, waarbij we voor de definitie van de log nemen dat $\log \frac{1}{1-a} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$. Deze reeks convergeert voor $|a| \leq 1$, $a \neq 1$. Dan krijgen we met $a = \frac{\chi(p)}{p^s}$, die voldoet aan $|a| \leq 1$ als $Re(s) \geq 0$:

$$\log L(s, \chi) = \sum_{p \text{ priem}} \log \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} = \sum_{p \text{ priem}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{\chi(p)}{p^s})^n}{n} = \sum_{p \text{ priem}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(p)^n}{np^{ns}}$$

voor $Re(s) > 1$.
We splitsen de som op, zodat

$$\log L(s, \chi) = f_\chi(s) + \sum_{p \text{ priem}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\chi(p)^n}{np^{ns}}, \text{ voor } Re(s) > 1,$$

en we hebben voor $\chi \neq 1$:

$$f_\chi(s) = \log L(s, \chi) - \sum_{p \text{ priem}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\chi(p)^n}{np^{ns}}, \text{ voor } Re(s) > 1.$$

Nu rest ons dus slechts nog te bewijzen dat $\log L(s, \chi)$ en de som $\sum_{p \text{ priem}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\chi(p)^n}{np^{ns}}$ onder de voorwaarden $\chi \neq 1$ en $Re(s) > 1$ begrensd zijn.

Er geldt dat $\log L(s, \chi)$ begrensd is voor $\chi \neq 1$, omdat $\log L(1, \chi)$ dat ook is voor $\chi \neq 1$. De laatste conclusie komt door het volgende lemma:
Lemma 6: $L(1, \chi) \neq 0$ *voor alle* $\chi \neq 1$.

Definiëer de functie $\zeta_m(s) := \Pi_\chi L(s, \chi)$. Als we hier voor de L-functies het product

$$L(s, \chi) = \Pi_{p \quad \text{priem}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}}, \text{ voor } Re(s) > 1$$

(zie eerder deze paragraaf) invullen, krijgen we:

$$\zeta_m(s) = \Pi_\chi \frac{1}{\Pi_{p \text{ priem}}(1 - \frac{\chi(p)}{p^s})}.$$

Dit kunnen we herschrijven:

$$\zeta_m(s) := \Pi_{p \nmid m} \frac{1}{(1 - \frac{1}{p^{f(p)s}})^{g(p)}}$$

waarin $f(p)$ de orde is van p mod m in de groep $(\mathbb{Z}/m(Z))^*$, en $g(p) = \frac{\phi(m)}{f(p)}$. We hebben hier gebruik dat voor $p \nmid m$ geldt

$$\Pi_\chi(1 - \chi(p)T) = (1 - T^{f(p)})^{g(p)}.$$

Dit geldt omdat voor W de verzameling van $f(p)$-eenheidswortels geldt $\Pi_{w \in W}(1 - wT) = 1 - T^{f(p)}$, en voor alle $w \in W$ precies $g(p)$ karakters χ zijn zodat $\chi(p \bmod m) = w$. De reden hiervoor is vergelijkbaar met het bewijs van [8] pagina 63, waar bij het bewijs van lemma 1 naar verwezen werd.

Dit product voor ζ_m is holomorf voor $Re(s) > 1$, omdat het een product met positieve coëfficiënten is. Neem nu aan dat $L(1, \chi) = 0$ voor een zekere $\chi \neq 1$. Het is de bedoeling tot een tegenspraak te komen, door te laten zien dat de reeks van $\zeta_m(s)$ nu moet convergeren in het halfvlak $Re(s) > 0$. Als we dan een bepaalde waarde voor s invullen met $Re(s) > 0$ blijkt de reeks toch te divergeren, en zullen we moeten concluderen dat de aanname $L(1, \chi) = 0$ voor een zekere $\chi \neq 1$ niet juist was.

We nemen dus eerst aan dat $L(1, \chi) = 0$ voor een zekere $\chi \neq 1$. Dan zou de functie $\zeta_m(s)$ holomorf zijn in $s = 1$, en direct ook in het halfvlak $Re(s) > 0$, omdat $L(s, \chi)$ voor $\chi = 1$ een analytische voortzetting heeft in dit halfvlak, en voor $\chi \neq 1$ convergeert voor $Re(s) > 0$. Omdat het een convergente Dirichlet-reeks is met positieve coëfficiënten zou de reeks in hetzelfde halfvlak moeten convergeren volgens het volgende lemma:
Lemma 7: *Laat $f = \sum a_n n^{-s}$ een Dirichlet reeks zijn, met coëfficiënten a_n reëel en $a_n \geq 0$. Als f convergeert voor $Re(s) > \rho$ met $\rho \in \mathbb{R}$, en f analytisch voortgezet kan worden tot een functie holomorf in een omgeving van het punt $s = \rho$, dan bestaat er een getal $\epsilon > 0$ zodat f convergeert voor $Re(s) > \rho - \epsilon$.*

Bewijs: we beginnen met voor s $s - \rho$ in te vullen, zodat we $\rho = 0$ kunnen nemen. Omdat f holomorf is voor $Re(s) > 0$ en in een omgeving rond 0, is f ook holomorf in de schijf $|s - 1| \leq 1 + \epsilon$ met $\epsilon > 0$. In het bijzonder convergeert de Taylorreeks in deze schijf.
De p-de afgeleide van f wordt gegeven door

$$f^{(p)}(s) = \sum_n a_n(-\log n)^p e^{-\log(n)s} = \sum_n a_n(-\log n)^p n^{-s} \text{ voor } Re(s) > 0$$

Deze uitdrukking convergeert wegens [8] pagina 64 (Lemma 1). Nu volgt $f^{(p)}(1) = (-1)^p \sum_n (\log n)^p a_n n^{-1}$. De Taylorreeks wordt nu

$$f(s) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}(s-1)^p f^{(p)}(1) \text{ voor } |s-1| \leq 1+\epsilon$$

Voor $s = -\epsilon$ hebben we dus

$$f(-\epsilon) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}(1+\epsilon)^p (-1)^p f^{(p)}(1),$$

maar $(-1)^p f^{(p)}(1) = \sum_n (\log n)^p a_n n^{-1}$ is een convergente reeks met positieve termen, zodat

$$f(-\epsilon) = \sum_{p,n} a_n \frac{1}{p!}(1+\epsilon)^p (\log n)^p n^{-1}$$

convergeert. We schrijven dit anders:

$$f(-\epsilon) = \sum_n a_n n^{-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}(1+\epsilon)^p (\log n)^p = \sum_n a_n e^{-\log n} e^{(\log n)(1+\epsilon)} = \sum_n a_n n^{\epsilon}$$

De Dirichlet-reeks convergeert dus voor $s = -\epsilon$, en dus ook voor $Re(s) > -\epsilon$.

Vanwege onze aanname $L(1,\chi) = 0$ voor een zekere $\chi \neq 1$ hebben we nu dat de reeksontwikkeling voor f convergent moet zijn voor $Re(s) > 0$.
Echter, de p-de term van ζ_m is gelijk aan

$$\frac{1}{(1-p^{-f(p)s})^{g(p)}} = (1 + p^{-f(p)s} + p^{-2f(p)s} + p^{-3f(p)s}...)^{g(p)},$$

die de volgende reeks domineert:

$$1 + p^{-\phi(m)s} + p^{-2\phi(m)s} + p^{-3\phi(m)s}...$$

ζ_m heeft dus alle coëfficiënten groter dan die van de reeks

$$\sum_{n=1,m=1}^{\infty} n^{-\phi(m)s}.$$

Deze reeks divergeert voor $s = \frac{1}{\phi(m)}$ (harmonische reeks), zodat we een tegenspraak krijgen. Daarom kan $L(s,\chi)$ niet nul zijn voor $\chi \neq 1$.

De begrensdheid van de som $\sum_{p \text{ priem}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\chi(p)^n}{np^{ns}}$ zien we door te kijken naar $\sum_{p \text{ priem}} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{np^{ns}}$. Deze kwamen we al eerder tegen, bij het bewijs van lemma 2. We hebben de reeks toen als volgt afgeschat:

$$\sum_{p \text{ priem}} \sum_{n \geq 2} \frac{1}{p^{ns}} = \sum_{p \text{ priem}} \frac{1}{p^s(p^s-1)} \leq \sum_{p \text{ priem}} \frac{1}{p(p-1)} \leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1$$

Hiermee kunnen we concluderen dat $f_\chi(s)$ begrensd blijft voor $\chi \neq 1$, en hebben we dus het bewijs van lemma 5 geleverd.

Het bewijs van de stelling over priemen in arithmetische progressies

Tot nu toe hebben we bewezen dat voor $g_a(s) := \sum_{p\in P_a} \frac{1}{p^s}$ geldt:

$$\lim_{s\downarrow 1} \frac{g_a(s)}{\log(\frac{1}{s-1})} = \frac{1}{\phi(m)}.$$

Dat betekent dat de Dirichlet-dichtheid van de verzameling P_a gelijk is aan $\frac{1}{\phi(m)}$, waarmee de verzameling oneindig is. De verzameling P_a hadden we gedefiniëerd als $P_a = \{p \equiv a \pmod m | p \text{ priem}\}$, zodat we inderdaad met stelling 1 het bewijs hebben geleverd dat er oneindig veel priemgetallen zijn in een arithmetische progressie a mod m met ggd(a, m)= 1.

De priemgetalstelling

Nadat eerst Legendre en toen Gauss een vrij nauwkeurige schatting hadden gemaakt van een functie die

$$\pi(x) = \#\{p \leq x \mid p \text{ priem}\}$$

kan benaderen, werd de priemgetalstelling voor het eerst precies geformuleerd:
De priemgetalstelling (Hadamard, De la Vallée Poussin)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} = 1.$$

Pas zo'n honderd jaar later zou de stelling bewezen worden, bijna tegelijkertijd door Hadamard en De la Vallée Poussin. Het doel van dit hoofdstuk is te schetsen hoe in de loop van deze honderd jaar het uiteindelijke bewijs telkens een stapje dichterbij kwam, en tot slot zal hier ook een bewijs geleverd worden.

Begin van een bewijs

In 1848 zette Chebyshev (1821-1874) de eerste stap op weg naar het bewijs van de priemgetalstelling. Hij toonde toen aan dat *als* de breuk $\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}$ een limiet had, dat deze limiet dan wel 1 moest zijn. En twee jaar later, in 1850, toonde Chebyshev bovendien aan dat de waarde van $\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}$ voor x groot genoeg begrensd werd door twee constanten a en A:

$$a = 0.932 < \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} < 1.106 = A.$$

Helaas is dit laatste nog niet voldoende om te concluderen dat de breuk een limiet heeft, de waarde zou bijvoorbeeld nog heen en weer kunnen springen tussen twee getallen, en dan nooit convergeren.
Zelfs toen anderen na Chebyshev de grenswaarden nog wat nauwkeuriger konden vaststellen, bleef het onduidelijk of $\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}$ wel convergeert, en dus bleef de priemgetalstelling onbewezen.

Nieuwe inzichten

In 1859 kwam Riemann (1826-1866) met een revolutionair idee. Zowel Euler als Chebyshev hadden voor hem al analyse gebruikt in hun bewijzen van getaltheoretische stellingen, door de som $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ te bekijken. Riemann zette dit voort, en beschouwde dezelfde som, maar dan met complexe waarden voor s. Hij gaf deze som als functie van s de naam "(Riemann) zeta functie"door de notatie die hij gebruikte:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.$$

Deze functie is gedefinieerd voor s met $Re(s) > 1$, zoals we gezien hebben bij lemma 3 in het hoofdstuk over de stelling van Dirichlet over priemen in arithmetische progressies. Riemann heeft een groot aantal eigenschappen van deze zeta functie aangetoond, en hoewel dit niet allemaal met het oog op de priemgetalstelling was, hebben zijn resultaten wel veel bijgedragen aan het bewijs van de stelling.
Riemann bewees allereerst dat de zeta functie geen nulpunten heeft voor s met $Re(s) > 1$, ook dit bleek uit lemma 3 van het vorige hoofdstuk.
Aangezien de zeta-functie tot nu toe alleen gedefiniëerd is voor s met $Re(s) > 1$ definiëren we $\zeta(s)$ voor andere waarden van s als de analytische voortzetting van de somfunctie. Riemann vond dat de zo gedefiniëerde zeta-functie overal in het complexe vlak analytisch is, behalve in het punt $s = 1$, waar de functie een eerste orde pool heeft, met residu 1. Zo is dus de functie $g(s) = \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ helemaal een analytische functie.
Aangezien de zeta-functie alleen in $s = 1$ een *eerste* orde pool heeft, kan de functie op de lijn $\{Re(s) = 1\}$ overal goed gedefiniëerd worden. Deze eigenschap wordt in bijna alle bewijzen van de priemgetalstelling gebruikt, maar helaas heeft Riemann zelf niet zo'n bewijs kunnen leveren. Het was hem echter wel bekend dat de nulpunten van de zeta-funcie met een reëel deel groter dan nul, allemaal in de band $0 < Re(s) < 1$ lagen. Hij formuleerde toen zijn beruchte hypothese, nu de Riemann Hypothese genaamd, dat al deze nulpunten op de lijn $\{Re(s) = \frac{1}{2}\}$ liggen. Wanneer deze hypothese bewezen kon worden, zou ook de priemgetalstelling bewezen zijn. Tot op de dag van vandaag is het bewijs echter nog niet geleverd, en moest dus ook Riemann zo vlak bij zijn doel accepteren dat het hem op die manier niet zou lukken de priemgetalstelling te bewijzen.

Het Bewijs

In 1896 werd eindelijk het bewijs voor de priemgetalstelling geleverd, en wel bijna tegelijkertijd door twee verschillende wiskundigen: Hadamard en De la Vallée Poussin. Zij maakten beide gebruik van de Riemann zeta functie, en enkele eigenschappen daarvan die Riemann aangetoond had. Deze bewijzen zijn echter vrij ingewikkeld. In de loop der tijd zijn er veel pogingen gedaan, en ook geslaagd, deze te vereenvoudigen. Hieraan heeft Landau (1877-1938) aan het begin van de twintigste eeuw veel bijgedragen, maar een grote doorbraak kwam van Wiener (1894-1964). De zogenaamde Wiener-Ikehara stelling, van hem en zijn leerling Ikehara samen, leverde een directer bewijs van de priemgetalstelling. Telkens blijft de theorie van de Riemann zeta-functie een belangrijk onderdeel van de bewijzen uitmaken, met als enige grote uitzondering het elementaire bewijs van Erdős en Selberg, dat hier verder terzijde zal worden gelaten. Een redelijk eenvoudig bewijs werd recentelijk nog geleverd door Jaap Korevaar, zijn bewijs zal hier gegeven worden. In plaats van de priemgetalstelling in zijn meest bekende vorm bewijst Korevaar de volgende relatie:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(t)}{t}=1.$$

Hierin is $\psi(t)$ de zogenaamde Chebyshev functie:

$$\psi(t):=\sum_{k=1}^{t}\Lambda(k)\ \text{ met }\ \Lambda(n)=\begin{cases}\log(n) & \text{als } n=p^m \text{ met } p \text{ priem, } m\geq 1\\ 0 & \text{anders}\end{cases}$$

Chebyshev bewees dat uit deze bewering $\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(t)}{t}=1$ de priemgetalstelling volgt:
Lemma 1:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(t)}{t}=1\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}=1$$

Het bewijs hiervan begint met te kijken naar

$$\psi(t)=\sum_{k=1}^{t}\Lambda(k)=\sum_{p\leq t,\ p\text{ priem}}[\frac{\log t}{\log p}]\log p\leq\pi(t)\log t.$$

Voor $1<u<t$ is verder

$$\pi(t)=\pi(u)+\sum_{u<p\leq t}1\leq\pi(u)+\sum_{u<p\leq t}\frac{\log p}{\log u}<u+\frac{\psi(t)}{\log u}.$$

Voor de eerste gelijkheid splitsen we $\pi(t)$ op in twee sommen, waarbij we gebruiken dat $\pi(t)=\sum_{p\leq t,\ p\text{ priem}}1$. De volgende ongelijkheid volgt uit het feit dat $1<\frac{\log p}{\log u}$ voor $1<u<p$. Tot slot wordt opgemerkt dat altijd geldt dat $\pi(t)<t$, immers, er zijn nooit meer priemgetallen dan getallen zijn in de verzameling die bekeken wordt, en zelfs strikt minder omdat 1 niet gezien wordt als priemgetal. Gebruik van de definitie van $\psi(t)$ leidt dan tot het bovenstaande resultaat.

Omdat de splitsing van $\pi(t)$ in $\pi(u)+\sum_{u<p\leq t}1$ bij elke u gemaakt mag worden, kan ook $u=\frac{t}{\log^2 t}$ genomen worden, voor t voldoende groot, zodat geldt $1<u<t$. We hebben dan het volgende resultaat:

$$\pi(t)<u+\frac{\psi(t)}{\log u}=\frac{t}{\log^2 t}+\frac{\psi(t)}{\log(\frac{t}{\log^2 t})}.$$

Door de rekenregels van de natuurlijke logaritme toe te passen, en beide zijden met $\frac{\log t}{t}$ te vermenigvuldigen krijg je het volgende:

$$\pi(t)\frac{\log(t)}{t} < \frac{1}{\log(t)} + \frac{\psi(t)}{t}\frac{\log(t)}{\log(t) - 2\log\log(t)}.$$

Door dit te combineren met het eerdere resultaat:

$$\psi(t) \leq \pi(t)\log(t)$$

en dus ook

$$\frac{\psi(t)}{t} \leq \pi(t)\frac{\log(t)}{t},$$

kunnen we concluderen dat als $\frac{\psi(t)}{t}$ dus naar 1 convergeert, dan convergeert $\pi(t)\frac{\log(t)}{t}$ daar ook naar toe:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\psi(t)}{t} = 1 \Rightarrow \lim_{t\to\infty}\pi(t)\frac{\log t}{t} = 1(\text{de priemgetalstelling})$$

Een extra stelling

Om de priemgetalstelling via deze equivalentie te bewijzen, bewijst Korevaar eerst de volgende stelling, een bijzonder geval van de Wiener-Ikeraha stelling:
Stelling 1: *Stel dat de Dirichlet reeks*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^z} \text{ met coëfficiënten } a_n > 0$$

convergeert in het halfvlak $\{Re\ z > 1\}$. *De somfunctie* $f(z)$ *is dan analytisch in het open halfvlak. Stel nu dat er een constante* A *is zodanig dat het verschil*

$$g(z) = f(z) - \frac{A}{1-z}$$

een continue voortzetting heeft tot het gesloten halfvlak gegeven door $\{Re\ z \geq 1\}$. *Veronderstel tenslotte dat de partiële sommen* $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *begrensd worden door een constante maal* n. *Dan geldt*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{n} = A.$$

We zullen verderop zien dat de zeta functie met $a_n = 1$ en $A = 1$ een voorbeeld levert van het gebruik van deze stelling.

Voor het bewijs van deze stelling is het beter te kijken naar een andere versie ervan. Daartoe bekijken we een reeks die aan de voorwaarden van de stelling voldoet, en definiëren we

$$s(v) = \sum_{k\leq v} a_k$$

Omdat de reeks aan de voorwaarden van de stelling voldoet, geldt dus ook $a_n \geq 0$ zodat $s(v)$ niet afnemend is. Verder weten we dat $s(v) = s_n$ (de partiële som) voor $n \leq v < n+1$ en $s(v) = 0$ voor $v < 1$.

In de eerder genoemde stelling werd nu gekeken naar de somfunctie

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n - s_{n-1}}{n^z}.$$

Door herschikken van de termen krijgen we:

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n[\frac{1}{n^z} - \frac{1}{(n+1)^z}] = \sum_{n=1}^{\infty} s_n z \int_n^{n+1} x^{-z-1}\mathrm{d}x,$$

wat gelijk is aan

$$z \int_1^{\infty} s(v) v^{-z-1}\mathrm{d}v.$$

Om aan de stelling te voldoen moet er nu een constante A zijn zodat $g(z) = f(z) - \frac{A}{z-1}$ een continue voortzetting heeft tot het gesloten halfvlak $\{Re(s) \geq 1\}$. Er geldt:

$$\begin{aligned} g(z) - A = f(z) - \frac{A}{z-1} - A = f(z) - \frac{Az}{z-1} \\ = z \int_1^{\infty} s(v) v^{-z-1}\mathrm{d}v - \frac{Az}{z-1}. \end{aligned}$$

Als we vervolgens alles onder het integraalteken willen brengen wordt dat

$$g(z) - A = z \int_1^{\infty} \frac{s(v)}{v^{z+1}} - \frac{A}{v^z}\mathrm{d}v = z \int_1^{\infty} [\frac{s(v)}{v} - A] v^{-z}\mathrm{d}v \quad \text{als } Re(z) > 1.$$

Substitueer tenslotte $v = e^t$ en schrijf $\rho(t) = e^{-t}s(e^t) - A$. Neem $\rho(t) = 0$ voor $t < 0$. Omdat s_n begrensd is door een constante maal n, is $\rho(t)$ een begrensde functie, en er geldt:

$$\rho(t) - \rho(u) \geq -\varepsilon(t,u) \text{ waar } \varepsilon(t,u) \to 0 \qquad \text{als } u \to \infty \text{ en } 0 < t - u \to 0,$$

ρ is "langzaam afnemend".
Bekijk dan de Laplace-getransformeerde van $\rho(t)$:

$$L\rho(z) = \int_0^{\infty} \rho(t) e^{-zt}\mathrm{d}t = \int_1^{\infty} [\frac{s(v)}{v} - A] v^{-z-1}\mathrm{d}v = \frac{g(z+1) - A}{z+1}.$$

Volgens de voorwaarden van stelling 1 is $L\rho(z)$ analytisch voor $Re\ z > 0$ en deze functie heeft een continue voortzetting tot het gesloten halfvlak $\{Re\ z \geq 0\}$. We moeten bewijzen dat $\lim_{n\to\infty} \frac{s_n}{n} = A$, ofwel dat $\rho(t) \to 0$ als $t \to \infty$. Stelling 1 volgt dus uit de algemenere versie:

Stelling 2: *Zij* $\rho(t) = 0$ *voor* $t < 0$ *en* $|\rho(t)| \leq M < \infty$ *voor* $t \geq 0$. *De Laplace-getransformeerde*

$$G(z) = L\rho(z) = \int_0^\infty \rho(t)e^{-zt}\mathrm{d}t, \; z = x + iy$$

definiëert dan een analytische functie voor $x > 0$. *Stel dat* $G(x + iy)$ *voor* $-R \leq y \leq R$ *uniform (of in* L^1*) convergeert naar een limietfunctie* $G(iy)$ *als* $x \searrow 0$. *Dan geldt voor elke positieve* T *en* δ,

$$|\int_T^{T+\delta} \rho(t)\mathrm{d}t| \leq \frac{4M}{R} + \frac{1}{2\pi}|\int_{-R}^{R} G(iy)\frac{e^{\delta iy} - 1}{y}(1 - \frac{y^2}{R^2})e^{iTy}\mathrm{d}y|.$$

Als in de onderstellingen R *willekeurig groot genomen mag worden en* $\rho(t)$ *bovendien "langzaam afnemend" is (dus* $\rho(t) - \rho(u) \geq -\varepsilon(t,u)$ *waar* $\varepsilon(t,u) \to 0$ *als* $u \to \infty$ *en* $0 < t - u \to 0$ *), dan geldt bovendien*

$$\rho(T) \to 0 \text{ als } T \to \infty.$$

Zie voor het bewijs van stelling 2 appendix A.

Het bewijs van de priemgetalstelling

Nu we deze beide stellingen hebben, kunnen we hieruit de priemgetalstelling afleiden. Hiertoe kijken we naar de Riemann zeta-functie:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p \text{ priem}} (1 + p^{-s} + p^{-2s} + ...) = \prod_{p \text{ priem}} (1 - p^{-s})^{-1}.$$

Door de afgeleide van $\log \frac{1}{\zeta(z)}$ te nemen, krijgen we

$$f_1(z) = -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = \sum_{p \text{ priem}} \frac{p^{-z}\log p}{1 - p^{-z}} = \sum_{p \text{ priem}, m \geq 1} \frac{\log p}{p^{mz}}.$$

Herschrijven geeft:

$$f_1(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^z} \text{ met } \Lambda(n) = \begin{cases} \log(n) & \text{als } n = p^m \text{ met } p \text{ priem, } m \geq 1 \\ 0 & \text{anders} \end{cases}$$

Merk op dat de partiële sommen van de coëfficiënten de reeds genoemde Chebyshev functie geven:

$$s_n = \psi(n) = \sum_{p^m \leq n} \log p$$

Uit de ongelijkheid die Chebyshev afschatte (zie "Begin van het bewijs") volgt direct dat

$$\psi(n) = \sum_{p \leq n} [\frac{\log n}{\log p}] \log p \leq \pi(n)\log(n) \leq Cn.$$

Door nu te gebruiken dan $\zeta(z) \neq 0$ op de lijn $\{Re(z) = 1\}$, bewezen door Riemann, zien we dat $f_1(z) = -\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)}$ analytisch is overal op deze lijn, behalve in $z = 1$. Dit volgt ook uit lemma 4 uit het hoofdstuk over de stelling van Dirichlet over arithmetische progressie, zodat we kunnen schrijven:

$$g_1(z) = f_1(z) - \frac{1}{z-1},$$

met g analytisch in alle punten van het gesloten halfvlak $\{Re(z) \geq 1\}$. Omdat de coëfficiënten $a_n = \Lambda(n)$ en de functies $f = f_1$ en $g = g_1$ voldoen aan de voorwaarden van stelling 1, met $A = 1$, kunnen we concluderen dat de partiële sommen $\psi(n)$ begrensd zijn door Cn, en dus:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi(n)}{n} = 1.$$

Chebyshev had al aangetoond dat uit deze bewering de priemgetalstelling volgt, en dus hebben we het bewijs geleverd.

Nawoord

Zowel de stelling van Dirichlet over priemen in arithmetische progressies, als de Priemgetalstelling is lange tijd slechts een vermoeden geweest, waar niemand een sluitend bewijs voor kon geven. Toen er tenslotte een bewijs gevonden werd, was dat een analytisch bewijs, terwijl het in beide gevallen ging om een getaltheoretisch probleem. Dat de reacties op zo'n bewijs wisselend waren is gemakkelijk voor te stellen. Immers, zo'n analytisch bewijs geeft geen enkel inzicht in *waarom* een stelling geldt. En is dat niet precies wat ervoor zorgt dat we verder komen in de wiskunde, dat we de stellingen die we gebruiken ook begrijpen?
Toen beide stellingen eenmaal bewezen waren, zijn enkele wiskundigen nog naarstig op zoek geweest naar een bewijs dat wel volledig elementair is. Wat betreft de priemgetalstelling is het Atle Selberg en Paul Erdős gelukt zo'n bewijs te vinden, hoewel het de vraag is of dit bewijs meer inzicht verschaft in de stelling. Het is wel elementair in de zin dat het geen resultaten uit de analyse gebruikt, maar het is nog steeds lang en ingewikkeld. Misschien is het simpelweg inherent aan de vooruitgang van de wiskunde dat de bewijzen ingewikkelder worden, en niet altijd meer via een voor de hand liggende weg gegeven kunnen worden.

Appendix A, Het bewijs van stelling 2

Stelling 2: *Zij $\rho(t) = 0$ voor $t < 0$ en $|\rho(t)| \leq M < \infty$ voor $t \geq 0$. De Laplace-getransformeerde*

$$G(z) = L\rho(z) = \int_0^\infty \rho(t)e^{-zt}\mathrm{d}t,\ z = x + iy$$

definiëert dan een analytische functie voor $x > 0$. Stel dat $G(x + iy)$ voor $-R \leq y \leq R$ uniform (of in L^1) convergeert naar een limietfunctie $G(iy)$ als $x \searrow 0$. Dan geldt voor elke positieve T en δ,

$$|\int_T^{T+\delta} \rho(t)\mathrm{d}t| \leq \frac{4M}{R} + \frac{1}{2\pi}|\int_{-R}^{R} G(iy)\frac{e^{\delta iy} - 1}{y}(1 - \frac{y^2}{R^2})e^{iTy}\mathrm{d}y|.$$

Als in de onderstellingen R willekeurig groot genomen mag worden en $\rho(t)$ bovendien "langzaam afnemend" is (dus $\rho(t) - \rho(u) \geq -\varepsilon(t,u)$ waar $\varepsilon(t,u) \to 0$ als $u \to \infty$ en $0 < t - u \to 0$), dan geldt bovendien

$$\rho(T) \to 0 \text{ als } T \to \infty.$$

Allereerst het bewijs van de ongelijkheid: Bekijk de volgende functie

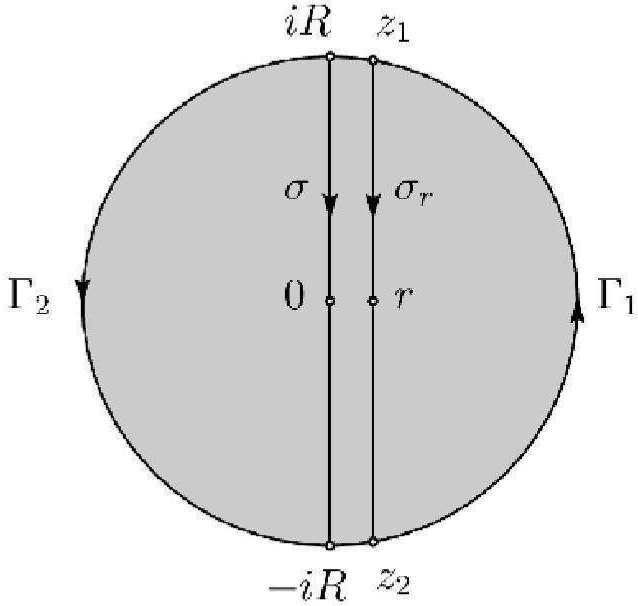
$$G_T(z) = \int_0^T \rho(t)e^{-zt}\mathrm{d}t,\ z = x + iy$$

waarna we gaan afschatten:

$$G_{T+\delta}(0) - G_T(0) = \int_T^{T+\delta} \rho(t)\mathrm{d}t.$$

De stelling van Cauchy geeft met de contour Γ de positief geörienteerde cirkel $\{|z| = R\}$ (zie figuur):

$$2\pi i G_T(0) = \int_\Gamma G_T(z)\frac{1}{z}\mathrm{d}z \text{ , mits } G_T(z) \text{ analytisch op} |z| \leq R.$$



Figuur 1: De contouren

We bekijken het verschil

$$|G_T(z) - G(z)| = |\int_T^\infty \rho(t)e^{-zt}\mathrm{d}t| \quad \text{in het rechter halfvlak } \{Re(z) \geq 0\}.$$

Omdat er geldt $\rho(t) \leq M$ voor $t > 0$ kunnen we dit afschatten door:

$$|G_T(z) - G(z)| \leq M \int_T^\infty e^{-xt}\mathrm{d}t = \frac{M}{x}e^{-Tx}.$$

En voor $x < 0$

$$|G_T(z)| \leq \int_0^T Me^{-xt}\mathrm{d}t < \frac{M}{|x|}e^{-Tx}.$$

Omdat de factoren e^{-Tx} en $e^{T|x|}$ voor grote x veel te klein respectievelijk te groot worden, is het handiger om in de Cauchyformule nog een factor e^{Tz} te verwerken. Bovendien kunnen we door de factor $\frac{1}{z}$ te vervangen door

$$\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}$$

het probleem van kleine x in de noemers van de vergelijkingen oplossen. Dan komt de Cauchyformule er als volgt uit te zien:

$$2\pi i G_T(0) = \int_\Gamma G_T(z)e^{Tz}(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2})\mathrm{d}z.$$

Omdat de functie $G(z)$ over het algemeen echter niet analytisch is in het linkerhalfvlak, is het beter om over een andere contour te integreren. We kijken bijvoorbeeld naar het gedeelte van Γ dat in het rechterhalfvlak ligt, Γ_1 met daarbij σ het segment van de imaginaire as van iR naar $-iR$. Verder nemen we voor kleine $r > 0$ dat σ_r het deel van de lijn $x = r$ is tussen de snijpunten met Γ: $z_1 = r + i\sqrt{R^2 - r^2}$en $z_2 = r - i\sqrt{R^2 - r^2}$. Het gedeelte van Γ_1 noemen we $\Gamma_{1,r}$. Dan geldt vanwege Cauchy:

$$0 = \int_{\Gamma_{1,r}+\sigma_r} G(z)e^{Tz}(\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2})\mathrm{d}z.$$

Nu is het nog slechts nodig de volgende uitdrukking af te schatten, waarbij $h(z) := \frac{1}{z} + \frac{z}{R^2}$:

$$2\pi i G_T(0) = \int_{\Gamma_{1,r}} G_T(z)e^{Tz}h(z)\mathrm{d}z + \int_{\Gamma_{1,r}} G(z)e^{Tz}h(z)\mathrm{d}z + int_\Gamma G_T(z)e^{Tz}h(z)\mathrm{d}z$$

$$-\int_{\Gamma_{1,r}} G_T(z)e^{Tz}h(z)\mathrm{d}z - \int_{\sigma_r} G(z)e^{Tz}h(z)\mathrm{d}z$$

$$= \int_{\Gamma_{1,r}} [G_T(z) - G(z)]e^{Tz}h(z)\mathrm{d}z + \int_{\Gamma-\Gamma_{1,r}} G_T(z)e^{Tz}h(z)\mathrm{d}z - \int_{\sigma_r} G(z)e^{Tz}h(z)\mathrm{d}z$$

$$=: I_1(R,r,T) + I_2(R,r,T) - I_3(R,r,T).$$

Voor $2\pi i G_{T+\delta}(0)$ hebben we een analoge formule, zodat we, wanneer we $G_{T+\delta}(0) - G_T(0)$ willen afschatten, in het bijzonder moeten kijken naar

$$I_3(R,r,T+\delta) - I_3(R,r,T) = \int_{\sigma_r} G(z)[e^{(t+\delta)z}h(z)\mathrm{d}z = \int_{\sigma_r} G(z)\frac{e^{\delta z} - 1}{z}(1 + \frac{z^2}{R^2})e^{Tz}\mathrm{d}z.$$

Als $x \searrow 0$ dan $G(x + iy) \to G(iy)$, zodat we r naar 0 mogen laten gaan. Doen we dit in de formule voor $G_{T+\delta}(0) - G_T(0)$, dan krijgen we uiteindelijk:

$$2\pi|G_{T+\delta}(0) - G_T(0)| \leq |\int_\sigma G(z)\frac{e^{\delta z} - 1}{z}(1 + \frac{z^2}{R^2})e^{Tz}\mathrm{d}z|$$

$$+|I_1(R,0,T+\delta) - I_1(R,0,T) + I_2(R,0,T+\delta) - I_2(R,0,T)|.$$

Zoals we eerder al hadden, weten we dat

$$|G_T(z) - G(z)| \leq \frac{M}{x}e^{-Tx},$$

en voor $x < 0$

$$|G_T(z)| < \frac{M}{|x|}e^{-Tx}.$$

Verder geldt op de cirkel Γ: $\frac{1}{z} + \frac{z}{R^2} = \frac{2x}{R^2}$ zodat we de volgende afschattingen kunnen maken:

$$|I_1(R,0,T)| \leq \int_{\Gamma_1} |G_T(z) - G(z)||e^{Tz}||\frac{1}{z} + zR^2||\mathrm{d}z| \leq \int_{\Gamma_1} \frac{M}{x}e^{-Tx}e^{Tx}\frac{2x}{R^2}|\mathrm{d}z| = \frac{2M\pi}{R}$$

en

$$|I_2(R,0,T)| \leq \int_{\Gamma_2} |G_T(z)e^{Tz}||\frac{1}{z} + zR^2||\mathrm{d}z| \leq \frac{2M\pi}{R}.$$

Dezelfde afschattingen gelden voor $I_j(R,0,T+\delta)$. Als we dit alles invullen in onze formule voor $G_{T+\delta}(0) - G_T(0)$, vinden we dat

$$|\int_T^{T+\delta} \rho(t)\mathrm{d}t| = G_{T+\delta}(0) - G_T(0) \leq \frac{4M}{R} + \frac{1}{2\pi}|\int_{-R}^{R} G(iy)\frac{e^{\delta iy}-1}{y}(1-\frac{y^2}{R^2})e^{iTy}\mathrm{d}y|.$$

Dit is precies wat moest worden aangetoond.

Nu moeten we nog deel 2 van de stelling bewijzen: dat als R willekeurig groot mag zijn, en $\rho(t)$ langzaam afnemend is, dan $\rho(T) \to 0$ als $T \to \infty$.
Bekijk hiertoe de laatste integraal uit de ongelijkheid in de stelling:

$$\frac{1}{2\pi}|\int_{-R}^{R} G(iy)\frac{e^{\delta iy}-1}{y}(1-\frac{y^2}{R^2})e^{iTy}\mathrm{d}y|.$$

Deze gaat naar nul als δ en R vast zijn, en T naar oneindig gaat. Immers, zowel $|G(iy)|$ als $|\frac{e^{\delta iy}}{y} - 1|$ als $|1 - (\frac{y}{R})^2|$ zijn is begrensd op $[-R, R]$, zodat de term e^{iTy} het geheel naar nul laat gaan.
We hebben dus:

$$\limsup_{T\to\infty} |\int_T^{T+\delta} \rho(t)\mathrm{d}t| \leq \frac{4M}{R}.$$

Door R groot genoeg te nemen geldt voor elk getal δ

$$\int_T^{T+\delta} \rho(t)\mathrm{d}t \to 0 \text{ als } T \to \infty.$$

Als dan ook nog $\rho(t)$ langzaam afnemend is, dus $\rho(t) - \rho(u) \geq -\varepsilon(t,u)$ waar $\varepsilon(t,u) \to 0$ als $u \to \infty$ en $0 < t - u \to 0$, dan volgt uit de ongelijkheid

$$\int_T^{T+\delta} [\rho(t) - \rho(T)]\mathrm{d}t \geq -\int_T^{T+\delta} \epsilon(t,T)\mathrm{d}t$$

dat

$$\delta\rho(T) \leq \int_T^{T+\delta} \rho(t)\mathrm{d}t + \int_T^{T+\delta} \epsilon(t,T)\mathrm{d}t.$$

Voor elke gegeven $\epsilon > 0$ en voldoende kleine $\delta > 0$ geldt wegens de eigenschappen van $\epsilon(t,u)$:

$$\limsup_{T\to\infty} \delta\rho(T) \leq \epsilon\delta$$
$$\limsup_{T\to\infty} \rho(T) \leq \epsilon$$

Ongelijkheid in de andere richting kan analoog met $\int_{T-\delta}^{T} \rho(t)\mathrm{d}t$, en tezamen bewijst het dat $\rho(T) \to 0$ als $T \to \infty$.

Bibliografie

[1] Bateman, P.T., Diamond, H.G., "A Hundred Years of Prime Numbers", *The American Mathematical Monthly* **Vol. 103** (9) November 1996, 729-741

[2] Goldstein, L.J., "A History of the Prime Number Theorem", *The American Mathematical Monthly* **Vol. 80**, (6) Juni-Juli 1973, 599-615

[3] Ingham, A.E., "The Distribution of Prime Numbers", *Cambridge: University Press*, 1932

[4] Korevaar, J., "Een eenvoudig bewijs van de priemgetalstelling", *Nieuw archief voor de wiskunde* **deel 5** (4), December 2004, 284-291

[5] Korevaar, J., "On Newman's Quick Way to the Prime Number Theorem", *Math.Intelligencer* **Vol. 4** 1982, 108-115

[6] Landau, E., "Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen", *Teubner, Leipzig* , 1909

[7] Newman, D.J., "Simple Analytic Proof of the Prime Number Theorem", *The American Mathematical Monthly,* **Vol. 87** (9), November 1980, 693-696

[8] Serre, J.P., "A Course in Arithmetic", *Springer-Verlag*, 1973

[9] Titchmarsh, E.C., "The Theory of the Riemann zeta function", *Oxford: Clarendon Press*, 1951

[10] Zagier, D., "Newman's Short Proof of the Prime Number Theorem", *The American Mathematical Monthly* **Vol. 104** (8), Oktober 1997, 705-708