

Lie-algebra's en decompositie

Auke Sijtema (s1465651)

Begeleiders: prof. dr. E.A. Bergshoeff en prof. dr. J. Top

Augustus 2007

Inhoudsopgave

1	Inleiding	2
2	Natuurkundige achtergrond	3
2.1	Supersymmetrie	3
2.2	Hogere dimensie	3
2.3	Verlagen van dimensie	4
2.4	Introductie E_{11}	4
2.5	Een verband?	4
3	Theorie van Lie-algebra's	5
3.1	Lie-algebra's	5
3.2	Representatie	8
3.3	Cartan-Weyl basisconstructie	9
3.4	Eigenschappen van wortels	13
3.5	Wortel- en gewichtsruimtes	15
3.6	Meer over representatie	19
3.7	Lie-algebra reconstructie	21
4	Classificatie van Lie-algebra's	25
4.1	Classificatie van eindige, simpele Lie-algebra's	25
4.2	Classificatie van affine Lie-algebra's	26
5	Decompositie van Lie-algebra's	31
5.1	Decompositie van eindige, simpele Lie-algebra's	31
5.2	Algemene decompositie van Lie-algebra's	33
6	Voorbeelden van decompositie van Lie-algebra's:	34
6.1	Decompositie van A_2	34
6.2	Decompositie van E_8	34
6.3	Decompositie van E_{11}	35

1 Inleiding

Lie-algebra's worden veelvuldig gebruikt om continue symmetrieën in de natuurkunde te beschrijven. Onder de snaartheoretici heerst het vermoeden dat het oneindig-dimensionale Lie-algebra E_{11} de onderliggende symmetriegroep van 11-dimensionale superzwaartekracht is.

In dit bacheloronderzoeksverslag zal worden ingegaan op de structuur van Lie-algebra's en de decompositie van een Lie-algebra in Lie-deelalgebra's. De connectie tussen E_{11} en superzwaartekracht zal worden aangestipt.

2 Natuurkundige achtergrond

2.1 Supersymmetrie

In de jaren '70 van de vorige eeuw heeft men bedacht dat bosonen (deeltjes met integer spingetal) en fermionen (deeltjes met half spingetal) beiden door één theorie beschreven zouden kunnen worden. Dit was nodig om problemen met het Standaardmodel bij hoge energieën op te lossen. Elk elementair deeltje heeft dan een bijbehorend *supersymmetrisch deeltje* waarvan de spin een half verschilt: ze vormen een multiplet van deeltjes. Deze theorie wordt de supersymmetrietheorie genoemd. De operatoren die een spin-0-deeltje in zijn bijbehorende spin- $\frac{1}{2}$ -deeltje kunnen transformeren en omgekeerd worden *spinoren* genoemd.

Alle traditionele symmetrieën in de natuurkunde worden beschreven door een product van de Poincaré groep en een groep van inwendige symmetrieën. Deze stelling staat bekend als het Coleman-Mandula theorema [1]. De Poincaré groep beschrijft de symmetrieën van de speciale relativiteitstheorie en zorgt dus voor het principe dat de natuurkundige wetten gelijk zijn in elk inertiaalstelsel.

Supersymmetrie wordt echter beschreven door een meer algemene vorm die ruimte-tijd symmetrisch is. Volgens de uitbreiding van het theorema van Coleman-Mandula door Haag-Lopuszanski-Sohnius [2] moeten de generatoren Q van een dergelijke symmetrie voldoen aan de anticommutatierelaties

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_\beta\} = (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} P_\mu$$

waarbij *generatoren* zijn gedefiniëerd als de elementen van het algebra die het algebra lineair opspannen.

Een algebra waarvan de generatoren aan deze relatie voldoen wordt een Lie-superalgebra genoemd.

2.2 Hogere dimensie

Deze algebra kan ook worden gemaakt in meer dan vier dimensies. Bij het ophogen van de dimensies komen naast het scalaire veld ϕ en het vectorveld A_μ ook achtereenvolgens een tweevormveld $B_{\mu\nu}$, drie-vormveld $C_{\mu\nu\rho}$ etcetera voor. Deze ophoging stopt na 11 dimensies omdat er vanaf 12 dimensies zoveel generatoren zijn dat er deeltjes voorkomen met spingetal groter dan 2 en er wordt aangenomen dat deze niet bestaan. De deeltjes met spin 2 zijn overigens de dragers van zwaartekracht, de *gravitronen*.

In 11 dimensies kunnen alle velden worden beschreven in termen van een de metriek $g_{\mu\nu}$ en een drie-vormveld $C_{\mu\nu\rho}$. Het drie-vormveld $C_{\mu\nu\rho}$ heeft 165 componenten.

2.3 Verlagen van dimensie

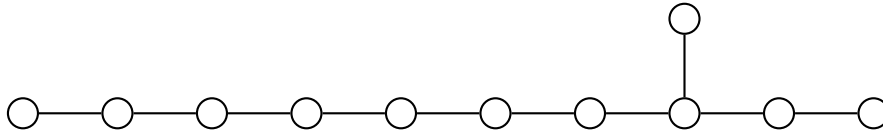
De dimensie van de 11-dimensionale supersymmetrie kan vervolgens worden verlaagd door aan te nemen dat alles in de 11-de dimensie constant is. Dan kan de metriek worden gesplitst in een 10-dimensionaal deel en een constant deel:

$$\begin{array}{l} 10 \times 10 \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} & A_\mu \\ \hline A_- & \phi \end{array} \right) \leftarrow 10 \times 1 \\ 1 \times 10 \rightarrow \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} & A_\mu \\ \hline A_- & \phi \end{array} \right) \leftarrow 1 \times 1 \end{array}$$

Omdat de metriek niet lineair is, is de Langrangiaan van ϕ , $\mathcal{L} = f(\phi)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ ook niet-lineair. De getallen $f(\phi)$ blijken zich bij achtereenvolgende dimensieverlagingen steeds te groeperen als coset-ruimtes G/H . Deze ruimtes kunnen worden gerepresenteerd door hypervlakken.

2.4 Introductie E_{11}

E_{11} kan worden voorgesteld als een graaf met 11 punten verbonden door lijnenstukken; zie figuur 2.1.



Figuur 2.1: Dynkin-diagram van E_{11}

Een dergelijk figuur noemen we een Dynkin-diagram en het geeft aanleiding tot een Lie-algebra; zie hoofdstuk 3 voor een uitleg hiervan. E_{11} is een oneindig-dimensionaal Lie-algebra, maar binnen dit Lie-algebra komen eindige deelalgebra's voor. Er zal worden uitgelegd dat E_{11} door middel van een decompositie-algoritme kan worden gesneden in plakjes, levels, waarbij elk level een eindig aantal deelalgebra's bevat.

2.5 Een verband?

Het merkwaardige is dat de eerste levels van de decompositie precies de representaties van $g_{\mu\nu}$ en $C_{\mu\nu\rho}$ opleveren. De berekening in E_{11} en de coset bij reductie van het supersymmetrie-algebra geven dezelfde structuur. Dit is merkwaardig, want E_{11} is een Lie-algebra en supergravitatie heeft een compleet andere onderliggende structuur.

Op dit moment wordt hier volop onderzoek aan verricht door de onderzoeksgroep van dhr. Bergshoeff.

3 Theorie van Lie-algebra's

3.1 Lie-algebra's

Lie-groepen zijn groepen waarvan de groepsoperaties differentiërbaar zijn. Een *Lie-algebra* is een structuur die ontstaat als wordt gekeken naar de afgeleide in de oorsprong van een afbeelding tussen verschillende Lie-groepen. We zullen Lie-algebra's echter op een andere manier introduceren. We volgen hierbij de introductie van Lie-algebra's volgens [3], hoofdstukken 4-7.

Definitie 3.1.1. Een *algebra* \mathfrak{A} is een vectorruimte met een extra binaire operatie $\diamond : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \rightarrow \mathfrak{A}$ die bilineair is.

Definitie 3.1.2. Een *Lie-algebra* \mathfrak{g} is een vectorruimte met een antisymmetrische bilineaire afbeelding

$$[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

die voldoet aan de *Jacobi-identiteit*:

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$$

voor alle $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

We noemen een Lie-algebra *eindig* als de vectorruimte eindig-dimensionaal is.

De afbeelding $[\cdot, \cdot]$ wordt ook wel het *Lie-haakje* genoemd. In het bijzonder zien we dat Lie-algebra's ook algebra's zijn en dat we met elke algebra een Lie-algebra kunnen associëren door voor het Lie-haakje de operatie $[x, y] := x \diamond y - y \diamond x$ te kiezen. Deze operatie wordt een *commutator* genoemd.

Voorbeeld 3.1.3. $M_n(\mathbb{C})$, de verzameling van alle $n \times n$ matrices over \mathbb{C} , is een vectorruimte over \mathbb{C} . Voegen we hier als operatie \diamond de matrixvermenigvuldiging aan toe, dan krijgen we de bijbehorende algebra. Nemen we voor het Lie-haakje de commutator, dan krijgen we de Lie-algebra dat $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$ of kortweg \mathfrak{gl}_n wordt genoemd. Wanneer de constructie van een Lie-algebra als afgeleide van een afbeelding tussen Lie-groepen wordt gebruikt blijkt ook de groep $GL_n(\mathbb{C})$ van $n \times n$ matrices met determinant 1 aanleiding te geven tot de algebra \mathfrak{gl}_n . $M_n(\mathbb{C})$ is isomorf met de verzameling endomorfismen van een vectorruimte V over \mathbb{C} met $\dim(V)=n$ en derhalve noteren we \mathfrak{gl}_n ook wel als $\mathfrak{gl}(V)$.

Voorbeeld 3.1.4. \mathfrak{sl}_n , de verzameling $n \times n$ matrices met spoor 0 over \mathbb{C} , is een lineaire deelruimte van $M_n(\mathbb{C})$. Omdat $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ geldt dat als $A, B \in \mathfrak{sl}_n$, dan ook $AB - BA \in \mathfrak{sl}_n$. Dus \mathfrak{sl}_n is een Lie-algebra.

Voorbeeld 3.1.5. De operatoren van het impulsmoment L_x, L_y, L_z voldoen aan

$$[L_i, L_j] = \sum_k \epsilon_{ijk} L_k.$$

$[\cdot, \cdot]$ is hier de commutator van matrices $[A, B] = AB - BA$. De operatoren van het impulsmoment zijn dus te zien als elementen in $\mathfrak{gl}(V)$.

Definitie 3.1.6. Een *morfisme* van Lie-algebra's is een afbeelding $\varphi : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ die lineair is en het Lie-haakje behoudt.

Dat het Lie-haakje blijft behouden betekent dat voor alle $x, y \in \mathfrak{g}_1$ $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$. In het bijzonder zien we dat elk morfisme van Lie-algebra's een homomorfisme is.

Definitie 3.1.7. Een deelruimte $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ van een Lie-algebra \mathfrak{g} die zelf een Lie-algebra is ten opzichte van het Lie-haakje van \mathfrak{g} wordt een *deelalgebra* genoemd. Een deelalgebra \mathfrak{h} van \mathfrak{g} heet strikt als $\mathfrak{h} \notin \{0, \mathfrak{g}\}$.

Introduceer voor twee deelruimtes $\mathfrak{h}, \mathfrak{l} \subseteq \mathfrak{g}$ de notatie

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{l}] := \text{span}_F\{[x, y] \mid x \in \mathfrak{h}, y \in \mathfrak{l}\}$$

over een lichaam F . Dan kan de eigenschap dat $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ een deelalgebra van \mathfrak{g} is worden gegeven door $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$.

Definitie 3.1.8. Een *ideaal* van een Lie-algebra \mathfrak{g} is een deelruimte $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ waarvoor $[\mathfrak{h}, \mathfrak{g}] \subseteq \mathfrak{h}$.

We zien dat een ideaal \mathfrak{h} van een Lie-algebra \mathfrak{g} zelf ook een Lie-algebra is.

Als \mathfrak{g} als *vectorruimte* een directe som is van deelruimten \mathfrak{g}_i schrijven we

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{g}_i. \quad (3.1)$$

Definitie 3.1.9. Wanneer elk van de deelruimten \mathfrak{g}_i in vergelijking 3.1 een ideaal van \mathfrak{g} is, schrijven we

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^n \mathfrak{g}_i$$

en noemen we de Lie-algebra \mathfrak{g} de *directe som* van de Lie-algebra's \mathfrak{g}_i .

Wanneer de Lie-haakjes van de \mathfrak{g}_i worden genoteerd door $[\ ,]_i$ voldoet het Lie-haakje $[\ ,]$ van de directe som aan:

$$[x, y] = [x, y]_i \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}_i, i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (3.2)$$

$$\text{en } [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] = 0 \quad \forall i \neq j, i, j \in \{1, 2, \dots, n\}. \quad (3.3)$$

Wanneer in het geval van $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$ de eis 3.3 wordt vervangen door

$$[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2] \subseteq \mathfrak{g}_1$$

heet \mathfrak{g} de *semidirecte som* van \mathfrak{g}_1 en \mathfrak{g}_2 en dit wordt genoteerd als $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \rtimes \mathfrak{g}_2$.

In het vervolg wordt met \mathfrak{g} steeds een Lie-algebra aangeduid.

Definitie 3.1.10. 1. De *lage centrale serie* van \mathfrak{g} wordt gegeven door

$$\begin{aligned} C^1 \mathfrak{g} &= \mathfrak{g} \\ C^n \mathfrak{g} &= [\mathfrak{g}, C^{n-1} \mathfrak{g}] \text{ voor } n \geq 2 \end{aligned}$$

en de *hoge centrale serie* door

$$\begin{aligned} D^1 \mathfrak{g} &= \mathfrak{g} \\ D^n \mathfrak{g} &= [D^{n-1} \mathfrak{g}, D^{n-1} \mathfrak{g}] \text{ voor } n \geq 2. \end{aligned}$$

2. We schrijven $\mathfrak{g}' \equiv D\mathfrak{g} := D^2\mathfrak{g}$ en noemen \mathfrak{g}' de *afgeleide algebra* van \mathfrak{g} .
3. \mathfrak{g} heet *nilpotent* als $\exists N \in \mathbb{Z} : C^N \mathfrak{g} = 0$ en *oplosbaar* als $\exists N \in \mathbb{Z} : D^N \mathfrak{g} = 0$.
4. Het *maximale oplosbare ideaal* van \mathfrak{g} is het oplosbare ideaal dat niet bevat is in een groter oplosbaar ideaal.
5. \mathfrak{g} heet *abels* als $\mathfrak{g}' \equiv [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = 0$.
6. \mathfrak{g} heet *simpel* als het geen strikte idealen bevat en niet abels is.
7. \mathfrak{g} heet *semisimpel* als het een directe som van simpele Lie-algebra's is.
8. \mathfrak{g} heet *reductief* als het een directe som van simpele en abelse Lie-algebra's is.
9. We definiëren $\mathcal{Z}_{\mathfrak{g}} := \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, \mathfrak{g}] = 0\}$ als het *centrum* van \mathfrak{g} .

Propositie 3.1.11. *Het maximaal oplosbare ideaal is uniek.*

Definitie 3.1.12. De *radicaal* van \mathfrak{g} , genoteerd $\text{rad}_{\mathfrak{g}}$, is het maximaal oplosbare ideaal van \mathfrak{g} .

Propositie 3.1.13. *We geven hieronder een aantal verbanden tussen de definities die we voor een Lie-algebra \mathfrak{g} hebben gemaakt.*

1. C^n en D^n zijn idealen van \mathfrak{g} .
2. \mathfrak{g} abels $\Rightarrow \mathfrak{g}$ nilpotent.
3. \mathfrak{g} nilpotent $\Rightarrow \mathfrak{g}$ oplosbaar.
4. \mathfrak{g} oplosbaar $\Leftrightarrow \mathfrak{g} = \text{rad}_{\mathfrak{g}}$.
5. \mathfrak{g} semisimpel $\Leftrightarrow \text{rad}_{\mathfrak{g}} = 0$.
6. \mathfrak{g} reductief $\Leftrightarrow \text{rad}_{\mathfrak{g}} = \mathcal{Z}_{\mathfrak{g}}$.

Een belangrijke constatering is dat alle eigenschappen van een Lie-algebra die zijn gedefinieerd met behulp van een Lie-haakje ook gelden voor alle isomorfe Lie-algebra's. Dit komt doordat een isomorfisme de structuur van het Lie-haakje behoudt (zoals een homomorfisme), evenals de structuur van de onderliggende vectorruimte. Zo blijven eigenschappen als oplosbaarheid en semisimpliciteit behouden voor Lie-algebra's die isomorf aan elkaar zijn.

Stelling 3.1.14 (Levi-Mal'čev). *Elke Lie-algebra \mathfrak{g} kan worden geschreven als $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \text{rad}_{\mathfrak{g}}$, met \mathfrak{s} semisimpel.*

Een dergelijke decompositie van een Lie-algebra wordt een *Levi-decompositie* genoemd. We zullen stelling 3.1.14 niet bewijzen. Voor een bewijs, zie [4, p.225].

Stelling 3.1.14 leert ons dat we voor het begrijpen van de structuur van Lie-algebra's alleen hoeven te kijken naar oplosbare en simpele Lie-algebra's.

Definitie 3.1.15. De *dimensie* $d = \dim \mathfrak{g}$ van een Lie-algebra \mathfrak{g} is de dimensie van \mathfrak{g} als vectorruimte. Wanneer $d < \infty$ schrijven we

$$\mathcal{B} = \{T_a \mid a = 1, 2, \dots, d\}$$

voor een basis \mathcal{B} van \mathfrak{g} en noemen de elementen T_a van \mathcal{B} de *generatoren* van \mathfrak{g} .

Vanwege lineariteit is het Lie-haakje uniek gedefiniëerd als het bekend is op een basis. Daardoor kan het Lie-haakje ook worden gedefiniëerd door de uitdrukking

$$[T_a, T_b] = \sum_{c=1}^d f_{ab}^c T_c,$$

waarbij de coëfficiënten $f_{ab}^c \in F$ bekend zijn en de *structuurconstanten* worden genoemd.

Voorbeeld 3.1.16. Als een complex Lie-algebra \mathfrak{g} eendimensionaal is met generator T , dan is geldt vanwege de antisymmetrie van het Lie-haakje dat $[T, T] = 0$. Dus elk Lie-algebra is abels en als vectorruimte isomorf met \mathbb{C} . We noemen dit Lie-algebra $\mathfrak{u}(1)$. Elk abels Lie-algebra van dimensie d is een d -voudige directe som van $\mathfrak{u}(1)$ -Lie-algebra's.

Voorbeeld 3.1.17. Wegens voorbeeld 3.1.4 is \mathfrak{sl}_n de afgeleide algebra van \mathfrak{gl}_n . Immers, $\forall A, B \in \mathfrak{gl}_n$ geldt $\text{tr}(AB - BA) = \text{tr}(AB) - \text{tr}(BA) = 0$ dus $AB - BA \in \mathfrak{sl}_n$, en alle niet-diagonale elementen van $AB - BA$ blijken vrij gekozen te kunnen worden. Daardoor is \mathfrak{sl}_n een ideaal van \mathfrak{gl}_n . Dus \mathfrak{gl}_n is niet simpel en niet abels.

Voorbeeld 3.1.18. Kies $B = \{h, e, f\}$ als geordende basis voor \mathfrak{sl}_2 met $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ en $f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. We berekenen de *commutatierelaties*:

$$\begin{aligned} [h, h] &= 0 & [e, e] &= 0 \\ [f, f] &= 0 & [e, f] &= h \\ [h, e] &= 2e & [h, f] &= -2f. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Voorbeeld 3.1.19. Het is eenvoudig in te zien dat \mathfrak{sl}_2 niet abels is. We tonen nu aan dat \mathfrak{sl}_2 simpel is.

Stel dat $I \neq 0$ een ideaal is van \mathfrak{sl}_2 . Laat $x = a_1 h + a_2 e + a_3 f \in I \setminus \{0\}$. Vanwege de eigenschappen van een ideaal weten we dat $[e, x] = -2a_1 e + a_3 h \in I$ en dus ook

$$[e, [e, x]] = -2a_3 e \in I.$$

Evenzo geldt

$$[f, [f, x]] = -2a_2 f \in I.$$

Dus als $a_2 \neq 0$ en/of $a_3 \neq 0$, dan $f \in I$ en/of $e \in I$ en als we met één van deze elementen het Lie-haakje met de basisvectoren van B nemen zoals in vergelijkingen 3.4 zien we dat I alle basisvectoren bevat.

Als $a_2 = a_3 = 0$ dan moet $a_1 \neq 0$ zijn en dus $h \in I$ vwaar uit met behulp van 3.4 volgt dat alle basisvectoren in I zitten. Dus $I = \mathfrak{sl}_2$.

Het blijkt middels dezelfde constructie dat alle \mathfrak{sl}_n , $n \in \mathbb{Z}^+$ simpel zijn.

3.2 Representatie

Definitie 3.2.1. Een *representatie* R van een Lie-algebra \mathfrak{g} is een homomorfisme tussen Lie-algebra's $R: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$.

Een representatie heet *getrouw* als R bovendien injectief is.

De vectorruimte V tezamen met de actie $x \bullet w := ((R(x))(w)) \forall x \in \mathfrak{g}, w \in V$ van \mathfrak{g} op V wordt een \mathfrak{g} -module \tilde{V} genoemd.

We schrijven $R(x)w := ((R(x))(w))$ en schrijven V voor zowel de module als de vectorruimte.

Een voorbeeld van een representatie wordt gegeven door de geadjungeerde representatie:

Definitie 3.2.2. De *geadjungeerde representatie* wordt gegeven door $R_{\text{ad}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, $x \mapsto \text{ad}_x$, waarbij $\text{ad}_x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, $y \mapsto [x, y]$ de *adjunctieafbeelding* is.

We zien dat de adjunctieafbeelding lineair is en lineair afhangt van x .

Voorbeeld 3.2.3. De geadjungeerde representatie werkend op de basiselementen geeft $\text{ad}_{T_a}(T_b) = [T_a, T_b] = f_{ab}^c T_c$, en daarom geldt voor de matrix ad_{T_a} ten opzichte van de basiselementen dat $(\text{ad}_{T_a})_{cb} = f_{ab}^c$. Daarom wordt de geadjungeerde representatie van een Lie-algebra ook wel de representatie op zijn structuurconstanten genoemd.

Stelling 3.2.4. Voor een eindige, simpele Lie-algebra is de geadjungeerde representatie getrouw.

Voorbeeld 3.2.5. De geadjungeerden van de basisvectoren h, e, f van \mathfrak{sl}_2 worden, met behulp van de relaties 3.4 en door te gebruiken dat $f_{ab}^c = -f_{ba}^c$, gegeven door

$$\text{ad}_h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \text{ad}_e = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ad}_f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

We zien dus dat de geadjungeerde representatie werkt als

$$R : x = a_1 h + a_2 e + a_3 f \mapsto a_1 \text{ad}_x + a_2 \text{ad}_e + a_3 \text{ad}_f.$$

3.3 Cartan-Weyl basisconstructie

De semisimpele Lie-algebra's vertonen veel overeenkomsten in structuur. In het bijzonder is de basis van een semisimpele Lie-algebra \mathfrak{g} altijd in een speciale vorm te brengen, de *Cartan-Weyl basis*. We zullen uitleggen hoe dit in zijn werkt gaat en nemen hierbij en in de rest van hoofdstuk 3 steeds aan dat de Lie-algebra \mathfrak{g} eindig en semisimpel is.

Definitie 3.3.1. Een element $x \in \mathfrak{g}$ heet *semisimpel* of *ad-diagonaliseerbaar* als de afbeelding ad_x diagonaliseerbaar is.

Dit houdt in dat er een basis $\mathfrak{B} = \{T_a\}$ te kiezen is zodat $[x, T_a]$ een veelvoud is van T_a voor elke T_a .

Definitie 3.3.2. Een element $x \in \mathfrak{g}$ heet *regulier* als de algebraïsche multipliciteit van 0 als eigenwaarde van ad_x minimaal is vergeleken met alle andere elementen in \mathfrak{g} .

Definitie 3.3.3. De *centralizator* $C_{\mathfrak{g}}(x)$ van een element $x \in \mathfrak{g}$ is de verzameling

$$C_{\mathfrak{g}}(x) := \{y \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0\}.$$

Definitie 3.3.4. Een *Cartan-deelalgebra* (CSA, van "Cartan subalgebra") \mathfrak{g}_0 van \mathfrak{g} is een maximale abelse deelalgebra die volledig uit semisimpele elementen bestaat.

Propositie 3.3.5. Voor semisimpele \mathfrak{g} is een maximale deelalgebra die volledig uit semisimpele elementen bestaat abels.

Voor een bewijs, zie [5, p. 35].

De volgende propositie kan worden gebruikt om een CSA te construeren:

Propositie 3.3.6. *Als $x \in \mathfrak{g}$ regulier dan is $C_{\mathfrak{g}}(x)$ een CSA.*

Voor een bewijs, zie [14, p. 34].

Gevolg 3.3.7. *Elk regulier element is semisimpel.*

Propositie 3.3.8. *Elk CSA van \mathfrak{g} heeft de vorm $C_{\mathfrak{g}}(x)$ voor een regulier element $x \in \mathfrak{g}$.*

Voor een bewijs, zie [7, p. 12].

Propositie 3.3.9. *Als $x \in \mathfrak{g}$ een diagonaalmatrix is ten opzichte van een bepaalde basis dan zijn alle getrouwe representaties van x in dezelfde basis diagonaalmatrices.*

Voor een bewijs, zie [6, p. 198].

Definitie 3.3.10. De rang r van \mathfrak{g} is de dimensie van \mathfrak{g}_0 .

De r generatoren van de CSA worden in het vervolg aangeduid met H_i , $i = 1, 2, \dots, r$. Deze elementen zijn dus lineair onafhankelijk en voldoen aan

$$[H_i, H_j] = 0 \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, r. \quad (3.6)$$

Propositie 3.3.11. *Zij \mathfrak{g} een eindige, semisimpele Lie-algebra.*

1. \mathfrak{g} heeft een niet-lege Cartan-deelalgebra.
2. Alle CSA's van een Lie-algebra zijn isomorf met elkaar.
3. Alle CSA's hebben dezelfde dimensie.
4. De rang r is de minimale dimensie van alle $C_{\mathfrak{g}}(x)$ waarbij $x \in \mathfrak{g}$ semisimpel.

We gebruiken de volgende stelling uit de lineaire algebra (zonder bewijs):

Propositie 3.3.12. *Twee vierkante matrices van dezelfde grootte zijn diagonaliseerbaar ten opzichte van dezelfde basis dan en slechts dan als ze diagonaliseerbaar zijn en commuteren.*

Met behulp van stelling 3.3.12 zien we dat er een basis $\{v_i\}$ bestaat zodat alle afbeeldingen ad_h met $h \in \mathfrak{g}_0$ diagonaliseerbaar zijn ten opzichte van deze basis omdat de ad_h commuteren, wat wegens propositie 3.3.9 volgt uit het commuteren van de elementen in \mathfrak{g}_0 . Dit houdt in dat elke $v_i \in \mathfrak{g}$ tegelijk een eigenvector is van alle ad_h , $h \in \mathfrak{g}_0$, waarbij de eigenwaarde afhangt van h en v_i . In formulevorm:

$$\text{ad}_h(v_i) := [h, v_i] = \alpha_{v_i}(h) v_i.$$

We zien dat $\alpha_{v_i}(h) : \mathfrak{g}_0 \rightarrow \mathbb{C}$ lineair afhangt van v_i en een lineaire functie is van h . Het is dus een lineaire functionaal: $\alpha_{v_i} \in \mathfrak{g}_0^*$.

Derhalve kan een decompositie van \mathfrak{g} worden gemaakt als directe som (als vectorruimte) van de eigenruimten:

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\alpha} \mathfrak{g}_{\alpha}, \quad \mathfrak{g}_{\alpha} = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h) \cdot x \quad \forall h \in \mathfrak{g}_0\}. \quad (3.7)$$

Definitie 3.3.13. Een decompositie 3.7 wordt een *Cartan-decompositie* genoemd. Het element $\alpha : \mathfrak{g}_0^*$ in 3.7 heet een *wortel* als $\alpha \neq 0$.

$\mathfrak{g}_{\alpha=0}$ in formule 3.7 is de CSA \mathfrak{g}_0 van \mathfrak{g} wegens propositie 3.3.6 en het gegeven dat \mathfrak{g}_0 een regulier element bevat (propositie 3.3.8). Dus de decompositie ten opzichte van de CSA is te schrijven als

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus \left(\bigoplus_{\alpha \neq 0} \mathfrak{g}_\alpha \right).$$

Dit betekent dat er een basis \mathcal{B} van \mathfrak{g} is die behalve een basis $\{H_i\}$ van de CSA volledig bestaat uit elementen E_α die voldoen aan

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha(H_i)E_\alpha \quad \forall i = 1, 2, \dots, r, \quad (3.8)$$

waar voor elke α de waarde $\alpha(H_i)$ ongelijk aan nul is voor tenminste één waarde van i .

Omdat een wortel α lineair is wordt deze bepaald door de vector $(\alpha_i)_{i=1, \dots, r} := (\alpha(H_i))_{i=1, \dots, r}$.

Definitie 3.3.14. De verzameling $\Phi \equiv \Phi(\mathfrak{g})$ van alle wortels van \mathfrak{g} heet het *wortelsysteem* van \mathfrak{g} .

De *rang* van Φ is de dimensie van \mathfrak{g}_0^* .

Propositie 3.3.15. 1. $\text{span}_{\mathbb{C}}(\Phi) = \mathfrak{g}_0^*$.

2. De ruimtes \mathfrak{g}_α zijn eendimensionaal.

3. $\pm\alpha$ zijn de enige veelvoudigen van $\alpha \in \Phi$ die wortels zijn.

4. Er is een basis $\{H_i\}$, $i = 1, 2, \dots, r$ van de CSA zodat $\beta(H_i)$ een reëel getal is voor alle i en alle $\beta \in \Phi$.

5. Wanneer \mathfrak{g} niet semisimpel maar simpel is, kunnen de $\beta(H_i)$ in onderdeel [4.] als gehele getallen worden gekozen.

Propositie 3.3.16. Er is een 1-1 correspondentie tussen de wortels en de generatoren.

Als gevolg van propositie 3.3.15 kan de basis \mathcal{B} van \mathfrak{g} worden geschreven als

$$\mathcal{B} = \{H_i \mid i = 1, 2, \dots, r\} \cup \{E_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}. \quad (3.9)$$

Bovendien kan de basis van de CSA zo worden gekozen dat $\Phi \subset \mathbb{R}^r$. Dit zullen we in het vervolg steeds doen.

Definitie 3.3.17. Een basis van de vorm 3.9 die voldoet aan 3.6 en 3.8 wordt een *Cartan-Weyl basis* van \mathfrak{g} genoemd.

Definitie 3.3.18. Als $\Phi \subset \mathbb{R}^r$ noemen we $\mathbb{E} := \text{span}_{\mathbb{R}}(\Phi)$ de *wortelruimte* van Φ .

Definitie 3.3.19. Gegeven een reële vectorruimte V , introduceren we voor $x \in V$ de notatie $\mathbb{C}x = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{C}\}$. Dit noemen we de *complexificatie* van een element in V . De complexificatie van V is $V^{\mathbb{C}} = \{\sum_i \lambda^i x_i \mid x \in V, \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Deze definitie introduceren we uit notatieoverwegingen. Merk op dat $\mathbb{C} = \text{span}_{\mathbb{C}}\{1\} = \mathbb{C}1$.

Voorbeeld 3.3.20. We zullen een Cartan-Weylbasis van $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ construeren. Elk element $x \in \mathfrak{g}$ is te schrijven in termen van de basisvectoren als $x = a_1h + a_2e + a_3f$ met $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$. Gegeven $y \in \mathfrak{g}$ is $\text{ad}_x(y) = [a_1h + a_2e + a_3f, y] = a_1[h, y] + a_2[e, y] + a_3[f, y] = (a_1\text{ad}_h + a_2\text{ad}_e + a_3\text{ad}_f)(y)$. Met de matrices van de geadjungeerde representatie gegeven door vergelijking 3.5 zien we dat

$$\text{ad}_x = \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ -2a_2 & 2a_1 & 0 \\ 2a_3 & 0 & -2a_1 \end{pmatrix}.$$

We berekenen de eigenwaarden en proberen een regulier element te vinden. We berekenen

$$\det(\text{ad}_x - \lambda I) = \lambda(4a_1^2 + 4a_2a_3 - \lambda^2).$$

De eigenwaarden zijn dus

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \text{ en} \\ \lambda_{2,3} &= \pm 2\sqrt{a_1^2 + a_2a_3}. \end{aligned}$$

De eigenwaarde 0 heeft minimale algebraïsche multipliciteit als de eigenwaarden verschillend zijn. Dit geldt in de gevallen

$$\begin{aligned} a_1 &\neq 0 \\ a_1 &= 0, \quad a_2 \neq 0, \quad a_3 \neq 0 \end{aligned}$$

en in elk geval moet bovendien gelden dat $a_1^2 \neq -a_2a_3$.

Dus de volgende keuzes van het element x geven aanleiding tot een CSA door gebruik te maken van propositie 3.3.6, en volgens propositie 3.3.8 worden op deze manier alle mogelijke CSA's verkregen:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_2 \\ a_3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & -a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ a_3 & -a_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & -a_1 \end{pmatrix},$$

met $0 \neq a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{C}$ en $a_1^2 \neq -a_2a_3$.

Als we bijvoorbeeld $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ kiezen bestaat het CSA uit alle elementen die hiermee commuteren. We berekenen

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ -2c & 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

De elementen die met x commuteren zijn dus precies alle 2×2 diagonaalmatrices met spoor 0.

Dus $\mathfrak{g}_0 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, en \mathfrak{g}_0 heeft h als basiselement. Het voordeel van deze keuze van \mathfrak{g}_0 is dat alle elementen volgens propositie 3.3.9 al ad-gediagonaliseerd zijn.

We passen formule 3.7 toe:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \bigoplus \mathfrak{g}_\alpha, \\ \mathfrak{g}_\alpha &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \text{ met } a, b, c \in \mathbb{C} \mid \left[\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \right] = \right. \\ &\quad \left. \begin{pmatrix} 0 & 2bd \\ -2cd & 0 \end{pmatrix} = \alpha \left(\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \forall d \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

We zien inderdaad dat $\mathfrak{g}_{\alpha=0} = \mathfrak{g}_0$. Kies $\alpha_1(dh) = 2d$ en $\alpha_2(dh) = -2d$, dan is $\mathfrak{g}_{\alpha_1} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

en $\mathfrak{g}_{\alpha_2} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. De wortels ten opzichte van de basis $\{h\}$ van \mathfrak{g}_0 zijn $\alpha_1 = 2$ en $\alpha_2 = -2 = -\alpha_1$. Het wortelsysteem is $R = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ en $\text{span}_{\mathbb{R}}(R) = \mathbb{R}$.

3.4 Eigenschappen van wortels

De Weyl-groep geeft informatie over de symmetrieën van een Lie-algebra. Voordat we deze symmetrieën kunnen bestuderen moeten we een manier vinden om afstanden tussen elementen in de Lie-algebra uit te rekenen. Bij elke Lie-algebra kan de volgende afbeelding worden gedefinieerd, die voor elke Lie-algebra een inproduct blijkt te zijn:

Definitie 3.4.1. De *Killing-vorm* is een afbeelding

$$\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}, \quad x, y \mapsto \text{tr}(\text{ad}_x \circ \text{ad}_y)$$

waarbij 'o' staat voor de compositie van afbeeldingen en 'tr' het spoor van een lineaire afbeelding.

We zien dat de Killing-vorm bilineair is vanwege de lineariteit van het spoor en de adjunctieafbeelding en symmetrisch vanwege het symmetrisch zijn van het spoor.

Propositie 3.4.2. De Killing-vorm κ is invariant, oftewel $\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z])$.

Bewijs Omdat $\text{ad}_x, x \in \mathfrak{g}$ een morfisme is en $\text{ad}_x \in \mathfrak{gl}(V)$, geldt

$$\text{ad}_{[x, y]} = [\text{ad}_x, \text{ad}_y] = \text{ad}_x \circ \text{ad}_y - \text{ad}_y \circ \text{ad}_x.$$

Hieruit en uit het lineair en symmetrisch zijn van het spoor volgt

$$\begin{aligned} \kappa([x, y], z) &= \text{tr}(\text{ad}_{[x, y]} \circ \text{ad}_z) = \text{tr}(\text{ad}_x \circ \text{ad}_y \circ \text{ad}_z - \text{ad}_y \circ \text{ad}_x \circ \text{ad}_z) = \\ &= \text{tr}(\text{ad}_x \circ \text{ad}_y \circ \text{ad}_z - \text{ad}_x \circ \text{ad}_z \circ \text{ad}_y) = \kappa(x, [y, z]). \end{aligned}$$

Stelling 3.4.3. Zij \mathfrak{g} een Lie-algebra. Dan geldt: \mathfrak{g} semisimpel \Leftrightarrow de Killing-vorm op \mathfrak{g} is niet-ontaard.

Voor een bewijs, zie [5, p.22]. Merk op dat "niet-ontaard" betekent dat $\kappa(x, y) = 0 \forall y \in \mathfrak{g}$ impliceert dat $x = 0$.

Definitie 3.4.4. Het *inproduct* van twee wortels α, β is

$$(\alpha, \beta) = \kappa(H_\alpha, H_\beta),$$

waarbij $H_\alpha = \sum_{i=1}^r \alpha(H_i)H_i$.

Propositie 3.4.5. Laat $\alpha \in \Phi(\mathfrak{g})$.

1. Als er een $\beta \in \Phi(\mathfrak{g})$ is zodat $\alpha + \beta \in \Phi(\mathfrak{g})$, dan is $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subset \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.
2. Als $x \in \mathfrak{g}_\alpha, y \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ dan is $[x, y] = (x, y)H_\alpha$.
3. Kies $E_\alpha^+ \in \mathfrak{g}_\alpha, E_\alpha^- \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ en $H_\alpha = [E_\alpha^+, E_\alpha^-]$. Dan is het opspannel van $\{E_\alpha^+, E_\alpha^-, H_\alpha\}$ isomorf met \mathfrak{sl}_2 via $E_\alpha^+ \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_\alpha^- \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, H_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Bewijs van (1): $[h, [x_\alpha, x_\beta]] = -[x_\alpha, [x_\beta, h]] - [x_\beta, [h, x_\alpha]] = [x_\alpha, [h, x_\beta]] + [[h, x_\alpha], x_\beta] = (\alpha(h) + \beta(h))[x_\alpha, x_\beta]$. Dus voor alle $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ en $x_\beta \in \mathfrak{g}_\beta$ geldt $[x_\alpha, x_\beta] \in \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$.

Op de ruimte $\text{span}_{\mathbb{R}}(\Phi)$ van de wortels van een semisimpel Lie-algebra is de Killing-vorm ook reëel, waardoor het een Euclidische metriek op de wortelruimte blijkt te geven [3, p.90].

Om het inproduct tussen twee wortels α, β te bepalen moeten de adjunctieafbeeldingen van H_α, H_β worden bepaald. Bij een Lie-algebra van dimensie n zijn deze afbeeldingen $n \times n$ matrices. Er is een manier om berekenen van het inproduct van elementen in Φ te vereenvoudigen, namelijk door van dit inproduct een standaard-inproduct te maken: indien de H_i zo te kiezen zijn dat ze orthonormaal zijn ten opzichte van de Killing-vorm vereenvoudigt het inproduct tot $(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^r \alpha(H_i)\beta(H_i) = \alpha \cdot \beta$ met α, β de wortels ten opzichte van de generatoren van het CSA.

Definitie 3.4.6. Introduceer voor een wortel $\alpha \in \Phi$ de *spiegeling* σ_α door

$$\sigma_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$$

voor alle $\beta \in \Phi$, waar $\langle \beta, \alpha \rangle := 2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}$ de *projectie* van β op het hypervlak loodrecht op α is.

Definitie 3.4.7. De *Weyl-groep* W van een wortelsysteem Φ is de groep voortgebracht door de verzameling $\{\sigma_\alpha \mid \alpha \in \Phi\}$.

Propositie 3.4.8. *Zij Φ een wortelsysteem en $\alpha, \beta \in \Phi$.*

1. $\sigma_\alpha(\beta) \in \Phi$.
2. $\sigma_\alpha(-\Phi) = \Phi$.
3. $\sigma_\alpha(\Phi) = \Phi$.
4. $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.
5. Φ is eindig $\Leftrightarrow W$ is eindig.

De eerste eigenschap geeft samen met $\sigma_\alpha(\alpha) = -\alpha$ dat wortels altijd paarsgewijs voorkomen, namelijk als $\pm\alpha$. Hieruit volgt de tweede eigenschap (omdat we $\Phi \subset \mathbb{R}^r$ gekozen hebben).

Als gevolg van de derde eigenschap is de Weyl-groep een symmetriegroep van het wortelsysteem.

De vierde eigenschap legt sterke eisen op de geometrie van de wortels. Wanneer θ de hoek is tussen twee wortels α en β , volgt uit

$$\frac{1}{2}(\alpha, \alpha)\langle \beta, \alpha \rangle = (\beta, \alpha) = \|\alpha\| \|\beta\| \cos(\theta)$$

dat voor de projectie $\langle \beta, \alpha \rangle$ geldt:

$$\langle \beta, \alpha \rangle = 2 \cos(\theta) \frac{\|\beta\|}{\|\alpha\|}$$

Dus in het bijzonder is

$$\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4 \cos^2(\theta) \in \{0, 1, 2, 3, 4\}. \quad (3.11)$$

De waarde 4 wordt aangenomen als $\cos(\theta) = \pm 1$, dus als $\beta = \pm\alpha$. Afgezien van dit geval zijn als gevolg van vergelijking 3.11 slechts de mogelijkheden van tabel 3.1 mogelijk. In de tabel hebben we de wortels zo geordend dat $\|\beta\| \geq \|\alpha\|$.

Propositie 3.4.9. *Zij $\alpha, \beta \in \Phi$ wortels die niet een veelvoud van elkaar zijn. Als $(\alpha, \beta) > 0$ dan is $\alpha - \beta \in \Phi$, en als $(\alpha, \beta) < 0$ dan is $\alpha + \beta \in \Phi$.*

$\cos(\theta)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
θ	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\langle \beta, \alpha \rangle$	3	2	1	0	-1	-2	-3
$\langle \alpha, \beta \rangle$	1	1	1	0	-1	-1	-1
$\frac{\ \beta\ }{\ \alpha\ }$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	$-$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$

Tabel 3.1: De hoeken tussen twee wortels

Definitie 3.4.10. Voor $\alpha, \beta \in \Phi$ die niet een veelvoud van elkaar zijn is de α -wortelstring door β de verzameling $\{\beta + m\alpha \mid m \in \mathbb{Z} \text{ en } \beta + m\alpha \in \Phi\}$.

Propositie 3.4.11. Laat voor $\alpha, \beta \in \Phi$ $r, q \in \mathbb{Z}^+$ de grootste integers zijn waarvoor $\beta - r\alpha \in \Phi$ en $\beta + q\alpha \in \Phi$. Dan zijn alle $\beta + m\alpha$, $m \in \{-r, -r+1, \dots, q-1, q\}$ wortels. Bovendien is $r - q = \langle \beta, \alpha \rangle$.

We zien dus dat een wortelstring ten hoogste 4 elementen bevat.

Voorbeeld 3.4.12. In voorbeeld 3.3.20 hebben we gezien dat de wortels van \mathfrak{sl}_2 $\alpha_1 = 2$ en $\alpha_2 = -2$ zijn. Dus $\sigma_{\alpha_1}(\alpha_1) = \alpha_1 - 2\frac{(\alpha_1, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)}\alpha_1 = -\alpha_1 = \alpha_2$ en $\sigma_{\alpha_1}(\alpha_2) = \alpha_2 - 2\frac{(\alpha_2, \alpha_1)}{(\alpha_1, \alpha_1)}\alpha_1 = \alpha_2 + 2\alpha_1 = \alpha_1$, en gelijksoortige relaties voor σ_{α_2} . Ten opzichte van de wortels worden de spiegelingen gegeven door $\sigma_{\alpha_1} = \sigma_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en $\sigma_{\alpha_i}^2 = I_2$. Dus de Weyl-groep van \mathfrak{sl}_2 is isomorf met \mathbb{Z}_2 .

3.5 Wortel- en gewichtsruidtes

Eindig-dimensionale Lie-algebra's hebben een eindig aantal wortels, en daardoor kan er altijd een hypervlak door de oorsprong in de wortelruimte \mathbb{E} van een semisimpele Lie-algebra worden gemaakt dat geen wortels bevat. Wegens de symmetrieën van de wortels kan dit hypervlak zo worden gekozen dat het \mathbb{E} in twee deelruimtes V_{\pm} met evenveel wortels deelt.

Definitie 3.5.1. Men noemt $\alpha \in \Phi$ een *positieve wortel* en schrijft $\alpha > 0$ als $\alpha \in V_+$ en een *negatieve wortel* en schrijft $\alpha < 0$ als $\alpha \in V_-$.

Zo kan men Φ schrijven als $\Phi = \Phi_+ \cup \Phi_-$ met $\Phi_+ := \{\alpha \in \Phi \mid \alpha > 0\}$ en $\Phi_- := \Phi \setminus \Phi_+$. Omdat het enige veelvoud van een $\alpha \in \Phi$ dat een wortel is precies $-\alpha$ is, kan worden geschreven

$$\{E_{\alpha} \mid \alpha \in \Phi\} = \{E_{\alpha} \mid \alpha > 0\} \cup \{E_{\alpha} \mid \alpha < 0\}. \quad (3.12)$$

Als we 3.12 vergelijken met 3.7 zien we dat we als volgt een decompositie van \mathfrak{g} kunnen maken:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_-. \quad (3.13)$$

met

$$\mathfrak{g}_{\pm} := \text{span}_{\mathbb{C}}\{E_{\pm\alpha} \mid \alpha > 0\}.$$

We noemen een decompositie van \mathfrak{g} zoals in 3.13 een *driehoeks-* of *Gauss-decompositie* van \mathfrak{g} .

Definitie 3.5.2. Een *simpele wortel* van \mathfrak{g} is een positieve wortel die niet als een lineaire combinatie van andere positieve wortels met positieve coëfficiënten verkregen kan worden. Schrijf $\Phi_s = \{\alpha_{(i)}\}$ voor de verzameling simpele wortels.

Wanneer duidelijk is dat een wortel een simpele wortel is schrijven we ook wel α_i in plaats van $\alpha_{(i)}$.

Propositie 3.5.3. 1. In de zin van de Killing-vorm zijn de simpele wortels de wortels die het dichtst bij het hypervlak zitten dat gebruikt is om de positieve en negatieve wortels te scheiden.

2. Er zijn $r = \text{rang } \mathfrak{g}$ simpele wortels.

3. $\text{span}_{\mathbb{R}}(\Phi_s) = \text{span}_{\mathbb{R}}(\Phi)$.

4. $\forall \alpha_i, \alpha_j \in \Phi_s$ geldt $\alpha_i - \alpha_j \notin \Phi$.

5. Elke positieve wortel is een lineaire combinatie van simpele wortels met niet-negatieve gehele coëfficiënten.

6. De Weyl-groep wordt gegenereerd door de spiegelingen van de simpele wortels.

Wegens propositie 3.5.3, onderdeel 3 vormen de simpele wortels een basis voor de ruimte van wortels. Deze basis is in het algemeen niet orthonormaal. Deze informatie wordt als volgt weergegeven:

Definitie 3.5.4. Een Cartan-matrix van een Lie-algebra \mathfrak{g} is de $r \times r$ matrix A met waarden

$$A_{ij} := 2 \frac{(a_{(i)}, a_{(j)})}{(a_{(j)}, a_{(j)})}.$$

Definitie 3.5.5. We noemen $\alpha^\vee := \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}$ van $\alpha \in \Phi$ een cowortel.

Hiermee zijn de waarden van de Cartan-matrix $A_{ij} := (\alpha_{(i)}, \alpha_{(j)}^\vee)$. Ook kan worden geschreven $A_{ij} := \langle \alpha_{(i)}, \alpha_{(j)} \rangle$.

Propositie 3.5.6. De Cartan-matrix is onafhankelijk van de keuze van de basis van simpele wortels, afgezien van de nummering van de rijen en kolommen.

Propositie 3.5.7. Eigenschappen van de Cartan-matrix A van een eindige, semisimpele Lie-algebra:

1. $A_{ii} = 2 \forall i = 1, 2, \dots, r$.

2. $A_{ij} = 0 \Leftrightarrow A_{ji} = 0$.

3. $A_{ij} \in \mathbb{Z}_{\leq 0} \forall i \neq j$.

4. $\det(A) > 0$.

Definitie 3.5.8. Een wortel θ die voldoet aan $(\theta, \theta) \geq (\alpha, \alpha) \forall \alpha \in \Phi$ wordt een *hoogste wortel* genoemd.

Voor simpele Lie-algebra's blijkt de hoogste wortel uniek te zijn [3, p.94]. Vaak wordt het inproduct op de wortels met een factor vermenigvuldigd ten opzichte van het standaard inproduct zodat de hoogste wortel θ voldoet aan $(\theta, \theta) = 2$.

Voorbeeld 3.5.9. Het inproduct tussen twee wortels kan met behulp van de Cartan-matrix worden gedefiniëerd wanneer alle simpele wortels even lang zijn. Schrijf twee wortels als $\alpha = \sum_{i=1}^r m^i \alpha_i \equiv m^i \alpha_i$ (Einstein-sommatieconventie) en $\beta = n^j \alpha_j$. Vermenigvuldig alle wortels met een factor zodat voor elke simpele wortel α_i geldt dat $(\alpha_i, \alpha_i) = 2$. Dan is $(\alpha, \beta) = m^i m^j (\alpha_i, \alpha_j) = m^i m^j A_{ij} = \vec{m}^T A \vec{n}$, met

$$\vec{m} = \begin{pmatrix} m^1 \\ \vdots \\ m^r \end{pmatrix} \text{ en } \vec{n} = \begin{pmatrix} n^1 \\ \vdots \\ n^r \end{pmatrix}.$$

We zien dat de Cartan-matrix een inproduct definiëert op de wortelruimte. Voor een inproduct moet gelden $(\alpha, \alpha) \geq 0$ en $(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$. We zien dat dit alleen geldt als A positief-definiet is. Dus de Cartan-matrix A van een eindig, simpel Lie-algebra met simpele wortels van gelijke lengte voldoet aan $\det(A) > 0$.

Het blijkt dat de Cartan-matrix van elk simpele Lie-algebra de eigenschap $\det(A) > 0$ heeft (zie hoofdstuk 4).

Definitie 3.5.10. We noemen de ruimte dual aan \mathbb{E} de *gewichtsruimte* \mathbb{W} en de elementen van \mathbb{W} *gewichten*. Een basis van \mathbb{W} wordt gegeven door $\mathfrak{B}^* := \{\Lambda^{(i)} \mid i = 1, 2, \dots, r\}$ met $\Lambda^{(i)}$, genaamd de *fundamentele gewichten*, zodat $\Lambda^{(i)}(\alpha_{(j)}^\vee) = \delta_i^j \forall i, j = 1, 2, \dots, r$. Deze basis wordt de *Dynkinbasis* genoemd. De componenten van een gewicht in de Dynkinbasis worden *Dynkinlabels* genoemd.

Een vectorruimte met een niet-ontaard inproduct kan worden geïdentificeerd met zijn duale ruimte met behulp van dit inproduct. Met elk element $\alpha \in \mathbb{E}$ identificeren we een element $\alpha^* \in \mathbb{W}$ door middel van de relatie $\alpha^*(\beta) = (\alpha, \beta) \forall \beta \in \mathbb{E}$.

Propositie 3.5.11. *De componenten van de simpele wortels in de Dynkinbasis zijn gelijk aan de rijen van de Cartan-matrix.*

Schrijf een simpele wortel α_i in de Dynkinbasis als $\alpha_i = p_j \Lambda^j$. Dan geldt dus $p_j = A_{ij}$. Wanneer een wortel $\alpha = m^i \alpha_i$ volgt dus $\alpha = p_j \Lambda^j$ met $p_j = A_{ij} m^i$.

De Cartan-matrix is ook op een grafische manier te weergeven:

Definitie 3.5.12. Gegeven een Cartan-matrix A kunnen we een bijbehorend *Dynkindiagram* maken door r punten te tekenen en elk paar punten i, j , $i \neq j$ te verbinden met

- A_{ij} lijnstukken als $A_{ij} = A_{ji}$,
- $A_{ij} A_{ji}$ lijnstukken als $A_{ij} \neq A_{ji}$,

en indien $A_{ij} > A_{ji}$ een pijl door de lijnstukjes van i naar j te tekenen.

Voorbeeld 3.5.13. Het punt $0 \in \mathbb{R}$ deelt de ruimte \mathbb{R} in twee deelruimtes. Kies $\alpha_1 = 2$ als positieve wortel en $\alpha_2 = \alpha_1 = -2$ als negatieve wortel van \mathfrak{sl}_2 . Dan is $A = A_{11} = \langle a_1, a_1 \rangle = 2$ de Cartan-matrix. Het Dynkindiagram bestaat uit 1 punt. Dit diagram wordt A_1 genoemd. In het algemeen gebruikt men de aanduiding A_n voor het Dynkindiagram van \mathfrak{sl}_n .

Voorbeeld 3.5.14. Om het CSA van \mathfrak{sl}_n te vinden moeten we eerst een regulier element van \mathfrak{sl}_n vinden. Omdat dit veel rekenwerk vereist kiezen we een andere methode: we kiezen \mathfrak{h} als maximale abelse verzameling van diagonaalelementen en voeren de decompositie 3.7 uit. Wanneer blijkt dat $\mathfrak{g}_0 \neq \mathfrak{h}$ (doordat 0 voorkomt als eigenwaarde van een $\text{ad}_{\mathfrak{h}}(y)$ met $y \notin \mathfrak{h}$)

weten we dat we dat \mathfrak{h} niet het complete CSA is en kunnen we het CSA maken door deze elementen toe te voegen (zie [6, p. 198]).

Kies

$$\mathfrak{h} = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{array} \right) \mid \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0 \right\}.$$

Schrijf E_{ij} voor de $n \times n$ matrix waarvoor de i, j -de component gelijk is aan 1. \mathfrak{g} is te schrijven als $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \oplus (\oplus_{i \neq j} \mathfrak{g}_{E_{ij}})$ waarbij $\mathfrak{g}_{E_{ij}} = \mathbb{C}E_{ij}$. Kies een $h \in \mathfrak{h}$, dan is $[h, E_{ij}] = (\lambda_i - \lambda_j)E_{ij} =$

$(\epsilon_i - \epsilon_j)(h)E_{ij}$, waarbij $\epsilon_i \left(\begin{array}{ccc} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{array} \right) = \lambda_i$. Dus het wortelsysteem is $\{\epsilon_i - \epsilon_j \mid i \neq j\}$.

Omdat nul voor geen enkele $h \in \mathfrak{h}$ voorkomt als eigenwaarde van ad_h is $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$.

Voorbeeld 3.5.15. We zullen het wortelsysteem van \mathfrak{sl}_3 construeren. We kunnen een geordende basis van \mathfrak{sl}_3 geven als $B = \{E_{11} - E_{22}, E_{22} - E_{33}, E_{12}, E_{21}, E_{23}, E_{32}, E_{13}, E_{31}\}$. We schrijven deze geordende basis met voorkennis als $B = \{H_1, H_2, E_1^+, E_1^-, E_2^+, E_2^-, E_s^+, E_s^-\}$.

Wegens voorbeeld 3.5.14 kunnen we het CSA gelijk nemen aan de verzameling 3×3 diagonaalmatrices met spoor nul. Deze ruimte wordt opgespannen door de elementen H_1, H_2 : $\mathfrak{g}_0 = \mathbb{C}H_1 \oplus \mathbb{C}H_2$. Noteer $\vec{H} = (H_1, H_2)$, dan berekenen we:

$$\begin{aligned} [\vec{H}, E_1^+] &= (2, -1)E_1^+ = \alpha_1 E_1^+ & [\vec{H}, E_1^-] &= (-2, 1)E_1^- = \alpha'_1 E_1^- & [E_1^+, E_1^-] &= H_1 \\ [\vec{H}, E_2^+] &= (-1, 2)E_2^+ = \alpha_2 E_2^+ & [\vec{H}, E_2^-] &= (1, -2)E_2^- = \alpha'_2 E_2^- & [E_2^+, E_2^-] &= H_2 \\ [\vec{H}, E_s^+] &= (1, 1)E_s^+ = \alpha_s E_s^+ & [\vec{H}, E_s^-] &= (-1, -1)E_s^- = \alpha'_s E_s^- & [E_s^+, E_s^-] &= H_1 + H_2 \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dan is $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha'_1} \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_s} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha'_s}$, waarbij $\mathfrak{g}_{\alpha_1} = \left\{ x \in \mathfrak{g} \mid \begin{array}{l} [H_1, x] = (\alpha_1)_1 x \\ [H_2, x] = (\alpha_1)_2 x \end{array} \right\} = \mathbb{C}E_1^+$

en gelijksoortige uitdrukkingen voor de andere wortels. Orden de wortels als $\Phi_+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_s\}$ en $\Phi_- = \{\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_s\}$. Merk op dat $\alpha_s = \alpha_1 + \alpha_2$, dus α_1 en α_2 zijn simpele wortels.

Om de wortelruimte, die isomorf is met \mathbb{R}^2 , te bekijken moeten we een orthonormale basis $\{H_X, H_Y\}$ van het CSA kiezen ten opzichte van de Killing-vorm. De wortels zijn dan vectoren met lengte $\frac{1}{3}$ in \mathbb{R}^2 (wegens $\kappa(A, A) = 6\text{tr}(A^2)$, zie [14, p. 16]). We maken de wortels eenheidsvectoren door de generatoren H_X, H_Y met een factor 3 te vermenigvuldigen.

Een dergelijke basis kan met een rekenprogramma als Mathematica (versie 5.0) verkregen worden: $H_X = \frac{1}{2}H_1$ en $H_Y = \frac{1}{2\sqrt{3}}H_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}H_2$. Schrijf nu $\vec{H}^\circ = (H_X, H_Y)$. De commutatierelaties 3.14 veranderen in

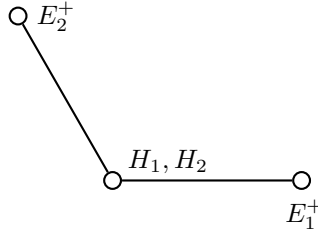
$$\begin{aligned} [\vec{H}^\circ, E_1^\pm] &= \pm(1, 0)E_1^\pm & [\vec{H}^\circ, E_2^\pm] &= \pm\frac{1}{2}(-1, \sqrt{3})E_2^\pm & [\vec{H}^\circ, E_s^\pm] &= \pm\frac{1}{2}(1, \sqrt{3})E_s^\pm \\ [E_1^+, E_1^-] &= 2H_X & [E_2^+, E_2^-] &= -H_X + \sqrt{3}H_Y & [E_s^+, E_s^-] &= H_X + \sqrt{3}H_Y \end{aligned} \quad (3.15)$$

We kunnen als simpele wortels $\alpha_1 = (1, 0)$ en $\alpha_2 = \frac{1}{2}(-1, \sqrt{3})$ kiezen. De simpele wortels zijn weergegeven in figuur 3.1. Wegens propositie 3.3.16 kunnen we in plaats van de wortelvector ook de bijbehorende generator noteren. Merk op dat nul als 'eigenwaarde' voor $\text{ad}_h(x)$, $h \in \mathfrak{g}_0$ voorkomt als x een element van het CSA is. Daarom schrijven we de elementen van het CSA bij de oorsprong.

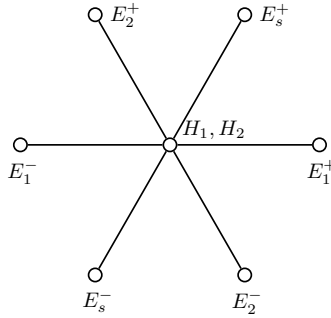
Wanneer we alle wortels tekenen en de bijbehorende generatoren opschrijven krijgen we de afbeelding in figuur 3.2:

Door het bepalen van inproducten tussen de simpele wortels volgt de Cartan-matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

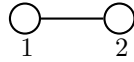


Figuur 3.1: Simpele wortels van \mathfrak{sl}_3



Figuur 3.2: De wortels van \mathfrak{sl}_3

en het Dynkindiagram A_2 :



Figuur 3.3: A_2

De spiegelingen van de simpele wortels worden gegeven door:

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha_1}(\alpha_1) &= -\alpha_1 & \sigma_{\alpha_2}(\alpha_1) &= -\alpha_s \\ \sigma_{\alpha_1}(\alpha_2) &= -\alpha_s & \sigma_{\alpha_2}(\alpha_2) &= -\alpha_2 \end{aligned} \quad (3.16)$$

Of, ten opzichte van de basis van positieve wortels:

$$\sigma_{\alpha_1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_{\alpha_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.17)$$

Na enig rekenwerk blijkt de Weyl-groep te zijn

$$W = \{I_3, \sigma_{\alpha_1}, \sigma_{\alpha_2}, \sigma_{\alpha_1} \circ \sigma_{\alpha_2}, \sigma_{\alpha_2} \circ \sigma_{\alpha_1}, \sigma_{\alpha_1} \circ \sigma_{\alpha_2} \circ \sigma_{\alpha_1}\}.$$

Uit een vermenigvuldigingstabel van W blijkt dat deze groep isomorf is met S_3 , de permutatiegroep van 3 elementen.

3.6 Meer over representatie

Definitie 3.6.1. Zij \mathfrak{g} een Lie-algebra, V een module over de vectorruimte V met representatie R . Een module U is een *deelmodule* van V als voor elk element $u \in U$ geldt $R(x)(u) \in U \forall x \in \mathfrak{g}$

Definitie 3.6.2. Een module V van een Lie-algebra \mathfrak{g} heet *irreducibel* als het niet de nulmodule 0 is en de enige deelmodules 0 en V zijn.

Definitie 3.6.3. Zij V een module met representatie R . Een *gewichtsvector* v is een gezamenlijke eigenvector van $R(h)$ voor $h \in \mathfrak{g}_0$: $R(H_i)x = v_i x$ voor alle $x \in V, H_i \in \mathfrak{g}_0$. Het element $v(h) \in \mathfrak{g}_0^*$ wordt een *gewicht* genoemd.

Merk op dat dit een generalizatie is van het begrip wortel. De ruimte waarin de gewichten zich bevinden is dual aan de wortelruimte. In het bijzonder zien we dat wortels de gewichten van de geadjungeerde representatie zijn.

Analoog aan de decompositie ten opzichte van de wortels in de vorige paragraaf staat een eindig, semisimpel Lie-algebra een decompositie van een module toe als

$$V = \bigoplus_{\lambda} V_{\lambda}, V_{\lambda} = \{x \in V \mid R(h)x = \lambda(h)x \forall h \in \mathfrak{g}_0\} \cup \{0\}.$$

De dimensie van V_{λ} heet de *multipliciteit* van λ . We zullen soms 0 in $R(h)x = 0x$ ook een gewicht noemen.

Propositie 3.6.4. Zij v een gewicht van R met gewicht λ , α een wortel en X_{α} de bijbehorende generator. Als $R(X_{\alpha})v \neq 0$, dan is $R(X_{\alpha})v$ een gewichtsvector van R met gewicht $\lambda + \alpha$.

Bewijs $R(h)R(X_{\alpha})v = R(X_{\alpha})R(h)v + [R(h), R(X_{\alpha})]v = R(X_{\alpha})R(h)v + R([h, X_{\alpha}])v = R(X_{\alpha})\lambda(h)v + R(\alpha(h)X_{\alpha})v = (\lambda(h) + \alpha(h))R(X_{\alpha})v$.

Als gevolg hiervan stuurt X_{α} elementen in V_{λ} naar elementen in $V_{\lambda+\alpha}$.

Definitie 3.6.5. Een gewicht λ van R heet *hoogste gewicht* als $\lambda + \alpha$ niet een gewicht is voor een positieve wortel α .

Dus λ is een hoogste gewicht als $R(h)v = \lambda v$ en $R(h)R(X_{\alpha})v = 0$ voor alle generatoren $X_{\alpha} \in \mathfrak{g}$ horend bij een positieve wortel α .

Definitie 3.6.6. Als Λ een hoogste gewicht is noemen we een element v_{Λ} waarvoor

$$R(h)v_{\Lambda} = \Lambda v_{\Lambda}$$

een *hoogste gewichtselement*.

Stelling 3.6.7. Als R een irreducibele representatie is, dan bestaat er precies één hoogste gewicht Λ . Dit gewicht heeft multipliciteit 1 en alle andere gewichten zijn van de vorm $\Lambda - \sum m^i \alpha_i$ met $m^i \geq 0$.

Voor een bewijs, zie [14, p. 97]. Als gevolg hiervan is het hoogste gewicht te schrijven als $\Lambda = \sum m^i \alpha_i$ met $m^i \geq 0$.

Propositie 3.6.8. De Dynkinlabels van een hoogste gewicht zijn niet-negatieve integers.

Stelling 3.6.9. Elke irreducibele representatie van een eindig, semisimpel Lie-algebra \mathfrak{g} wordt tot op isomorfie volledig bepaald door zijn hoogste gewicht.

Voor een bewijs, zie [14, p. 97].

Definitie 3.6.10. Een irreducibele module met hoogste gewicht Λ heet een *hoogste-gewichtsmodule* V_{Λ} en de bijbehorende representatie een *hoogste-gewichtsrepresentatie* R_{Λ} .

Voorbeeld 3.6.11. We zullen een representatie van $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$ maken. Allereerst hebben we de triviale representatie: $R_0 : \mathfrak{g} \rightarrow 0$, $x \in \mathfrak{g} \mapsto 0$. Deze heeft (hoogste) gewichtsvector 0 en de multipliciteit van dit gewicht is 1. De module is 1-dimensionaal en zo'n module wordt een *singlet* genoemd.

Een representatie kan verschillende modules hebben. De standaardrepresentatie: $R_{\text{Id}} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$, $x \in \mathfrak{g} \mapsto \text{Id} \cdot x$ heeft bijvoorbeeld minstens twee modules:

Kiezen we $V = \mathbb{R}^2$, dan heeft $R_{\text{Id}}(h) = h$ eigenvectoren $+1$ en -1 , overeenkomend met de ruimten $V_1 = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $V_{-1} = \mathbb{C} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Deze module heeft dimensie 2. Een module van dimensie 2 wordt een *doublet* genoemd. Het hoogste gewicht is 1.

Kiezen we $V \subseteq \mathfrak{sl}_2$, dan hebben we wederom de gewichten ± 1 , met $V_1 = \mathbb{C}e$ en $V_{-1} = \mathbb{C}f$. Dit resulteert in het doublet $V = \{\mathbb{C}e, \mathbb{C}f\}$. We zien dat dit doublet isomorf is met het vorige doublet.

De geadjungeerde representatie wordt gegeven door de 3×3 matrices $\text{ad}_h, \text{ad}_e, \text{ad}_f$ gegeven door vergelijkingen 3.5. De bijbehorende module heeft dimensie 3 (dit heet een *triplet*) en de gewichten zijn de wortels ± 2 . Het hoogste gewicht is dus 2.

We kunnen ook nog een bijzonder soort representatie maken. Beschouw hiertoe $\mathfrak{h} = \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}e$. Dit is een deelalgebra van \mathfrak{sl}_2 . \mathfrak{h} is oplosbaar omdat $D^2\mathfrak{h} = [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \mathbb{C}e$ en $D^3\mathfrak{h} = [D^2\mathfrak{h}, D^2\mathfrak{h}] = 0$. Definiër een representatie

$$R : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}.$$

h is ook een element van het CSA van \mathfrak{h} en de gewichten zijn ± 1 . De module is weer een doublet maar de representatie is niet getrouw. Hetzelfde geldt voor de representatie

$$R : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{n}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{g} \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{n}.$$

3.7 Lie-algebra reconstructie

We hebben gezien hoe we bij een eindige, simpele Lie-algebra de onderliggende structuur kunnen vinden: de wortelruimte, met de subruimte van simpele wortels Φ_s grafisch weergeven in een Dynkindiagram. In hoofdstuk 4 zullen we zien dat de diagrammen van eindige, simpele Lie-algebra's kunnen worden geclassificeerd.

Nu is het de vraag of een willekeurig Dynkindiagram in de classificatie altijd weer de oorspronkelijke Lie-algebra oplevert. Dit blijkt het geval te zijn. Het bewijs hiervan gaat in twee stappen: eerst laat men zien dat er een 1 – 1 correspondentie is tussen Dynkindiagrammen in de classificatie en zogenaamde *irreducibele wortelsystemen*, en daarna laat men zien dat een willekeurig wortelsysteem een bijbehorend Lie-algebra heeft dat tot op isomorfie is bepaald.

Voor de tweede stap moeten we eerst weten wanneer een ruimte een wortelsysteem is. Het blijkt in het bewijs van stelling 3.7.4 dat wortelsystemen die op de volgende manier zijn gedefinieerd aanleiding geven tot hetzelfde Lie-algebra (op isomorfie na):

Definitie 3.7.1. Een (*irreducibel*) *wortelsysteem* Φ is een deelruimte van een Euclidische ruimte \mathbb{E} die voldoet aan:

- (R1) Φ is eindig, spant \mathbb{E} op en $0 \notin \Phi$.
- (R2) $\pm\alpha$ zijn de enige veelvouden van $\alpha \in \Phi$ die wortels zijn.
- (R3) $\sigma_\alpha(\Phi) = \Phi \forall \alpha \in \Phi$.

(R4) $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z} \forall \alpha, \beta \in \Phi$.

(Rirr) Er bestaat geen ontbinding $R = R_1 \cup R_2$ met $R_1 \neq \emptyset \neq R_2$ en $\langle r_1, r_2 \rangle = 0 \forall r_1 \in R_1, r_2 \in R_2$.

Propositie 3.7.2. *Voor elk Dynkindiagram in de classificatie van simpele, eindige Lie-algebra's bestaat een tot op isomorfie uniek bepaald irreducibel wortelsysteem met bijbehorend gegeven Dynkindiagram.*

Voor een bewijs, zie [5, p.65].

De generatoren $\{E_{\pm}^i, H_i \mid i = 1, 2, \dots, r\}$ van een eindige, semisimpele Lie-algebra \mathfrak{g} voldoen aan de Chevalley-Serre relaties:

Definitie 3.7.3. De *Chevalley-Serre relaties* zijn de volgende relaties $\forall i, j$:

1. $[H_i, H_j] = 0$
2. $[H_i, E_j^{\pm}] = \pm A_{ji} E_j^{\pm}$ en $[E_i^+, E_j^-] = \delta_{ij} H_i$.
3. $(\text{ad}_{E_i^{\pm}})^{1-A_{ji}} E_j^{\pm} = 0$ als $i \neq j$.

Hierbij is $E_i^{\pm} := E_{\pm\alpha(i)}$ en $(\text{ad}_x)^n := \underbrace{\text{ad}_x \circ \text{ad}_x \circ \dots \circ \text{ad}_x}_{n \text{ keer}}$.

Stelling 3.7.4 (Serre). *1. Zij Φ een wortelsysteem en $\mathfrak{g}(\Phi)$ een complexe Lie-algebra voortgebracht door elementen E_i^-, E_i^+, H_i die voldoen aan de Chevalley-Serre-relaties met de waarden A_{ij} bepaald door Φ . Dan is \mathfrak{g} eindig-dimensionaal en semisimpel met wortelsysteem Φ .*

2. Elk semisimpele Lie-algebra wordt voortgebracht door E_i^-, E_i^+, H_i die voldoen aan de Chevalley-Serre-relaties.

Het Dynkindiagram legt een wortelsysteem dus op een unieke manier vast. En bij zo'n wortelsysteem hoort een uniek Lie-algebra. Om deze reden gebruiken we de naam van een Dynkin-diagram en het bijbehorende Lie-algebra vaak door elkaar. Wegens punt 2 van stelling 3.7.4 zien we dat de simpele, eindige Lie-algebra's te classificeren zijn door de Dynkindiagrammen van irreducibele wortelsystemen te classificeren.

Definitie 3.7.5. Een Dynkin-diagram heet samenhangend als een willekeurig punt van het diagram via lijnstukken verbonden is met elk ander punt van het diagram.

Propositie 3.7.6. *Het Dynkin-diagram van een irreducibel wortelsysteem is samenhangend.*

Gegeven een Dynkindiagram uit de classificatie met r punten, gaat de reconstructie van het bijbehorende wortelsysteem als volgt in zijn werk:

Stap 1. Reconstructie van de Cartan-matrix.

We schrijven een $r \times r$ matrix A op met $A_{ii} = 2$. Wanneer tussen de punten i en j n lijnstukken voorkomen, schrijven we $A_{ij} = -n$, en alle andere componenten stellen we gelijk aan nul. Nu is A de Cartanmatrix.

Stap 2. Reconstructie van de simpele wortels.

Er zijn r simpele wortels in een \mathbb{R}^r . Nummer deze $\alpha_i, i \in \{1, 2, \dots, r\}$ in overeenstemming met de nummering van de punten van het Dynkindiagram. De wortels bevinden zich in \mathbb{R}^r en de hoek tussen de wortels α_i en α_j wordt gegeven door

$$\begin{array}{ll} \frac{\pi}{2} & \text{bij 0 lijnstukken} \\ \frac{2\pi}{3} & \text{bij 1 lijnstuk} \\ \frac{3\pi}{4} & \text{bij 2 lijnstukken} \\ \frac{5\pi}{6} & \text{bij 3 lijnstukken.} \end{array}$$

Met deze informatie kunnen de simpele wortels tot op isomorfie worden gereconstrueerd.

Stap 3. Reconstructie van het wortelsysteem.

Alle positieve wortels zijn de schrijven als $\beta = \sum_{i=1}^r m^i \alpha_i$. Noem $l = \sum_{i=1}^r m^i$ het *niveau* van de wortel. Het volgende algoritme kan worden gebruikt om de wortels tot op een bepaald niveau te reconstrueren.

De wortels van niveau 1 zijn precies de simpele wortels. Voor twee simpele wortels $\alpha_i, \alpha_j \in \Phi$ geeft propositie 3.4.9 dat $\alpha_i + \alpha_j \in \Phi$ als $(\alpha_i, \alpha_j) < 0$, dus wanneer de overeenkomende punten van het Dynkin-diagram zijn verbonden met een lijnstuk.

Stel dat we alle positieve wortels tot op niveau m weten, en laat $\beta = \sum_{i=1}^r m^i \alpha_i$ een positieve wortel van niveau m zijn. We bepalen voor elke $\alpha = \alpha_j$ of $\beta + \alpha$ ook een wortel is. Hiertoe kijken we naar de α -wortelstring door β :

$$\beta - p\alpha, \dots, \beta, \dots, \beta + q\alpha.$$

We weten p omdat we alle positieve wortels tot op niveau m weten, namelijk, $p \leq m_j$ en $\beta - p\alpha$ is een positieve wortel. Met behulp van $q = p - \langle \beta, \alpha \rangle$ (propositie 3.4.11) zien we dat $\beta + \alpha$ een wortel is precies als

$$p > \langle \beta, \alpha \rangle = 2 \frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} = \sum_{i=1}^r m^i \langle \alpha_i, \alpha \rangle.$$

Dat we zo alle positieve wortels krijgen volgt het gegeven dat elke positieve wortel van niveau $m+1$ op tenminste een manier kan worden geschreven als een som van een positieve wortel van niveau m en een simpele wortel: Als $\gamma = \sum_{i=1}^r r^i \alpha_i$ niveau $m+1$ heeft, dan volgt uit

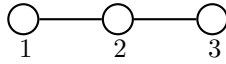
$$0 < (\gamma, \gamma) = \sum_{i=1}^r r^i (\gamma, \alpha_i)$$

dat er een i is waarvoor $(\gamma, \alpha_i) > 0$, omdat $r^i > 0$. Wegens propositie 3.4.9 is $\gamma - \alpha_i$ dan een positieve wortel.

Het is ook mogelijk het oorspronkelijke Lie-algebra te reconstrueren. Er zal niet op deze methode worden ingegaan, maar kort gezegd vorm men een algebra L en maakt men de Lie-algebra \mathfrak{g} door de antisymmetrie van het Lie-haakje, de Jacobi-identiteit en als laatst de Chevalley-Serre relaties weg te delen. Dit heet het vormen van een Lie-algebra als een *vrij Lie-algebra modulo relaties*.

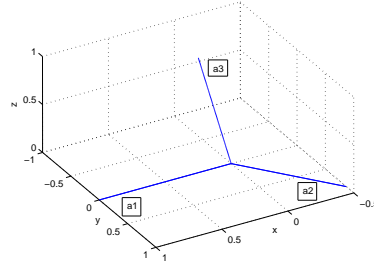
Voorbeeld 3.7.7. Het Dynkindiagram A_3 ziet er als volgt uit:

Aan de hand van dit diagram kunnen we het wortelsysteem van \mathfrak{sl}_4 reconstrueren. We zien dat er 3 simpele wortels in een 3-dimensionale ruimte zijn. Nummer deze wortels $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ in



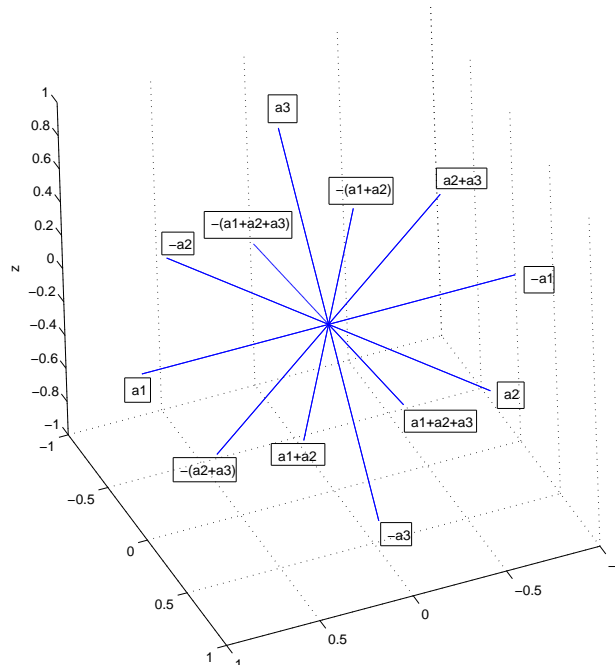
Figuur 3.4: A_3

overeenstemming met de punten van het diagram. Uit het diagram lezen we af dat de hoek tussen α_1 en α_2 en tussen α_2 en α_3 60 graden bedraagt terwijl α_1 en α_3 loodrecht op elkaar staan. We kunnen, analogoos aan voorbeeld 3.5.15 voor \mathfrak{sl}_2 , kiezen $\alpha_1 = (1, 0, 0)^T$ en $\alpha_2 = \frac{1}{2}(-1, \sqrt{3}, 0)^T$, waarbij 'T' staat voor de getransponeerde. Een berekening levert dat $\alpha_3 = \frac{1}{2}(1, \sqrt{3}, \sqrt{8/3})^T$. De simpele wortels zijn hieronder weergegeven.



Figuur 3.5: De simpele wortels van A_3

Met behulp van het zojuist beschreven algoritme bepalen we nu alle wortels. $(\alpha_1, \alpha_2) = -\frac{1}{2} < 0$ dus $\alpha_1 + \alpha_2$ is een wortel en evenzo is $\alpha_2 + \alpha_3$ een wortel. Maar $(\alpha_1, \alpha_3) = \frac{1}{2} \geq 0$ dus $\alpha_1 + \alpha_3$ is niet een wortel. De combinaties van deze wortels leveren geen nieuwe wortels op, dus we hebben nu alle positieve wortels. Door deze te spiegelen in de oorsprong krijgen we alle negatieve w



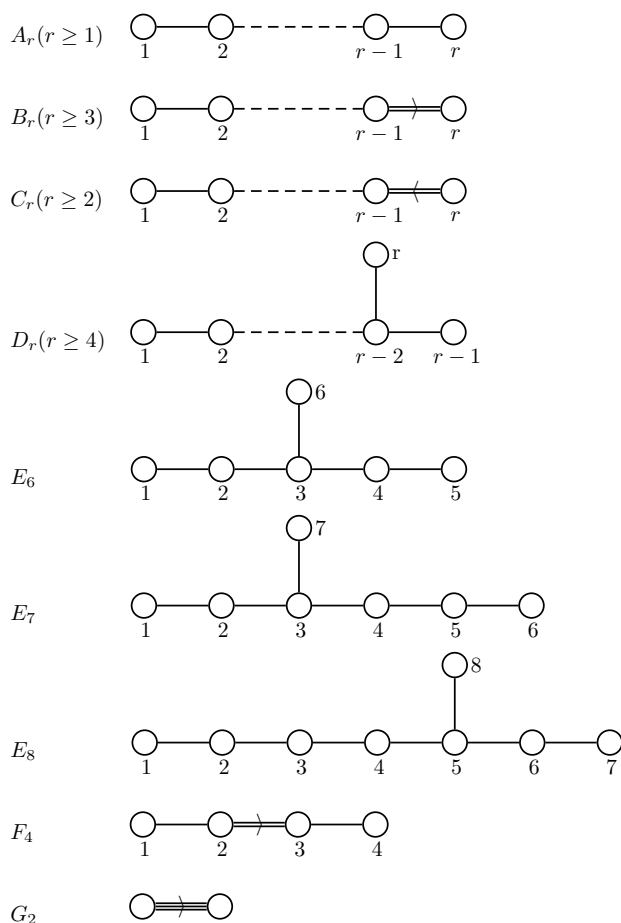
Figuur 3.6: Het wortelsysteem van A_3

4 Classificatie van Lie-algebra's

In dit hoofdstuk zal het resultaat worden getoond dat de eindige, simpele Lie-algebra's tot op isomorfie te classificeren zijn. Dit heet de *Cartan-classificatie*. Wegens de connectie tussen eindige, simpele Lie-algebra's, irreducibele wortelsystemen en samenhangende Dynkin-diagrammen komt een classificatie van deze Lie-algebra's neer op het classificeren van de bijbehorende Dynkin-diagrammen.

4.1 Classificatie van eindige, simpele Lie-algebra's

Stelling 4.1.1. *De Dynkin-diagrammen van irreducibele wortelsystemen zijn precies de diagrammen in tabel 4.1.*



Tabel 4.1: Classificatie van eindige, simpele Lie-algebra's

Het bewijs gebruikt vier proposities, die hieronder zonder bewijs zullen worden gegeven. In deze proposities wordt gebruik gemaakt van de volgende definities:

Definitie 4.1.2. Een diagram met r punten, paarsgewijs verbonden met 0,1,2 of 3 lijnstukken heet *toegestaan* als er r onafhankelijke eenheidsvectoren e_1, \dots, e_r in een r -dimensionale Euclidische ruimte zijn waarbij de hoek tussen e_i, e_j gelijk is aan $\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}$ of $\frac{5\pi}{6}$, overeenkomend met respectievelijk 0,1,2,3 lijnstukken tussen de bijbehorende punten van het Dynkindiagram.

Definitie 4.1.3. Een deeldiagram van een Dynkindiagram Σ is een diagram dat uit Σ is verkregen door punten, en de lijnstukken die daarmee verbonden zijn, weg te laten.

Propositie 4.1.4. *Proposities in het bewijs van stelling 4.1.1:*

1. *Elk deeldiagram van een toegestaan diagram is toegestaan.*
2. *Er zijn ten hoogste $r - 1$ paren punten die zijn verbonden met lijnstukken. Het diagram heeft geen lusjes.*
3. *Geen enkel punt heeft meer dan drie lijnstukken.*
4. *In een toegestaan diagram kan elke keten van punten die aan elkaar verbonden zijn door één lijnstuk, maar de uiteinden niet verbonden zijn met een van deze punten, worden samengevoegd tot één punt en het resulterende diagram is toegestaan.*

Hoe uit deze propositie het bewijs van stelling 4.1.1 gegeven kan worden is te lezen in [6, p. 327 e.v.].

Volgens [3, p. 111] is deze classificatie ook te vinden door de Cartan-matrices te classificeren. De Cartan-matrices van eindige, semisimpele Lie-algebra's zijn precies die vierkante matrices die voldoen aan de eigenschappen 3.5.7. Het eisen dat een eindig Lie-algebra niet een directe som is van simpele Lie-algebra's is equivalent met het eisen dat de Cartan-matrix A niet in de blok-diagonaalvorm

$$A = \begin{pmatrix} A_{(1)} & 0 \\ 0 & A_{(2)} \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

is te brengen. Wanneer dit niet kan noemen we de Cartan-matrix A *irreducibel*. Met deze extra eis kunnen we precies de geclassificeerde matrices van simpele, eindige Lie-algebra's vinden.

4.2 Classificatie van affine Lie-algebra's

Wanneer de vierde eis in 3.5.7, namelijk dat $\det(A) > 0$, wordt weggelaten, krijgen we de algemene klasse van *Kac-Moody algebra's* [3, p. 122]. Gegeven de *gegeneralizeerde* Cartan-matrix A van zo'n Lie-algebra maakt men deze Lie-algebra's met behulp van de Chevalley-Serre relaties. Deze Lie-algebra's zijn allemaal oneindig-dimensionaal, met uitzondering van de Lie-algebra's waarvan het Dynkin-diagram in tabel 4.1 voorkomt, of die hier een directe som van zijn. Als gevolg van het weglaten van $\det(A) > 0$ kan het inproduct tussen wortels niet meer worden berekend met de Cartan-matrix zoals in voorbeeld 3.5.9. Het blijkt dat er niet meer een wortelruimte is in \mathbb{R}^r . Volgens [17, p. xi] zijn er in deze grote klasse echter nog steeds objecten te definiëren als een Cartan-deelalgebra, het wortelsysteem en de Weyl-groep. Er zal niet worden ingegaan op hoe dit in zijn werk gaat.

Een deelklasse van de Kac-Moody algebra's is de klasse van *symmetrizeerbare Kac-Moody algebra's*. Een Kac-Moody algebra heet *symmetrizeerbaar* als er een inverteerbare diagonaal-matrix D is zodat DA , met A de gegeneralizeerde Cartan-matrix, symmetrisch is. De eindige, simpele Lie-algebra's horen tot deze klasse: immers, kies $D_{ij}^{-1} = \frac{\delta_{ij}}{(\alpha_i, \alpha_j)}$ en $S_{ij} = 2(\alpha_i, \alpha_j)$ dan is $(D^{-1}S)_{ij} = A_{ij}$ dus $DA = S$ is symmetrisch.

Men kan laten zien dat er voor elke symmetrizeerbare Kac-Moody algebra een bilineaire, symmetrische, invariante vorm bestaat. Deze kan echter ontaard zijn. Ook blijkt te gelden dat de symmetrizeerbare Kac-Moody algebra's simpel zijn dan en slechts dan als de Cartan-matrix irreducibel is en determinant ongelijk aan nul heeft [3, p. 123].

Een deelklasse van de symmetrizeerbare Kac-Moody algebra's is de klasse van *affine Lie-algebra's*. Dit zijn de Lie-algebra's die worden verkregen wanneer de vierde eis in 3.5.7 wordt vervangen door $\det(A) \leq 0$ en $\det(A_{\{i\}}) > 0 \forall i = 0, 1, \dots, r$, waarbij $A_{\{i\}}$ verkregen wordt uit de Cartan-matrix A door de i -de rij en i -de kolom te verwijderen. Uit de lineaire algebra volgt dat deze eis overeenkomt met het eisen dat er een inverteerbare diagonaal-matrix D bestaat zodat DA positief semidefinit is, maar niet positief definit.

De affine Lie-algebra's blijken ook te kunnen worden geclassificeerd aan de hand van hun Dynkin-diagrammen. We noteren de volgende stelling uit [17, p. 41]:

Stelling 4.2.1. *Laat A een irreducibele gegeneralizeerde Cartan-matrix zijn. Als het bijbehorende Lie-algebra eindig of affine is, is elk deeldiagram een vereniging van (samenhangende) Dynkin-diagrammen behorende bij eindige Lie-algebra's.*

Om alle affine Lie-algebra's te classificeren moeten we dus een punt aan alle Dynkin-diagrammen A van de Cartan-classificatie toevoegen (en lijnstukken waar nodig) en kijken of elk deeldiagram van dit uitgebreide diagram, genoteerd A^+ , van eindig type is. Wanneer dit het geval is, komt het Dynkin-diagram met het toegevoegde punt overeen met een affine Lie-algebra. Het blijkt dat we zo alle affine Lie-algebra's vinden ([17, p. 42]), en zo komen we op de classificatie van affine Lie-algebra's in de volgende tabellen. Merk op dat de nummering is weggelaten omdat er niet een conventie is voor de nummering van de affine Lie-algebra's.

Door deze manier van uitbreiding van een Dynkindiagram herhaaldelijk toe te passen op E_8 , komt men op het Dynkin-diagram van E_{11} , zoals het volgende voorbeeld laat zien. E_{11} is in deze zin een logische uitbreiding van E_8 .

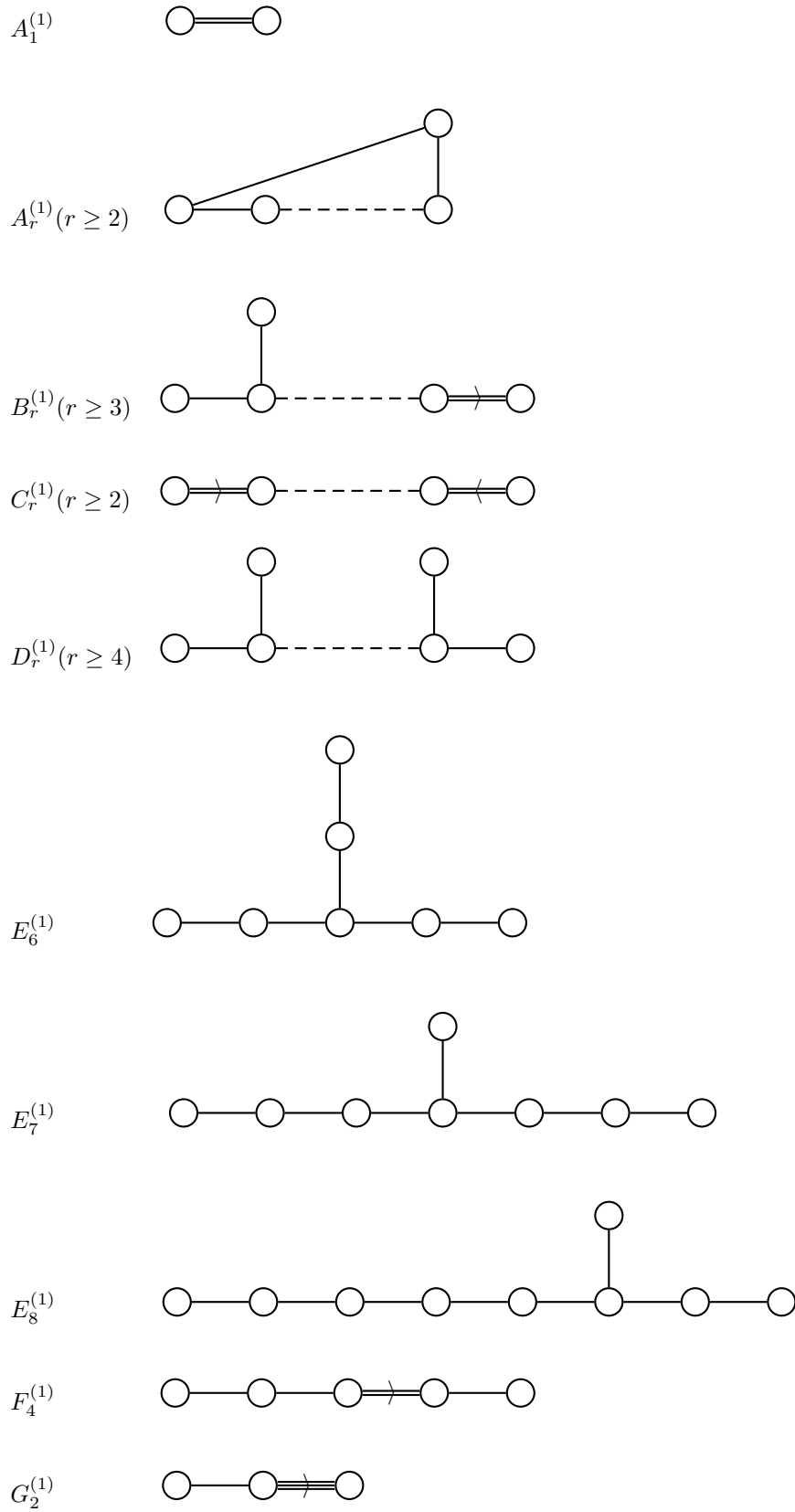
Voorbeeld 4.2.2. We gaan E_8 uitbreiden tot E_{11} door punten toe te voegen aan het Dynkin-diagram van E_{11} . We voegen aan een Dynkin-diagram A een punt toe en noteren deze uitbreiding A^+ , en doen dit zo dat elk deeldiagram gelijk is aan A of het Dynkin-diagrammen is van een eindig Lie-algebra. Hierbij nemen we aan dat we alleen punten aan de 'uiteinden' van een Dynkin-diagram mogen toevoegen. Zie figuur 4.4.

We kunnen in figuur 4.4 niet bij punt B een punt toevoegen, want het deeldiagram dat men krijgt door punt A te verwijderen valt dan niet in de classificatie van eindige Lie-algebra's. Om dezelfde reden is geen punt bij punt C toe te voegen.

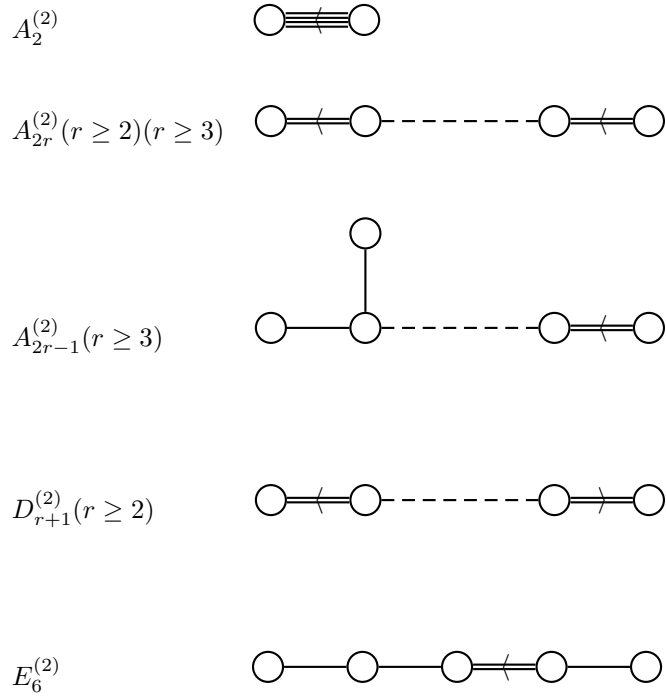
Wanneer we echter een punt bij punt A toevoegen krijgen we A_8 bij verwijdering van punt C en D_8 door verwijdering van punt B . Dus volgens ons criterium is dit het diagram E_8^+ . Zie figuur 4.5.

We zien dat we in figuur 4.5 alleen bij punt A een punt kunnen toevoegen. We kunnen daarna namelijk punt B verwijderen om D_9 te krijgen en punt C verwijderen om A_9 te krijgen. Dus toevoeging van een punt bij punt A geeft E_8^{++} . Zie figuur 4.6.

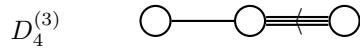
Evenzo kunnen we aan het Dynkin-diagram van E_8^{++} alleen bij A een punt worden toevoegen: verwijdering van punt B geeft dan D_{10} en verwijdering van punt C geeft A_{10} . Het Dynkin-diagram van E_8^{+++} , E_{11} genoemd, is dus gegeven door figuur 2.1 in hoofdstuk 2.



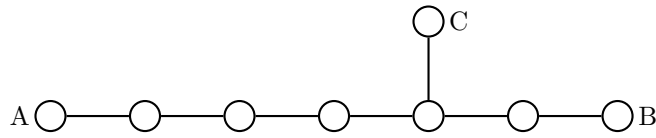
Figuur 4.1: Classificatie van affine Lie-algebra's (1)



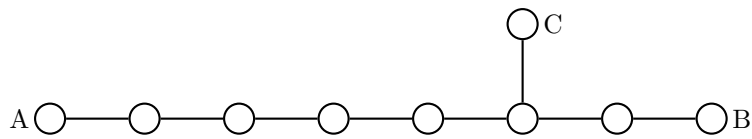
Figuur 4.2: Classificatie van affine Lie-algebra's (2)



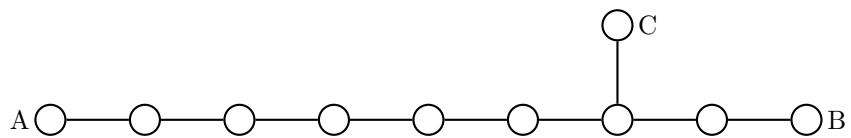
Figuur 4.3: Classificatie van affine Lie-algebra's (3)



Figuur 4.4: Dynkin-diagram van E_8



Figuur 4.5: Dynkin-diagram van E_8^+



Figuur 4.6: Dynkin-diagram van E_8^{++}

5 Decompositie van Lie-algebra's

5.1 Decompositie van eindige, simpele Lie-algebra's

Elke wortel α is te schrijven als een som $\alpha = m^i \alpha_i$ met α_i simpele wortels en integers m^i . Door een zekere m^i vast te kiezen en de andere coëfficiënten te variëren wordt slechts een deel van de wortels bereikt. Het vaste getal m^i heet het *level* l waarop het wortelsysteem wordt bekeken. Door eventueel te hernummeren kunnen we de eerste wortel vast nemen. Dan kunnen we schrijven $\alpha = l\alpha_1 + \sum_{i \neq 1} m^i \alpha_i$.

In het algemeen kunnen we voor een Lie-algebra met r simpele wortels de eerste n wortels vastnemen en voor het level schrijven $l = (l^1, \dots, l^n)$. We gebruiken de volgende conventie:

$$\begin{aligned} i &= \{0, \dots, r\} && \text{alle wortels} \\ a &= \{1, \dots, n\} && \text{vaste wortels} \\ s &= \{n+1, \dots, r\} && \text{vrije wortels.} \end{aligned}$$

Dan zijn de wortels te schrijven als $\alpha = m^i \alpha_i = l^a \alpha_a + m^s \alpha_s$.

Propositie 5.1.1. *Schrijf $\mathfrak{g}_{\{l\}}$ voor de verzameling generatoren met een wortel van level l . Dan geldt $[\mathfrak{g}_{\{l_1\}}, \mathfrak{g}_{\{l_2\}}] \subseteq \mathfrak{g}_{\{l_1+l_2\}}$.*

Bewijs Er is een 1-1 correspondentie tussen de wortels en de bijbehorende generatoren (propositie 3.3.16). Als $\alpha = l_1^a \alpha_a + m_1^s \alpha_s$ en $\beta = l_2^a \alpha_a + m_2^s \alpha_s$, dan is $\alpha + \beta = (l_1 + l_2)^a \alpha_a + (m_1 + m_2)^s \alpha_s$, dus $\alpha + \beta$ heeft level $(l_1 + l_2)$. Uit propositie 3.4.5 volgt nu het bewijs.

Merk op dat $\mathfrak{g} = \bigoplus_l \mathfrak{g}_{\{l\}}$.

Propositie 5.1.2. *$\mathfrak{g}_{\{0\}}$ is een deelalgebra van \mathfrak{g} .*

Bewijs Uit $\mathfrak{g}_{\{0\}} \subseteq \mathfrak{g}$ en $[\mathfrak{g}_{\{0\}}, \mathfrak{g}_{\{0\}}] \subseteq \mathfrak{g}_{\{0\}}$ volgt zowel dat $\mathfrak{g}_{\{0\}}$ een Lie-algebra is als dat het een deelalgebra van \mathfrak{g} is.

In het bijzonder is

$$[\mathfrak{g}_{\{0\}}, \mathfrak{g}_{\{l\}}] \subseteq \mathfrak{g}_{\{l\}}. \quad (5.1)$$

Dus de geadjungeerde representatie van $\mathfrak{g}_{\{0\}}$ stuurt generatoren in $\mathfrak{g}_{\{l\}}$ naar $\mathfrak{g}_{\{l\}}$. **We zien dus dat $\mathfrak{g}_{\{l\}}$ een module is van de 'geadjungeerde' representatie van het deelalgebra $\mathfrak{g}_{\{0\}}$ van \mathfrak{g} .** We schrijven 'geadjungeerde' van $\mathfrak{g}_{\{0\}}$ omdat de verzamelingen $\mathfrak{g}_{\{l\}}$ generatoren van het n -dimensionale Lie-algebra \mathfrak{g} bevatten. Dus de vectorruimte $\mathfrak{g}_{\{l\}}$ ten opzichte van een basis van \mathfrak{g} is n -dimensionaal en de geadjungeerde ad_x , $x \in \mathfrak{g}_{\{0\}}$ is de geadjungeerde ten opzichte van alle generatoren van \mathfrak{g} . Hierdoor komt niet alleen de gebruikelijk module van de geadjungeerde representatie van $\mathfrak{g}_{\{0\}}$ voor maar ook modules van kleinere dimensies.

Propositie 5.1.3. *$\mathfrak{g}_{\{0\}}$ is isomorf met het Lie-algebra verkregen door de punten van het Dynkin-diagram van \mathfrak{g} overeenkomend met de simpele wortels van level nul te verwijderen.*

Bewijs Door eventueel te hernummeren is een wortel α van $\mathfrak{g}_{\{0\}}$ te schrijven als $\alpha = \sum_{s=n+1}^r m^s \alpha_s$. Zij A de Cartan-matrix van \mathfrak{g} , dan geldt $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = A_{ij}$ met $i, j \in \{n+1, \dots, r\}$. Dus de Cartan-matrix van $\mathfrak{g}_{\{0\}}$ is $(A_{ij})_{i,j \in \{n+1, \dots, r\}}$. Het Dynkindiagram hiervan is het Dynkin-diagram van \mathfrak{g} met de eerste n punten verwijderd.

Het volgende voorbeeld zal de theorie illustreren.

Voorbeeld 5.1.4. We kunnen elke wortel α van het Lie-algebra van A_2 schrijven als

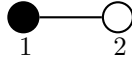
$$\alpha = l\alpha_1 + m\alpha_2.$$

In voorbeeld 3.5.15 hebben we al gezien welke combinaties van simpele wortels voorkomen. We kunnen deze combinaties nu ordenen naar het level. Hierbij schrijven we de oplossing $(0, 0)$ tweemaal op voor de twee generatoren van het CSA. We noteren ook de generatoren die bij de wortels horen.

l	m	generator
0	0	H'_1
0	1	E_2^+
0	0	H'_2
0	-1	E_2^-
-1	0	E_1^-
-1	-1	E_s^-
1	1	E_s^+
1	0	E_1^+

Tabel 5.1: Wortels van A_2

Het Dynkindiagram van $\mathfrak{g}_{\{0\}}$ is A_1 :



Dus $\mathfrak{g}_{\{0\}}$ is isomorf met het Lie-algebra \mathfrak{sl}_2 . We noteren dit algebra nu als $\mathfrak{sl}_2(\alpha_2)$. Deze bevat de generatoren E_2^+, E_2^- en $[E_2^+, E_2^-] = H_2$. We zien deze generatoren in de tabel terug: ze vormen de geadjungeerde representatie van $\mathfrak{sl}_2(\alpha_2)$.

Het is na te rekenen dat de vier generatoren van level nul op elkaar worden afgebeeld. Om deze generatoren op level 0 te scheiden in een singlet en een triplet moeten we een rotatie van het CSA uitvoeren: $H'_1 = aH_1 + bH_2, H'_2 = cH_1 + dH_2$ zodat H'_1 een singlet vormt onder de actie van $\mathfrak{g}_{\{0\}}$ en zodat $\{H'_2, E_2^+, E_2^-\}$ nog een geadjungeerde representatie van $\mathfrak{sl}_2(\alpha_2)$ is. Elke $x \in \mathfrak{g}_{\{0\}}$, te schrijven als $x = a_1H_2 + a_2E_2^+ + a_3E_2^-$, geeft aanleiding tot element in de 'geadjungeerde representatie' $y = \text{ad}_{H_2} + \text{ad}_{E_2^+} + \text{ad}_{E_2^-}$. Dan moet gelden

$$yH'_1 = a_2[E_2^+, H'_1] + a_3[E_2^-, H'_1] = -a_2(-a + 2b)E_2^+ - a_2(a - 2b)E_2^- = 0$$

opdat $\mathbb{C}H'_1$ een module vormt. Hieruit volgt $a = 2b$. Omdat $[E_2^+, E_2^-]$ isomorf moet zijn met de derde generator van $\mathfrak{sl}_2(\alpha_2)$ moet bovendien gelden $c = 0$. Kies bijvoorbeeld $H'_1 = H_1 + 2H_2$. We gaan verder in de tabel. $[H'_2, E_1^-] = dE_1^-$ en $[H'_2, E_s^-] = -dE_s^-$, en verder geldt

$$\begin{aligned} [E_2^+, E_1^-] &= 0 & [E_2^-, E_1^-] &= E_s^- \\ [E_2^+, E_s^-] &= E_1^- & [E_2^-, E_s^-] &= 0. \end{aligned}$$

Dus als we kiezen $d = 1$ vormt $V = V_{-1} \oplus V_1$, $V_{-1} = \mathbb{C}E_s^-$ en $V_1 = \mathbb{C}E_1^-$ een doublet ten opzichte van de geadjungeerde representatie van $\mathfrak{sl}_2(\alpha_2)$ met gewichten -1 en 1, en hoogste gewicht 1. Evenzo vormt $\mathbb{C}E_1^+ \oplus \mathbb{C}E_s^+$ een doublet wegens

$$\begin{aligned} [H'_2, E_1^+] &= -E_1^+ & [H'_2, E_s^+] &= E_s^+ \\ [E_2^+, E_1^+] &= 0 & [E_2^-, E_1^+] &= E_s^+ \\ [E_2^+, E_s^+] &= E_1^+ & [E_2^-, E_s^+] &= 0, \end{aligned}$$

met gewichten -1,1 en hoogste gewicht 1.

We zien dat de modules die we vinden modules zijn van andere representaties dan de geadjungeerde.

5.2 Algemene decompositie van Lie-algebra's

We willen het bepalen van de decompositie van een eindige Lie-algebra in representaties van zijn level-0 deelalgebra automatiseren. Daartoe leiden we een algoritme af. Deze staat tevens beschreven in [15].

De modules van $\mathfrak{g}_{\{0\}}$ worden beschreven door de Dynkinlabels van de hoogste gewichtsvector. Deze zijn gegeven door

$$p_s = A_{si}m^i = A_{st}m^t + A_{sa}l^a. \quad (5.2)$$

Voor een hoogste-gewichtsmodule moeten de p_s niet-negatieve integers zijn.

Een eindige Lie-algebra heeft de eigenschap dat er een of meerdere wortels zijn met de grootste lengte van alle wortels. Laat α zo'n wortel zijn. We kunnen het wortelsysteem herschalen zodat $(\alpha, \alpha) \leq 2$. Schrijf $\alpha = m^i\alpha_i = l^a\alpha_a + m^s\alpha_s$ en schrijf S voor de inverse van de Cartan-matrix van $\mathfrak{g}_{\{0\}}$. Dan is de begrenzing van de lengte van α te schrijven als

$$\|\alpha\|^2 = (\alpha, \alpha) = A_{ij}m^i m^j = S^{st}p_s p_t + (A_{ab} - S^{st}A_{sa}A_{tb})l^a l^b \leq 2. \quad (5.3)$$

Voor elk deelalgebra blijken de componenten van S niet-negatief te zijn. Derhalve is vergelijking 5.3 een monotoon stijgende functie van p_s . Dit betekent dat er voor een gegeven level slechts een eindig aantal mogelijke oplossingen zijn.

Wanneer niet-negatieve coëfficiënten p_s moet worden gecontroleerd dat de m^s integers zijn. We doen dit door vergelijking 5.2 om te draaien:

$$m^s = S^{st}(p_t - A_{ta}l^a). \quad (5.4)$$

We hebben nu kandidaten gevonden voor een hoogste-gewichtrepresentatie van $\mathfrak{g}_{\{0\}}$. Om na te gaan of en hoe vaak deze representaties voorkomen in het wortelsysteem van \mathfrak{g} kunnen we de zogenaamde Freudenthal-recursieformule toepassen. Dit zal niet worden toegelicht.

Deze berekening wordt toegepast door het computerprogramma SimpLie [16]. In paragraaf 6.1 laten we zien dat dit voor A_2 hetzelfde resultaat geeft als voorbeeld 5.1.4. Het resultaat voor E_8 wordt in paragraaf 6.2 gegeven en de resultaten zijn in principe met de hand te controleren (zij het dat dit in de praktijk veel moeilijker is dan bij A_2). Het programma blijkt de berekening ook te kunnen maken voor oneindige, simpele Lie-algebra's met een eindig Lie-algebra als deelalgebra. Hiervan zal een voorbeeld worden gegeven in hoofdstuk 6.3.

6 Voorbeelden van decompositie van Lie-algebra's:

6.1 Decompositie van A_2

Wanneer SimPLie rekt aan A_2 met het eerste punt verwijderd, geeft het programma het volgende resultaat:

l	p_s	m^i	a^2	d_r	$mult$
0	0	0 0	0	1	2
0	2	0 1	2	3	1
-1	1	-1 0	2	2	1
1	1	1 1	2	2	1

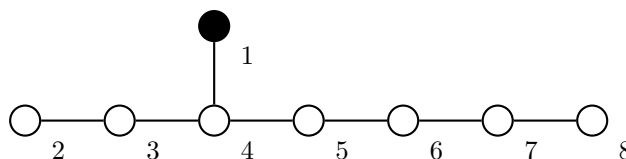
Tabel 6.1: Representaties van A_1

Hierin is d_r de dimensie van de representatie gekenmerkt door de p_s met hoogste gewichtsvector $\alpha = m^i \alpha_i$ en $mult$ het aantal maal dat de wortel α in het wortelsysteem van A_2 voorkomt.

We zien dat de tabel precies de wortels met grootste coëfficiënten bevat van de groepjes wortels die we in voorbeeld 5.1.4 gevonden hebben en dat de dimensies van de representaties overeenkomen. Volgens stelling 3.6.9 moeten de Dynkinlabels van het tweede punt overeenkomen met de Dynkinlabels van de representaties van \mathfrak{sl}_2 . Deze hebben we in voorbeeld 3.6.11 berekend en we zien dat ze overeenkomen.

6.2 Decompositie van E_8

We kunnen SimPLie laten werken op E_8 met A_7 als deelalgebra. Zie figuur 6.1.



Figuur 6.1: Decompositie van E_8 ten opzichte van deelalgebra A_7 .

Merk op dat de nummering door het programma SimPLie anders is dan de conventie. Wanneer we SimPLie laten rekenen krijgen we de onderstaande tabel:

l	p_s	m^i	a^2	d_r	$mult$
0	0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0	0	1	8
0	1 0 0 0 0 0 1	0 1 1 1 1 1 1 1	2	63	1
-1	0 0 1 0 0 0 0	-1 0 0 0 0 0 0 0	2	56	1

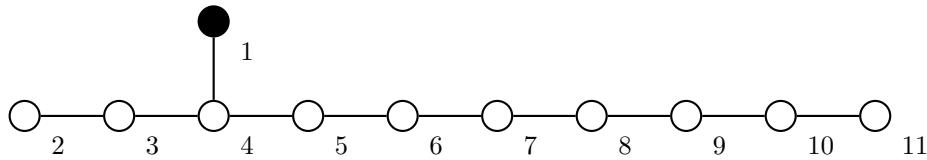
1	0 0 0 0 1 0 0	1 1 2 3 3 3 2 1	2	56	1
-2	0 0 0 0 0 1 0	-2 -1 -2 -3 -2 -1 0 0	2	28	1
2	0 1 0 0 0 0 0	2 2 4 5 4 3 2 1	2	28	1
-3	1 0 0 0 0 0 0	-3 -1 -3 -5 -4 -3 -2 -1	2	8	1
3	0 0 0 0 0 0 1	3 2 4 6 5 4 3 2	2	8	1

Tabel 6.2: Representaties van A_6

We zien dat de nulvector 8 maal voorkomt, hetgeen logisch is omdat het CSA van E_8 wordt opgespannen door 8 generatoren. De som van de dimensies van de representaties is 248. Dit is precies de dimensie van E_8 [3, p. 115].

6.3 Decompositie van E_{11}

De decompositie van E_{11} wordt uitgevoerd ten opzichte van het deelalgebra A_{10} . Zie figuur 6.2 voor de nummering van de punten.



Figuur 6.2: Decompositie van E_{11} ten opzichte van deelalgebra A_{10} .

SimpLie geeft de volgende tabel:

l	p_s	m^i	a^2	d_r	$mult$
0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	0	1	11
0	1 0 0 0 0 0 0 0 0 1	0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1	2	120	1
-1	0 0 1 0 0 0 0 0 0 0	-1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0	2	165	1
1	0 0 0 0 0 0 0 1 0 0	1 1 2 3 3 3 3 3 3 2 1	2	165	1
-2	0 0 0 0 0 1 0 0 0 0	-2 -1 -2 -3 -2 -1 0 0 0 0 0	2	462	1
2	0 0 0 0 1 0 0 0 0 0	2 2 4 6 6 6 5 4 3 2 1	2	462	1
-3	0 0 0 0 0 0 0 0 1 0	-3 -2 -4 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 0	0	55	8
-3	1 0 0 0 0 0 0 1 0 0	-3 -1 -3 -5 -4 -3 -2 -1 0 0 0	2	1760	1
3	0 1 0 0 0 0 0 0 0 0	3 3 6 8 7 6 5 4 3 2 1	0	55	8
3	2 0 0 0 0 0 0 0 0 0	3 4 6 8 7 6 5 4 3 2 1	2	66	0
3	0 0 1 0 0 0 0 0 0 1	3 3 6 9 8 7 6 5 4 3 2	2	1760	0
-4	1 0 0 0 0 0 0 0 0 0	-4 -2 -5 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1	-2	11	46
-4	0 1 0 0 0 0 0 0 0 1	-4 -2 -4 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0	0	594	8
-4	2 0 0 0 0 0 0 0 0 1	-4 -1 -4 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0	2	715	1
-4	0 0 1 0 0 0 0 0 1 0	-4 -2 -4 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 0	2	8470	1
4	0 0 0 0 0 0 0 0 0 1	4 3 6 9 8 7 6 5 4 3 2	-2	11	0
4	1 0 0 0 0 0 0 0 1 0	4 4 7 10 9 8 7 6 5 4 2	0	594	0
4	1 0 0 0 0 0 0 0 0 2	4 4 7 10 9 8 7 6 5 4 3	2	715	0
4	0 1 0 0 0 0 0 1 0 0	4 4 8 11 10 9 8 7 6 4 2	2	8470	0

Tabel 6.3: Representaties van A_{10}

De levels van de decompositie lopen tot in het oneindige door maar in de tabel zijn alleen de levels $-3, \dots, 3$ weergegeven. Het is te zien dat de dimensies van de representaties steeds groter worden bij hogere levels in de tabel.

We zien op level 1 een 165-dimensionale representatie. Het vermoeden bestaat dat deze representatie is te interpreteren als de 3-vorm $C_{\mu\nu\rho}$ genoemd in de inleiding. Dit vermoeden wordt versterkt doordat er vele soortgelijke interpretaties van de optredende representaties mogelijk zijn in termen van superzwaartekracht-theorie. Ook in decomposities van E_{11} ten opzichte van andere eindige deelalgebra's komen zulke representaties voor. Het is vooralsnog onduidelijk wat dit mogelijke verband tussen E_{11} en supergravitatie precies is.

Bibliografie

- [1] S. Coleman and J. Mandula, Phys. Rev. 159 (1967) 1251
- [2] R. Haag, J. Lopuszanski, and M. Sohnius, Nucl. Phys. B 88, 257 (1975)
- [3] J. Fuchs, C. Schweigert, Symmetries, Lie Algebras and Representations, A graduate course for physicists, Cambridge University Press (1997)
- [4] V.S. Varadarajan, Lie Groups, Lie Algebras, and Their Representations, Springer-Verlag (1984)
- [5] J.M. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer-Verlag (1980)
- [6] W.M. Fulton, J. Harris, Representation Theory, A First Course, Springer (2004)
- [7] J.P. Serre, Complex Semisimple Lie Algebras (Translated from the French by G.A. Jones), Springer-Verlag (1987)
- [8] Degenerate form, <http://en.wikipedia.org/wiki/Nondegenerate> (11-01-2007)
- [9] Élie Cartan, http://en.wikipedia.org/wiki/%C3%89lie_Cartan (16-07-2007)
- [10] Root system, http://en.wikipedia.org/wiki/Root_system (14-04-2007)
- [11] J. Top, Dynkin diagrammen en Wortelsystemen, <http://www.math.rug.nl/~top/dynkin.pdf> (15-05-2001)
- [12] Simple module, http://en.wikipedia.org/wiki/Simple_module (20-07-2007)
- [13] Module (mathematics), <http://en.wikipedia.org/wiki/Submodule> (21-07-2007)
- [14] H. Samelson, Notes on Lie Algebras, Springer-Verlag (1990)
- [15] E.A. Bergshoeff, I. De Baetselier, T.A. Nutma, E11 and the Embedding Tensor, http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0705/0705.1304v1.pdf (9-05-2007)
- [16] T. Nutma, SimpLie, a simple program for Lie algebras, http://strings.fmns.rug.nl/SimpLie/SimpLie_bin.zip (bezocht 2-08-2007)
- [17] V.G. Kac, Infinite Dimensional Lie Algebras, An introduction, Birkhäuser (1983)