

Universaliteit van fijne meetkundige structuur

Simon Hulshoff

4 augustus 2006

Inhoudsopgave

1	Inleiding	1
1.1	De klok	1
1.2	Zon Aarde en Maan	2
1.3	Recurrente banen	3
1.4	Microscoop	4
1.5	Fijne structuur	5
2	De cirkelafbeeldingen	7
2.1	De systemen	7
2.2	Specificatie van f_0 en f_1	8
2.3	Een klasse apart	9
3	De renormalisatieoperator	10
3.1	De terugkeerafbeelding	10
3.1.1	Terugkeerafbeelding op D_-	11
3.1.2	Terugkeerafbeelding op D_+	12
3.2	De renormalisatieoperator	13
4	Basiseigenschappen van de renormalisatieoperator	15
4.1	Functieonderzoek	15
4.2	Rand- en limietgedrag	17
4.2.1	Verduidelijking	18
4.3	Invariante Kegelvelden	21
4.4	Discontinuiteit	23
4.5	Monotoniciteit I	29
5	Dynamica van de renormalisatieoperator	30
5.1	D opnieuw gedefinieerd	30
5.2	Invariant	31
5.3	Monotoniciteit II	31
5.4	Contractie	32
5.5	Monotoniciteit III	34
5.6	Isocontractoren	34
5.7	De attractor	38

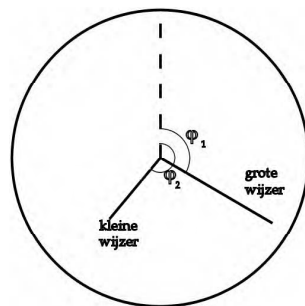
6	Dynamica op de attractor	39
6.1	Periodieke- en dekpunten	40
6.2	Discontinuïteiten	43
6.3	Goede buren? Farey buren!!!	47
6.4	De afstand tot de buren	50
6.5	Periodieke banen	55
7	Universaliteit	56
7.1	Weergave van S_{t^n}	56
7.2	Weergave van s_{t^n}	57
7.3	Stabiele varieteiten	58
7.4	De nieuwe code	60
7.5	Symmetrie	61
7.6	Rotatiegetal ρ	62
7.7	Combinatoriek	65

Hoofdstuk 1

Inleiding

De toekomst voorspellen, daar is men door de eeuwen heen druk mee bezig geweest. Ook vandaag de dag zijn er voorbeelden in overvloed: het weerbericht, financiële markten enz. In deze scriptie zullen we ons met het gedrag van mechanische systemen bezighouden. In principe kan het toekomstige gedrag van een mechanisch systeem exact worden voorspeld. Bij zulke systemen speelt kans geen rol. In tegenstelling tot het gedrag van financiële markten waar kans een grote rol speelt.

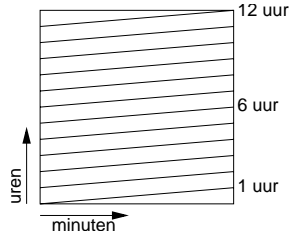
1.1 De klok



Figuur 1.1: een klok, 7 : 20

Laten we als voorbeeld de klok nemen als ons mechanisch dynamisch systeem. De toestand van de klok, dat wil zeggen de positie van beide wijzers, kunnen we beschrijven met twee hoeken, φ_1 en φ_2 . Zie figuur 1.1. Het gedrag is nu heel eenvoudig te beschrijven. De twee hoeken, van de grote wijzer en de kleine wijzer, nemen met een constante snelheid toe. De snelheid van de grote wijzer is twaalf maal zo groot als die van de kleine wijzer. Deze verhouding zal later in het verhaal een grote rol spelen. We noemen deze verhouding het rotatiegetal

$$\rho = \frac{1}{12}.$$

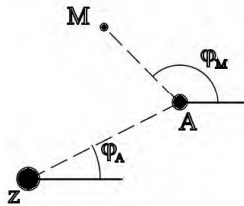


Figuur 1.2: de toestandruimte van de klok

We kunnen nu het verloop van beide wijzers eenvoudig beschrijven in de *toestandruimte*. Zie figuur 1.2. Merk op dat na twaalf uur de toestand weer gelijk is aan de begintoestand.

1.2 Zon Aarde en Maan

Een vergelijkbaar systeem vormen de maan en de aarde rond de zon. We kunnen de positie van de maan en aarde ook weer beschrijven met twee hoeken. Zie figuur 1.3. De dynamica van dit systeem is ook weer eenvoudig te beschrijven.

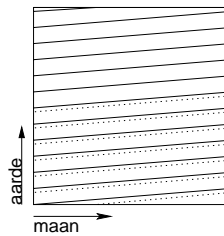


Figuur 1.3: positie's van zon, aarde en maan

De aardse hoek, φ_A en maan hoek φ_M nemen ook weer met constante snelheid toe. De verhouding tussen die twee snelheden is nu ongeveer

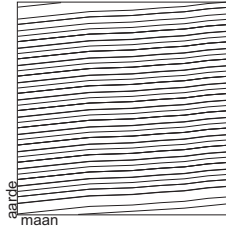
$$\rho = \frac{30}{365},$$

een maand gedeeld door een jaar. Dat is ongeveer een twaalfde ($\frac{30}{365} = \frac{6}{73} \approx \frac{6}{72} = \frac{1}{12}$). De toestandruimte van deze gezamenlijke beweging kunnen we eenvoudig illustreren. Zie figuur 1.4.



Figuur 1.4: de toestandruimte van het zon-aarde-maan systeem

De mooie rechte lijnige beweging zoals in figuur 1.4 staat beschreven is te eenvoudig om de werkelijke beweging van de maan en aarde om de zon te beschrijven. Er zijn namelijk nog andere planeten in de buurt. In het bijzonder Saturnus en Jupiter. Dit zijn hele zware planeten die een invloed hebben, ondanks dat ze ver weg staan, op de beweging van de aarde en de maan. Het gevolg van deze invloed is dat er geen rechte lijnen worden verkregen op het moment dat men het werkelijke gedrag illustreert, maar eerder een weergave zoals in figuur 1.5.



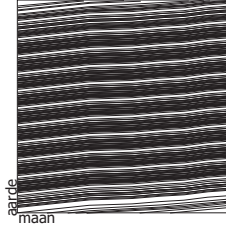
Figuur 1.5: reële toestandsruimte van het zon-aarde-maan systeem

Er zijn nog vele andere mechanische systemen die op een vergelijkbare manier kunnen worden beschreven. Vaak wijken deze nog verder af van de rechte lijnige beweging van de klok.

We gaan nu met een grotere precisie kijken naar de besproken dynamische systemen. De eerste observatie is dat de klok een periodieke beweging heeft. Na 12 uur is de begin toestand weer terug. Merk op dat het rotatiegetal een breuk is, een twaalfde. Het is niet duidelijk of het zon-maan-aarde systeem periodiek is. Als het rotatiegetal precies $\frac{30}{365}$ is dan zou het na 365 maanden weer precies terug zijn in de begin situatie. Er zijn echter verschillende kalender correcties geweest. Denk maar aan het schrikkeljaar en zelfs de schrikkelseconden. We nemen in dit verhaal aan dat het werkelijke rotatiegetal van het zon-aarde-maan systeem niet een breuk is. Dat wil zeggen dat als de maan een keer rond de aarde loopt, dan heeft de aarde maar een irrationaal gedeelte van zijn hele baan om de zon afgelegd. Dit heeft tot gevolg dat de beweging niet periodiek is.

1.3 Recurrente banen

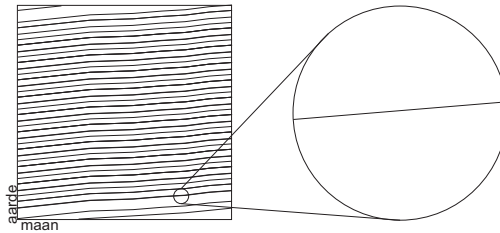
Een niet-periodieke beweging heeft een bijzondere eigenschap. Elke mogelijke combinatie van aarde en maan hoek komt na verloop van tijd (met willekeurig grote precisie) voor. Deze niet-periodieke beweging noemen we daarom *recurrent*: je komt er "later" nog eens willekeurig dicht bij; de baan $(\varphi_A(t), \varphi_M(t))$ ligt dicht in de toestandsruimte. Dit is niet waar voor de klok. Er zijn (wijzer)combinaties die nooit voorkomen. Ga maar na.



Figuur 1.6: toestandsruimte met een recurrente baan

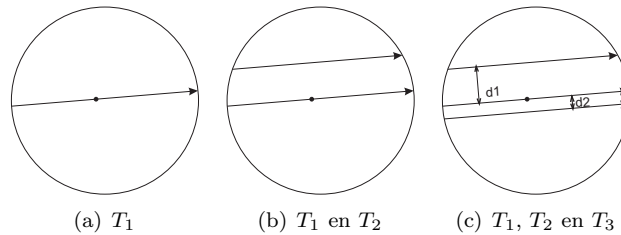
We hebben nu de periodieke en recurrente bewegingen onderscheiden. Een typisch voorbeeld van een recurrente beweging staat in figuur 1.6. De hele illustratie is gevuld met stukken van de baan. We gaan nu deze beweging op een nog finer niveau bestuderen. We gaan namelijk kijken naar de *fijne structuur* van recurrente banen, zoals die in figuur 1.6. De fijne structuur van een baan zijn de microscopische meetkundige eigenschappen hiervan. Om beter te kunnen beschrijven wat dit inhoudt nemen we een microscoop.

1.4 Microscoop



Figuur 1.7: microscopische uitvergroting

Wat zien we als we door een microscoop naar de baan van een recurrent systeem kijken? Het zal een tijdje duren, maar door de recurrentie zal men na verloop van tijd de baan door het beeld van de microscoop zien schieten. Dit gebeurt op tijdstip T_1 . Zie figuur 1.7. Het zal dan weer een tijdje duren, maar uiteindelijk zal door de recurrentie de baan nog een keer door het beeld schieten, zeg op tijdstip T_2 . Zie Fig 1.8, en zelfs nog een derde keer, zeg op tijdstip T_3 .



Figuur 1.8: de terugkeer

Laat S het ingezoomde gebied zijn en bekijk dan eens de meetkunde van de drie stukken baan die door dat gebiedje zijn geschoten. Zie figuur 1.8. We zijn geïnteresseerd in de meetkunde van deze drie stukjes baan. Meet bijvoorbeeld de verhouding van de afstanden tussen die stukjes.

$$\sigma_S = \frac{d_1}{d_2}.$$

Al deze verhoudingen σ_S (afkomstig van figuur 1.8, op zeer kleine schaal) tezamen noemen we de *fijne structuur* van de baan.

1.5 Fijne structuur

En nu gebeurt er iets wonderbaarlijks. Natuurlijk, de baan van het zon-aarde-maan systeem bestaat bijna uit rechte lijnen terwijl de banen van mechanische systemen meestal uit veel wildere krommen bestaan, wegens onberekenbare/onvoorspelbare externe invloeden. Op grote schaal zijn de banen sterk afhankelijk van het bestudeerde systeem. Op microscopische schaal gebeurt er iets bijzonders.

De fijne structuur hangt alleen af van het rotatiegetal. De fijne structuur is *universeel*.

Er zijn simpele mechanische systemen, zoals slingers, met het rotatiegetal precies gelijk aan het rotatiegetal van het zon-aarde-maan systeem is. De fijne structuur van de slingerbanen is precies de fijne structuur van het zon-aarde-maan systeem. Dit is verrassend, want we vergelijken hier twee systemen die niets met elkaar te maken hebben.

Er is een analogie met hoe de materie om ons heen is opgebouwd. In de natuur komen we een oneindige verscheidenheid aan stoffen tegen. Kijk bijvoorbeeld alleen maar eens naar voedsel, melk, wijn, sla, en zo kunnen we uren door gaan met deze lijst. De grote ontdekking is dat al deze stoffen maar uit een heel beperkt aantal bouwstenen, de elementen, is opgebouwd. Misschien een stuk of vijf. Waterstof, koolstof, zuurstof en nog een paar. De universaliteit in dynamica is net zoiets. Er zijn maar een heel beperkt aantal bouwstenen voor de fijne structuur van dynamica. Naar welk systeem men ook kijkt, steeds komt men dezelfde fijne structuur tegen die ook in het zon-aarde-maan-achtiges systeem zit.

In de volgende hoofdstukken zullen we onderzoeken waar deze universaliteit vandaan komt. Eerst zullen we de klasse van systemen beschrijven welke we gaan bestuderen. Deze systemen zijn in principe equivalent aan de systemen die we hier boven besproken hebben zoals de klok, het zon-aarde-maan systeem enz. We zullen niet de meest algemene vorm beschouwen, maar alleen de stuks gewijs affiene systemen. Dan zullen we een geschikte microscoop introduceren. In de literatuur wordt deze de *renormalizatie operator* genoemd. Het bestuderen van de fijne structuur kan gedaan worden met alleen de hulp van deze renormalizatie operator. In het bijzonder zullen we de dynamica van deze renormalizatie operator bestuderen. Al doende zullen we veel belangrijke ideeën uit de algemene

theorie van chaos tegen komen. In het bijzonder het centrale begrip van hyperboliciteit. Het uiteindelijke doel is het inzicht krijgen in de attractor van deze renormalizatie operator. Dat is de plaats waar we de universele fijne structuur kunnen vinden. Tenslotte zullen we het rotatiegetal netjes invoeren en de relatie laten zien met de universele fijne structuur. Een belangrijk instrument hierbij zijn de zogenaamde Farey buren.

Uiteindelijk zullen we in staat zijn om de universaliteit te bewijzen binnen onze klasse van affine systemen.

Hoofdstuk 2

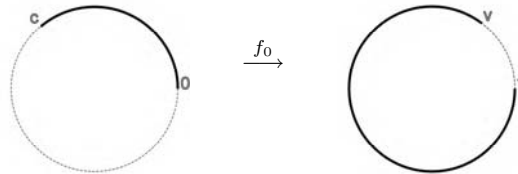
De cirkelafbeeldingen

2.1 De systemen

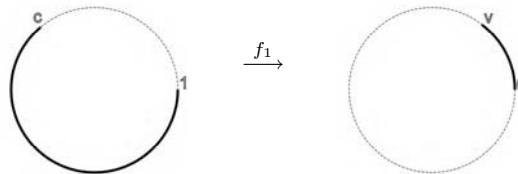
Voor dit onderzoek wordt gekeken naar een klasse van afbeeldingen $f : S^1 \mapsto S^1$ op de eenheidscirkel S^1 .

We beschouwen de volgende afbeeldingen: Kies op de eenheidscirkel willekeurig en onafhankelijk van elkaar een c en v . De afbeeldingen waarnaar gekeken wordt voldoen aan het volgende:

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) & x \in (0, c) \\ f_1(x) & x \in (c, 1) \end{cases} \quad \text{waarbij} \quad \begin{cases} f_0 : (0, c) \mapsto (v, 1) \\ f_1 : (c, 1) \mapsto (0, v) \end{cases} \quad (2.1)$$



Figuur 2.1: De afbeelding f_0



Figuur 2.2: De afbeelding f_1

2.2 Specificatie van f_0 en f_1

Vanaf dit punt zullen we de eenheidscirkel S^1 identificeren met het interval $[0,1)$.

Voor de functies f_0 en f_1 gelden verder de volgende restrictie's:

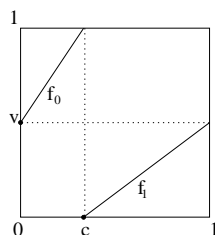
- ◇ De afbeeldingen zijn affien
- ◇ De afbeeldingen zijn orientatiebehoudend

Nu wordt alleen gekeken naar afbeeldingen die aan deze criteria voldoen. Het is mogelijk interessant om in een eventuele vervolgstudie naar andere (klassen van) afbeeldingen te kijken, bijvoorbeeld stuksgewijs Möbius. Het Möbius geval kan bestudeerd worden op vergelijkbare wijze, omdat de Möbius-afbeeldingen een groep vormen.

Nu geldt, mede omdat f_0 en f_1 inverteerbaar zijn, dat de keuze van c en v de afbeelding uniek bepaalt. Namelijk, als $(c, v) \in (0, 1)^2$

$$f(x) = f_{c,v}(x) = \begin{cases} f_0(x) := \frac{1-v}{c} \cdot x + v & \text{als } 0 < x < c \\ f_1(x) := \frac{v}{1-c} \cdot (x - c) & \text{als } c < x < 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

De grafiek van f ziet er als volgt uit:



Figuur 2.3: grafiek van f

Vanaf nu gaan we gebruik maken van de volgende notatie voor de parameter-ruimte:

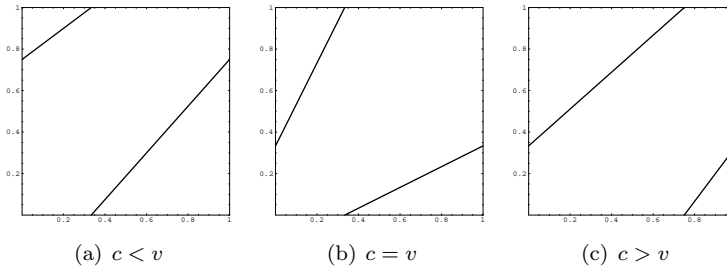
Notatie 2.1. D is de parameterruimte $(0, 1)^2$, oftewel $D = (0, 1)^2$.

De parameterruimte D kan worden onderverdeeld in drie deelverzamelingen:

- $D_- := \{(c, v) \in (0, 1)^2 \mid 0 < c < v < 1\}$
- $D_0 := \{(c, v) \in (0, 1)^2 \mid v = c\}$
- $D_+ := \{(c, v) \in (0, 1)^2 \mid 0 < v < c < 1\}$

Voor de volledigheid: $D = D_- \cup D_+ \cup D_0$

Hieronder staan 3 grafieken, behorend bij respectievelijk de parameters (c, v) in D_-, D_0 en D_+



Figuur 2.4: grafieken van f

Opmerking.

De deelverzameling D_0 is voor het vervolg niet van belang. De dynamica van $f \in D_0$ is triviaal. Alle punten zijn dan periodiek met periode 2.

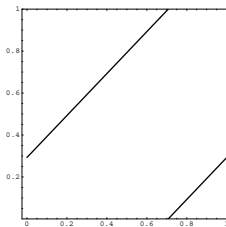
$$f^2(x) = f_{c,c}^2(x) = \begin{cases} f_1 \circ f_0(x) = x & \text{als } 0 < x < c \\ f_0 \circ f_1(x) = x & \text{als } c < x < 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

2.3 Een klasse apart

Merk op: als geldt dat $v = c - 1$, verkrijgt men de volgende functie(s):

$$f_{c,v}(x) = f_c(x) = \begin{cases} f_0(x) := x - c + 1 & \text{als } 0 < x < c \\ f_1(x) := x - c & \text{als } c < x < 1 \end{cases} \quad (2.4)$$

en ziet de grafiek er als volgt uit (merk op dat de helling (rico) 1 is):



Figuur 2.5: grafiek van $f_{c,v}$, met $v = 1 - c$

Dit representeert de pure rotatie's. Deze klasse van afbeeldingen blijkt voor het vervolg heel erg interessant te zijn, maar daarover later meer.

Hoofdstuk 3

De renormalisatieoperator

In het vorige hoofdstuk is vastgesteld welke afbeeldingen worden bestudeerd. De bedoeling is te kijken naar de ontwikkeling van de baan $c, f(c), f(f(c)), \dots$ van het punt c ; dit willen we doen op een steeds kleinere schaal, echter zonder veel informatie te verliezen. Om dit te bewerkstelligen, is het de wens om zo langzaam mogelijk de schaal te verkleinen, met behoud van zoveel mogelijk (zo niet alle) informatie van de omgeving. Hiervoor is gebruik te maken van een handig mechanisme, renormalisatie. Hier wordt wederom het onderscheid genomen tussen de gevallen enerzijds $0 < c < v < 1$ en anderzijds $0 < v < c < 1$. Er wordt gekeken binnen welk gebied het punt c ligt, derhalve zal in het eerste geval $U = (0, v)$ als renormalisatie domein worden genomen, in het tweede geval zal dit $U = (v, 1)$ zijn.

Voor het vinden van de renormalisatieoperator, maken we gebruik van de terugkeer afbeelding T_f

Gezocht wordt de terugkeer afbeelding $T_f : U \mapsto U$ waarbij

$$T_f(x) = f^{k(x)}(x) \tag{3.1}$$

zodanig dat

$$k(x) = \min\{n \geq 1 \mid f^n(x) \in U\} \tag{3.2}$$

Het blijkt dat T_f goed gedefinieerd is voor elk punt in U .

3.1 De terugkeer afbeelding

Voor het vinden/construeren van de terugkeer afbeelding, dienen we het volgende onderscheid te maken:

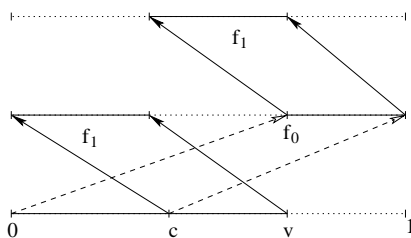
$$\begin{aligned} 0 < c < v < 1 & \text{ oftewel } (c, v) \in D_- \\ 0 < v < c < 1 & \text{ oftewel } (c, v) \in D_+ \end{aligned}$$

3.1.1 Terugkeerafbeelding op D_-

Als $0 < c < v < 1$ dan $U = (0, v)$. T_f bestaat uit (net als f) uit twee takken, namelijk:

$$T_f(x) = \begin{cases} F_0(x) & \text{als } 0 < x < c \\ F_1(x) & \text{als } c < x < v \end{cases}$$

Onderstaande illustratie verduidelijkt hoe T_f verkregen kan worden.

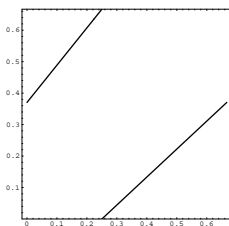


Figuur 3.1: constructie T_f , met $c \in (0, v)$

Dan

$$T_f(x) = \begin{cases} F_0(x) = f_1 \circ f_0(x) = \frac{v}{1-c} \left(\frac{1-v}{c} \cdot x + v - c \right) & \text{als } 0 < x < c \\ F_1(x) = f_1(x) = \frac{v}{1-c} \cdot (x - c) & \text{als } c < x < v \end{cases}$$

De bij de nieuwe afbeelding T_f behorende grafiek ziet er als volgt uit:



Figuur 3.2: grafiek van T_f

Het is duidelijk dat de grafiek van f grote mate van gelijkvormigheid vertoont met de grafiek van T_f , met als voornaamste verschil de omvang van domein en bereik. In het bijzonder geldt nu weer dat T_f stuksgewijs affien is.

$$\begin{aligned} f &: (0, 1) \mapsto (0, 1) \\ T_f &: (0, v) \mapsto (0, v) \end{aligned} \tag{3.3}$$

Door een (her)schaling $h : (0, 1) \mapsto (0, v)$ toe te passen op T_f krijg je echter een functie Rf met gelijk domein en bereik als de oorspronkelijke functie f . Deze lineaire herschaling is de volgende (samen met diens inverse):

$$\begin{aligned} h(x) &= v \cdot x \\ h^{-1}(x) &= \frac{x}{v} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Nu is het mogelijk om de functie Rf te verkrijgen. Beschouw onderstaand diagram, en merk op dat $Rf = h^{-1} \circ T_f \circ h$, oftewel

$$\begin{array}{ccc}
 (0, v) & \xrightarrow{T_f} & (0, v) \\
 \uparrow h & & \downarrow h^{-1} \\
 (0, 1) & \xrightarrow{Rf} & (0, 1)
 \end{array}$$

Dit toegepast vind je de volgende functies:

$$Rf(x) = \begin{cases} h^{-1} \circ f_1 \circ f_0 \circ h(x) = \frac{1}{1-c} \left(\frac{v(1-v)}{c} x + v - c \right) & \text{als } 0 < x < \frac{c}{v} \\ h^{-1} \circ f_1 \circ h(x) = \frac{1}{1-c} (vx - c) & \text{als } \frac{c}{v} < x < 1 \end{cases}$$

Dus geldt, bij $0 < c < v < 1$ dat

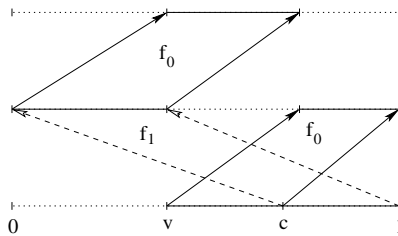
$$Rf_{c,v} = f_{\frac{c}{v}, \frac{v-c}{1-c}}$$

3.1.2 Terugkeerafbeelding op D_+

Hier is alles weer toepasbaar, met een paar kleine verschillen. Als $0 < v < c < 1$, dan $U = (v, 1)$, dan

$$T_f(x) = \begin{cases} F_0(x) & \text{als } v < x < c \\ F_1(x) & \text{als } c < x < 1 \end{cases}$$

Onderstaande illustratie verduidelijkt hoe T_f verkregen kan worden.

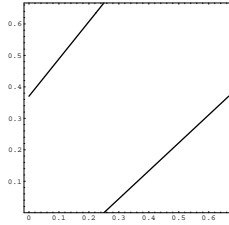


Figuur 3.3: constructie T_f , met $c \in (v, 1)$

De verkregen afbeelding is dan:

$$T_f(x) = \begin{cases} F_0(x) = f_0(x) = \frac{1-v}{c} \cdot x + v & \text{als } v < x < c \\ F_1(x) = f_0 \circ f_1(x) = \frac{v}{c} \frac{1-v}{1-c} (x - c) + v & \text{als } c < x < 1 \end{cases}$$

De bijbehorende grafiek van de afbeelding T_f ziet er als volgt uit:



Figuur 3.4: grafiek van T_f , met $0 < v < c < 1$

Merk hier ook weer de gelijkvormigheid op; ook deze afbeelding is stuksgewijs affien:

$$\begin{aligned} f &: (0, 1) \rightarrow (0, 1) \\ T_f &: (v, 1) \rightarrow (v, 1) \end{aligned} \quad (3.5)$$

De herschaling is nu $h : (0, 1) \mapsto (v, 1)$

$$\begin{aligned} h(x) &= (1 - v) \cdot x + v \\ h^{-1}(x) &= \frac{x-v}{1-v} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ook nu is weer Rf te vinden, $Rf = h^{-1} \circ T_f \circ h$, echter nu met

$$\begin{array}{ccc} (v, 1) & \xrightarrow{T_f} & (v, 1) \\ \uparrow h & & \downarrow h^{-1} \\ (0, 1) & \xrightarrow{Rf} & (0, 1) \end{array}$$

$$Rf(x) = \begin{cases} h^{-1} \circ f_0 \circ h(x) = \frac{(1-v) \cdot x + v}{c} & \text{als } 0 < x < \frac{c-v}{1-v} \\ h^{-1} \circ f_0 \circ f_1 \circ h(x) = \frac{v}{c} \cdot \frac{1}{1-c} ((1-v) \cdot x + v - c) & \text{als } \frac{c-v}{1-v} < x < 1 \end{cases}$$

Dus geldt, bij $0 < v < c < 1$ dat

$$Rf_{c,v} = f_{\frac{c-v}{1-v}, \frac{v}{c}}$$

3.2 De renormalisatieoperator

Merk op dat Rf weer een stuksgewijs affiene cirkelafbeelding is. En R is de operator gegeven door

$$Rf_{c,v} = \begin{cases} f_{\frac{c}{v}, \frac{v-c}{1-c}} & \text{als } 0 < c < v < 1 \\ f_{\frac{c-v}{1-v}, \frac{v}{c}} & \text{als } 0 < v < c < 1 \end{cases}$$

Definitie 3.1.

De operator $R : D \setminus D_0 \rightarrow D$ is de renormalisatieoperator, gedefinieerd door:

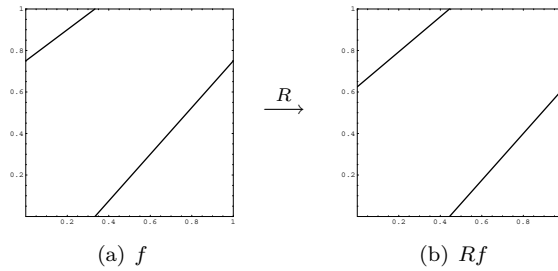
$$R(c, v) = \begin{cases} \left(\frac{c}{v}, \frac{v-c}{1-c} \right) & \text{als } 0 < c < v < 1 \\ \left(\frac{c-v}{1-v}, \frac{v}{c} \right) & \text{als } 0 < v < c < 1 \end{cases}$$

Opmerking.

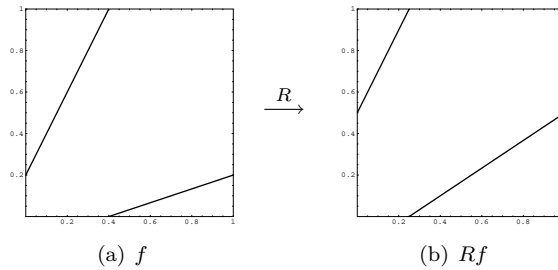
Als geldt dat $v = 1 - c$, dan krijg je het volgende:

$$R(c, 1-c) = \begin{cases} \left(\frac{c}{1-c}, \frac{1-2c}{1-c} \right) & \text{als } 0 < c < \frac{1}{2} \\ \left(\frac{2c-1}{c}, \frac{1-c}{c} \right) & \text{als } \frac{1}{2} < c < 1 \end{cases}$$

maar hierover later meer.



Figuur 3.5: De renormalisatie $R : f \rightarrow Rf$, waarbij $0 < c < v < 1$



Figuur 3.6: De renormalisatie $R : f \rightarrow Rf$, waarbij $0 < v < c < 1$

Opmerking.

Bij de laatste afbeelding geldt dat $(c, v) \in D_+$, terwijl $R(c, v) \in D_-$ ligt. In het volgende hoofdstuk zal blijken dat D_- op zowel D_- als D_+ wordt afgebeeld; hetzelfde geldt voor D_+

Hoofdstuk 4

Basiseigenschappen van de renormalisatieoperator

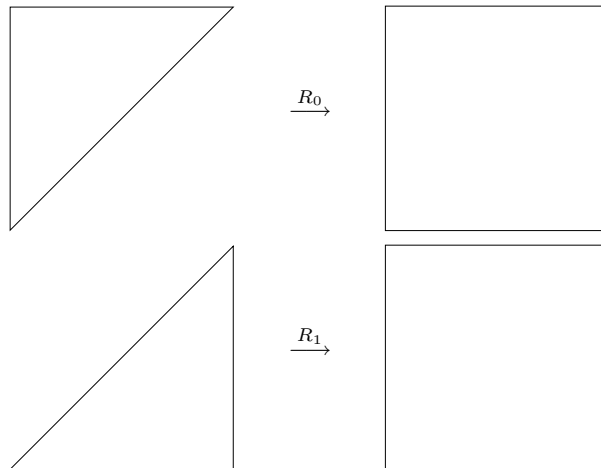
In dit hoofdstuk gaan we kijken naar de basiseigenschappen van de gevonden renormalisatieoperator $R : D \setminus D_0 \rightarrow D$ waarbij

$$R(c, v) = \begin{cases} \left(\frac{c}{v}, \frac{v-c}{1-c} \right) & \text{als } (c, v) \in D_- \\ \left(\frac{c-v}{1-v}, \frac{v}{c} \right) & \text{als } (c, v) \in D_+ \end{cases} \quad (4.1)$$

Laat $R_0 := R|_{D_-}$ en $R_1 := R|_{D_+}$

4.1 Functieonderzoek

Beschouw ter verduidelijking eerst onderstaande illustratie.



Figuur 4.1: grafieken van R_0 en R_1

Notatie 4.1.

Voor het vervolg geldt: $(c, v) \in D$, $(c_-, v_-) \in D_-$ en $(c_+, v_+) \in D_+$

Lemma 4.2.

De inverse functies R_0^{-1} en R_1^{-1} bestaan, en

$$\begin{aligned} R_0^{-1}(c, v) &= \left(\frac{cv}{1-c+cv}, \frac{v}{1-c+cv} \right) = (c_-, v_-) \\ R_1^{-1}(c, v) &= \left(\frac{c}{1-v+cv}, \frac{cv}{1-v+cv} \right) = (c_+, v_+) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Bovendien geldt $\forall (c, v) \in D$ dat $(c_-, v_-) = R_0^{-1}(c, v) \in D_-$ en $(c_+, v_+) = R_1^{-1}(c, v) \in D_+$

Bewijs.

Met enig rekenwerk is eenvoudig te vinden dat

$$\begin{aligned} R_0^{-1} \circ R_0 &= R_0 \circ R_0^{-1} = id. \\ R_1^{-1} \circ R_1 &= R_1 \circ R_1^{-1} = id. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Stel $(c_-, v_-) = R_0^{-1}(c, v)$.

We moeten bewijzen dat $(c_-, v_-) \in D_-$, oftewel dat $0 < c_- < v_- < 1$.

Stap 1:

$$\left. \begin{aligned} c, v > 0 &\Rightarrow cv > 0 \\ c < 1 &\Rightarrow c < 1 < 1 + cv \Rightarrow \\ &0 < 1 - c < 1 - c + cv \Rightarrow \\ &1 - c + cv > 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} c_- &= \frac{cv}{1-c+cv} > 0 \\ v_- &= \frac{v}{1-c+cv} > 0, \end{aligned}$$

dus geldt dat $c_- > 0$ en $v_- > 0$.

Stap 2:

$$\begin{aligned} c < 1 &\Rightarrow 0 < 1 - c &\Rightarrow cv < 1 - c + cv &\Rightarrow c_- = \frac{cv}{1-c+cv} < 1 \\ v < 1 &\Rightarrow v - vc < 1 - c &\Rightarrow v < 1 - c + cv &\Rightarrow v_- = \frac{v}{1-c+cv} < 1, \end{aligned}$$

dus geldt dat $c_- < 1$ en $v_- < 1$.

Stap 3:

$$c < 1 \Rightarrow cv < v \Rightarrow \frac{cv}{1-c+cv} < \frac{v}{1-c+cv},$$

dus geldt dat $c_- < v_-$. □

Hieruit volgt:

Lemma 4.3. R_0 en R_1 zijn zowel injectief als surjectief (dus bi-jectief)

Bovendien geldt het volgende:

Lemma 4.4.

R_0^{-1} en R_1^{-1} zijn continu uitbreidbaar in $(0, 0)$ en $(1, 1)$

Bewijs.

Voor $i = 0, 1$ geldt:

$$\begin{aligned} \lim_{(c,v) \rightarrow (0,0)} R_i^{-1} &= (0, 0) \\ \lim_{(c,v) \rightarrow (1,1)} R_i^{-1} &= (1, 1) \end{aligned}$$

□

Lemma 4.5.

Voor elk punt $(c_-, v_-) \in D_-$ bestaat er een uniek punt $(c_+, v_+) \in D_+$ waarvoor geldt dat $R_0(c_-, v_-) = R_1(c_+, v_+)$.

Bewijs. Wegens bi-jektiviteit van R_0 en R_1 geldt

$$\forall (c, v) \in D \begin{cases} \exists!(c_-, v_-) \in D_-, & \text{z.d.d. } R_0^{-1}(c, v) = (c_-, v_-) \\ \exists!(c_+, v_+) \in D_+, & \text{z.d.d. } R_1^{-1}(c, v) = (c_+, v_+) \end{cases}$$

□

Er geldt dan

$$(c_+, v_+) = R_1^{-1} \circ R_0(c_-, v_-) = \frac{c_-}{v_- + c_- v_- - c_-^2 - v_-^2} \cdot (1 - c_-, v_- - c_-)$$

$$(c_-, v_-) = R_0^{-1} \circ R_1(c_+, v_+) = \frac{v_+}{c_+ + c_+ v_+ - c_+^2 - v_+^2} \cdot (c_+ - v_+, 1 - c_+)$$

4.2 Rand- en limietgedrag

Wat gebeurt er bij de randen? Om dit te achterhalen, wordt er naar de limieten gekeken.

De (half)afbeelding $R_0 : D_- \mapsto D$ heeft de volgende eigenschap

$$\lim_{c \downarrow 0} R_0(c, v) = (0, v)$$

$$\lim_{v \uparrow 1} R_0(c, v) = (c, 1).$$

Net zo voor de afbeelding $R_1 : D_+ \mapsto D$

$$\lim_{c \uparrow 1} R_1(c, v) = (1, v)$$

$$\lim_{v \downarrow 0} R_1(c, v) = (c, 0).$$

Dus:

- De punten (c, v) nabij $(0, v)$ worden door R_0 weer nabij $(0, v)$ afgebeeld.
- De punten (c, v) nabij $(c, 1)$ worden door R_0 weer nabij $(c, 1)$ afgebeeld.
- De punten (c, v) nabij $(1, v)$ worden door R_1 weer nabij $(1, v)$ afgebeeld.
- De punten (c, v) nabij $(c, 0)$ worden door R_1 weer nabij $(c, 0)$ afgebeeld.

Met ander woorden:

R_0 is continu uitbreidbaar op $\overline{D_-} \cap \partial D \setminus D_0$

R_1 is continu uitbreidbaar op $\overline{D_+} \cap \partial D \setminus D_0$

Het gedrag bij de diagonaal verdient wat extra aandacht. Als $v \neq 0, 1$ dan

$$\lim_{c \uparrow v} R_0(c, v) = \lim_{c \uparrow v} \left(\frac{c}{v}, \frac{v-c}{1-c} \right) = (1, 0)$$

$$\lim_{c \downarrow v} R_1(c, v) = \lim_{c \downarrow v} \left(\frac{c-v}{1-v}, \frac{v}{c} \right) = (0, 1)$$

Het gedrag in de hoekpunten $(0,0)$ en $(1,1)$ hangt af van de richting waarin (c,v) die punten benadert. Nabij $(0,0)$ ligt (c,v) op de lijn $v = ac$, oftewel $(c,v) = (c, ac)$, nabij $(1,1)$ ligt (c,v) op de lijn $v = a(c-1) + 1$, oftewel $(c,v) = (c, a(c-1) + 1)$, waarbij a de helling(rico) is.

Dan heb je bij $(0,0)$:

$$R_0(c,v) = R_0(c, ac) = \left(\frac{c}{ac}, \frac{ac-c}{1-c} \right)$$

$$R_1(c,v) = R_1(c, ac) = \left(\frac{c-ac}{1-ac}, \frac{ac}{c} \right)$$

Hieruit volgt

$$\lim_{c \downarrow 0} R_0(c, ac) = \left(\frac{1}{a}, 0 \right) \quad \text{met } a \in (1, \infty)$$

$$\lim_{c \downarrow 0} R_1(c, ac) = (0, a) \quad \text{met } a \in (0, 1).$$

Bij $(1,1)$ heb je:

$$R_0(c,v) = R_0(c, a(c-1) + 1) = \left(\frac{c}{a(c-1) + 1}, \frac{(1-c)(1-a)}{1-c} \right)$$

$$R_1(c,v) = R_1(c, a(c-1) + 1) = \left(\frac{(1-c)(a-1)}{a(1-c)}, \frac{a(c-1) + 1}{c} \right)$$

Hieruit volgt

$$\lim_{c \uparrow 1} R_0(c, a(c-1) + 1) = (1, 1-a) \quad \text{met } a \in (0, 1)$$

$$\lim_{c \uparrow 1} R_1(c, a(c-1) + 1) = \left(\frac{a-1}{a}, 1 \right) \quad \text{met } a \in (1, \infty)$$

4.2.1 Verduidelijking

Om het gedrag in deze hoekpunten te verduidelijken beschouwen we een familie van cirkelbogen in D die door $(0,0)$ en $(1,1)$ gaan, en hoe deze bogen door R worden afgebeeld.

In het algemeen is de cirkel van de vorm

$$(c-p)^2 + (v-q)^2 = r^2$$

waarbij (p,q) het middelpunt is, en r de straal. Aangezien we enkel en alleen kijken naar cirkels die door $(0,0)$ en $(1,1)$ gaan, is dit te vereenvoudigen tot:

$$(c-p)^2 + (v - (1-p))^2 = 2p^2 - 2p + 1$$

oftewel:

$$v(c) = v = 1 - p \pm \sqrt{(p-1)^2 + c(2p-c)}$$

Voor de punten $(c_-, v_-) = (c, v(c))$ die in D_- liggen geldt dat:

$$Q_p^- : v(c) = (1-p) + \sqrt{(p-1)^2 + c(2p-c)} \quad \text{met } p \in [1, \infty)$$

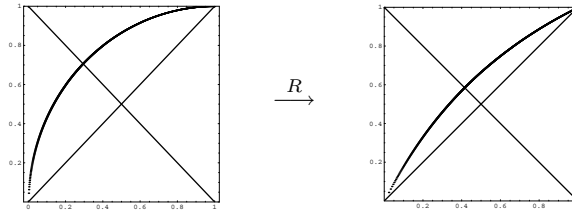
Als $p < 1 \in \mathbb{R}$ dan ligt de cirkelboog (deels) buiten D_- , en verliest de (grafiek van de) cirkelboog de relevantie

Voor de punten $(c_+, v_+) = (c, v(c))$ die in D_+ liggen geldt dat:

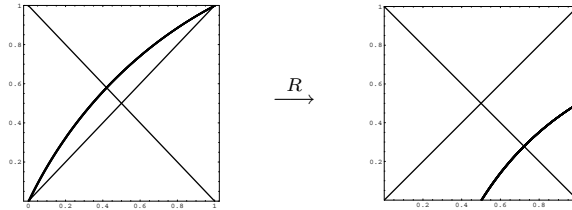
$$Q_p^+ : v(c) = (1-p) - \sqrt{(p-1)^2 + c(2p-c)} \quad \text{met } p \in (-\infty, 0]$$

Als $p > 0 \in \mathbb{R}$ dan ligt de cirkelboog (deels) buiten D_+

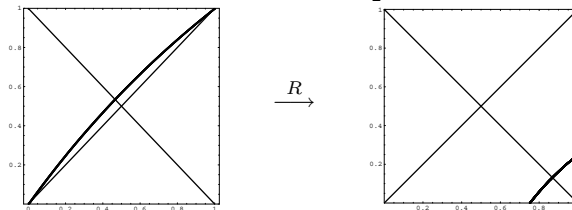
Om het gedrag van R in $(0,0)$ en $(1,1)$ te illustreren beschouwen we de Q_p^\pm en $R(Q_p^\pm)$. Zie hiervoor de volgende figuren.



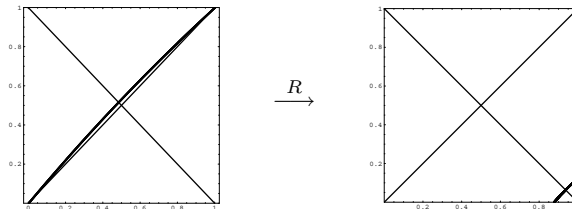
Figuur 4.2: De kromme van Q_1^- , met zijn beeld



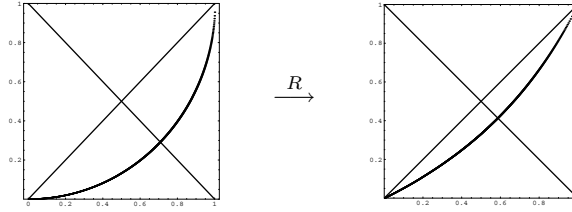
Figuur 4.3: De kromme van Q_2^- , met zijn beeld



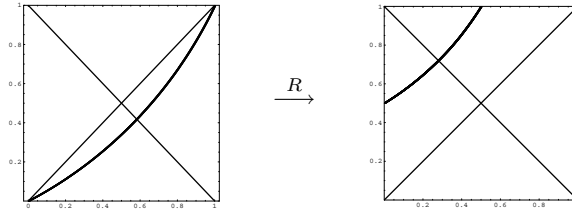
Figuur 4.4: De kromme van Q_4^- , met zijn beeld



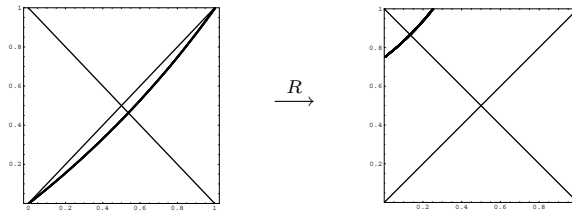
Figuur 4.5: De kromme van Q_2^- , met zijn beeld



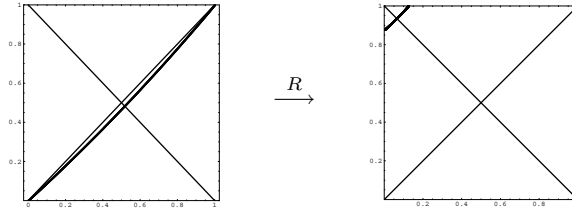
Figuur 4.6: De kromme van Q_0^+ , met zijn beeld



Figuur 4.7: De kromme van Q_{-1}^+ , met zijn beeld



Figuur 4.8: De kromme van Q_{-3}^+ , met zijn beeld



Figuur 4.9: De kromme van Q_{-7}^+ , met zijn beeld

4.3 Invariante Kegelvelden

Deze kegelinvariantie gaat onder de naam 'Hyperboliciteit'. Onze R is hyperbolisch. Voor hyperbolische systemen bestaat er een uitgebreide, abstracte theorie.

Definitie 4.6.

De kegel $C_{(c,v)} \in D \times \mathbb{R}^2$, met $(c, v) \in D$ is

$$C_{(c,v)} = \{(u_1, u_2) \in T_{(c,v)}D \mid u_1 \cdot u_2 > 0\}$$

Hierbij is $T_{c,v}D$ de raakruimte aan D in het punt (c, v) .

Notatie 4.7.

Als $R_0^{-1} = (R_{0,1}^{-1}, R_{0,2}^{-1})$, dan

$$DR_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R_{0,1}^{-1}}{\partial c} & \frac{\partial R_{0,1}^{-1}}{\partial v} \\ \frac{\partial R_{0,2}^{-1}}{\partial c} & \frac{\partial R_{0,2}^{-1}}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Dit kegelveld is invariant, oftewel

Propositie 4.8.

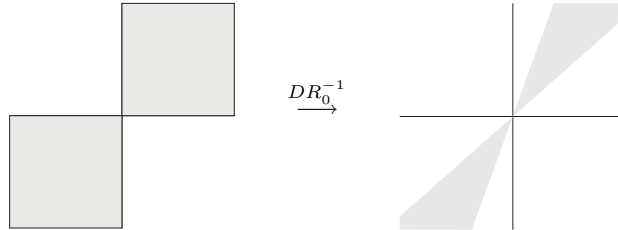
Voor elke $(c, v) \in D$ geldt

$$DR_0^{-1}(c, v)(C_{(c,v)}) \subset C_{R_0^{-1}(c,v)}$$

en ook

$$DR_1^{-1}(c, v)(C_{(c,v)}) \subset C_{R_1^{-1}(c,v)}$$

Grafisch ziet dit er als volgt uit:



Figuur 4.10: Het invariante kegelveld

Bewijs.

Het is met oog op de hyperboliciteit voldoende om te laten zien dat de matrix DR_0^{-1} uit positieve elementen bestaat. (tevens voor de matrix DR_1^{-1}), want als $u_1, u_2 > 0$, dan volgt daaruit dat

$$DR_0^{-1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

met $w_1, w_2 > 0$. Dit is tevens het geval als $u_1, u_2 < 0$ (dan $w_1, w_2 < 0$) Dit bewijst de invariantie van de kegel. In ons geval hebben we:

$$R_0^{-1}(c, v) = (R_{01}^{-1}, R_{02}^{-1}) = \left(\frac{cv}{1-c+cv}, \frac{v}{1-c+cv} \right) = (c_-, v_-)$$

$$R_1^{-1}(c, v) = (R_{11}^{-1}, R_{12}^{-1}) = \left(\frac{c}{1-v+cv}, \frac{cv}{1-v+cv} \right) = (c_+, v_+)$$

Dan geldt dat

$$DR_0^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R_{01}^{-1}}{\partial c} & \frac{\partial R_{01}^{-1}}{\partial v} \\ \frac{\partial R_{02}^{-1}}{\partial c} & \frac{\partial R_{02}^{-1}}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{v}{(1-c+cv)^2} & \frac{c(1-c)}{(1-c+cv)^2} \\ \frac{v(1-v)}{(1-c+cv)^2} & \frac{1-c}{(1-c+cv)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix}$$

en

$$DR_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R_{11}^{-1}}{\partial c} & \frac{\partial R_{11}^{-1}}{\partial v} \\ \frac{\partial R_{12}^{-1}}{\partial c} & \frac{\partial R_{12}^{-1}}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-v}{(1-v+cv)^2} & \frac{c(1-c)}{(1-v+cv)^2} \\ \frac{v(1-v)}{(1-v+cv)^2} & \frac{c}{(1-v+cv)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + & + \\ + & + \end{pmatrix}$$

□

4.4 Discontinuiteit

We zijn geïnteresseerd in de dynamica van $f \in D$ op willekeurig kleine schaal. Dat betekent dat we $R^n f$ nu bestuderen, voor $n \geq 1 \in \mathbb{N}$. Dit houdt in dat we de dynamica van R verder willen gaan bestuderen.

Gezocht wordt naar $W_n \subset D$ waarvoor geldt dat $R^n : W_n \mapsto D$ goed gedefinieerd is. Om W_n te vinden moeten we de discontinuiteiten K_n vinden, de punten waarop R^n discontinu is. W_n is het complement van K_n .

Om de discontinuiteiten K_n te vinden, maken we gebruik van de volgende constructie. De afbeelding $R : D \mapsto D$ is niet gedefinieerd - niet bestaand - op D_0 . Omdat zowel R_0 als R_1 bi-jectief zijn, zijn er punten $(c, v) \in D_-$ en $(c, v) \in D_+$ welke worden afgebeeld op D_0 . Zo worden de volgende verzamelingen gedefinieerd:

$$\begin{aligned} B_1 &:= D_0 = \{(c, v) \in D \mid c = v\} \\ B_2 &:= \{(c, v) \in D \mid R(c, v) \in D_0\} = R_0^{-1}(B_1) \cup R_1^{-1}(B_1) \\ B_3 &:= \{(c, v) \in D \mid R^2(c, v) \in D_0\} = R_0^{-1}(B_2) \cup R_1^{-1}(B_2) \\ &\vdots \\ B_n &:= \{(c, v) \in D \mid R^n(c, v) \in D_0\} = R_0^{-1}(B_{n-1}) \cup R_1^{-1}(B_{n-1}) \end{aligned}$$

Lemma 4.9.

Laat $\beta : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ een stijgende differentieerbare functie zijn, met de grafiek $\Gamma_\beta = \{(c, \beta(c)) \mid c \in (0, 1)\} \subset D$. Dan zijn $R_0^{-1}(\Gamma_\beta)$ en $R_1^{-1}(\Gamma_\beta)$ ook de grafiek van een stijgende functie.

Bewijs.

Neem u een raakvector aan β in x . Omdat β stijgend is, geldt dat $u \in C_x$. Omdat $\beta' = R_0^{-1}(\beta)$ is β' een differentieerbare kromme. Neem nu $y = R_0^{-1}(x)$, met $x \in \beta$. Dan is $u' = DR_0^{-1}(u)$ een raakvector aan β' in y . Nu vertelt de kegelinvariantie ons dat $u' \in C_y$. Dus is β' een stijgende functie. \square

Opmerking.

Zie als voorbeeld de afbeelding van cirkelbogen, in de vorige paragraaf.

Dus hebben we de totale discontinuiteit K_n nodig:

$$\begin{aligned} K_1 &:= B_1 = D_0 \\ K_2 &:= K_1 \cup B_2 \\ K_3 &:= K_2 \cup B_3 \\ &\vdots \\ K_n &:= K_{n-1} \cup B_n \end{aligned}$$

Er geldt dat elke discontinuiteit van B_n in een samenhangscomponent ligt van W_{n-1} , oftewel alle discontinuiteitskrommen zijn disjunct.

$$\begin{aligned}
B_{n+1} \cap K_n &= \emptyset \\
B_n \cap B_m &= \emptyset \text{ als } n \neq m \\
K_n &\subset K_{n+1}
\end{aligned}$$

Notatie 4.10.

Een samenhangscomponent van

$$K = \bigcup_{n \geq 1} K_n$$

noemen we een tak.

Merk op dat lemma 4.9 impliceert dat elke tak de grafiek is van een stijgende functie. (eigenlijk meer lemma 4.17)

Er geldt dat

Lemma 4.11.

B_n bestaat uit 2^{n-1} takken.

Bewijs.

Elke discontinuïteit van B_n ligt in D , dus heeft elke discontinuïteitskromme - wegens bijectiviteit van R_0^{-1} en R_1^{-1} - twee beelden die wederom in D liggen. Dus bij elke stap $n \rightarrow n+1$ verdubbelt het aantal discontinuïteiten.

□

Lemma 4.12.

K_n bestaat uit $2^n - 1$ takken binnen D

Bewijs.

Wederom door middel van inductie:

$n = 1$: $K_1 = D$ dus 1 tak ($= 2^1 - 1$)

Stel nu dat het geldt voor K_n , dus K_n heeft $2^n - 1$ takken.

K_{n+1} heeft het aantal takken van K_n + het aantal takken van B_{n+1} , dus

K_{n+1} heeft $2^n - 1 + 2^n = 2 \cdot 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$ takken,

waarmee de inductie hypothese is bewezen.

□

Definitie 4.13.

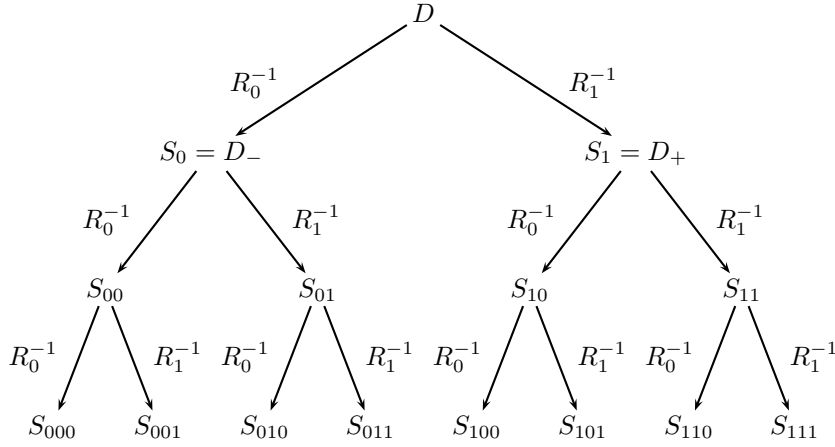
$\Sigma_n = \{0, 1\}^n$ zijn woorden van lengte n bestaande uit de symbolen 0 en 1

Notatie 4.14.

S_{t^n} is een samenhangscomponent van W_n , waarbij de index t^n een woord is op de volgende manier:

$$t^n = \{t_1, t_2, \dots, t_n\} \in \Sigma_n$$

en wel op de volgende wijze:



In formules:

$$S_{t_0} = R_0^{-1}(S_t)$$

$$S_{t_1} = R_1^{-1}(S_t)$$

Bijvoorbeeld:

$$S_{101} = R_1^{-1} \circ R_0^{-1} \circ R_1^{-1}(D)$$

$$S_{100} = R_0^{-1} \circ R_0^{-1} \circ R_1^{-1}(D)$$

Opmerking.

Het woord/de teller (de index) t^n zal later, bij symbolische dynamica, nog weer terugkomen

Hieruit volgt

Lemma 4.15.

W_n bestaat uit 2^n samenhangscomponenten.

Bewijs.

Merk op dat $W_1 = S_0 \cup S_1$, dus het aantal samenhangscomponenten van $W_1 = 2 = 2^1$. Verder geldt dat elk samenhangscomponent $S_{t^n} \subset D$. $R_0^{-1} : D \rightarrow D_-$ en $R_1^{-1} : D \rightarrow D_+$ zijn beiden bi-jectief, dus heeft elke samenhangscomponent een beeld in zowel D_- als in D_+ , oftewel 2 beelden elk weer in D . Dus elke samenhangscomponent van W_n heeft (onder R^{-1}) twee samenhangscomponenten binnen W_{n+1} . \square

We kunnen W_n op de volgende manieren schrijven:

$$\begin{aligned} W_n &= D \setminus K_n \\ W_n &= \bigcup_{t \in \Sigma_n} S_t \end{aligned}$$

Nu geldt, met deze constructie van B_n , K_n , S_{t^n} en W_n het volgende

Lemma 4.16.

Als S een samenhangscomponent is van $W_n = D \setminus K_n$, dan is $R^n : S \mapsto D$ een bi-jectie.

Bewijs.

Dit wordt bewezen d.m.v. inductie. Merk op $R_0 : D_- \rightarrow D$ is een bi-jectie, net als $R_1 : D_+ \rightarrow D$. Neem als inductie hypothese dat $R^n : S \rightarrow D$ een bijectie is, waarbij $S \subset W_n$ een willekeurig samenhangscomponent is. We bewijzen de inductiestap als volgt. Laat $S_{t1} = R_1^{-1}(S_t)$ met $t \in \Sigma_n$ en $R^n : S_t \rightarrow D$ bijectief. Dan geldt dat $S_{t1} \subset D_+$ en

$$\begin{aligned} R^{n+1}(S_{t1}) &= R^n \circ R_1(S_{t1}) \\ &= R^n \circ R_1(R_1^{-1}(S_t)) \\ &= R^n \circ (R_1 \circ R_1^{-1})(S_t) \\ &= R^n(S_t) = D \end{aligned}$$

Voor S_{t0} geldt hetzelfde argument. □

Aangezien W_n bestaat uit 2^n samenhangscomponenten, zou je kunnen zeggen dat $R^n : W_n \mapsto D$ een 2^n -to-one is. (vergelijkbaar met one-to-one)

Nu kan lemma 4.9 min of meer worden herhaald:

Lemma 4.17.

Laat $\beta : (0, 1) \mapsto (0, 1)$ een stijgende functie zijn, met de grafiek $\Gamma_\beta \subset S_t$, voor een S_t een samenhangscomponent $\subset W_n$. Dan is $R_0^n(\Gamma_\beta) \subset D$ ook een grafiek-functie. (geldt ook voor R_1 , R_0^{-1} en R_1^{-1})

Bewijs.

Dit volgt uit lemma 4.9. □

Lemma 4.18.

Een discontinuïteit van R^k is tevens een discontinuïteit op R^l , voor $l > k \in \mathbb{N}$

Bewijs.

Beschouw de rand $\partial D = \overline{D} \setminus D$ van D . Nu wordt van deze rand twee deelverzamelingen genomen:

$$\begin{aligned} J_1 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0, 0 < y \leq 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x < 1, y = 1\} \\ J_2 &:= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 1, 0 \leq y < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1, y = 0\} \end{aligned}$$

Merk op dat

$$J_1 \cap J_2 = \emptyset$$

Laat $(c_0, v_0) \in D$ een discontinuïteit van R^n zijn. Zeg dat $(c_0, v_0) \in \partial S_{t_1} \cap \partial S_{t_2}$

Dan geldt dat

$$\lim_{S_{t_1} \ni (c,v) \rightarrow (c_0, v_0)} R^n(c, v) \in J_2$$

en

$$\lim_{S_{t_2} \ni (c,v) \rightarrow (c_0, v_0)} R^n(c, v) \in J_1$$

Dit is te bewijzen met behulp van volledige inductie:

Neem $S_{t_1} = D_-$, $S_{t_2} = D_+$ en $C = D_0$

Er geldt dan (zie paragraaf 4.2) dat

$$\lim_{S_{t_1} \ni (c,v) \rightarrow (c_0, v_0)} R_0(c, v) \in J_2 ,$$

$$\lim_{S_{t_2} \ni (c,v) \rightarrow (c_0, v_0)} R_1(c, v) \in J_1 ,$$

bovendien geldt (zie wederom paragraaf 4.2) dat

$$\lim_{(c,v) \rightarrow J_1} R_0(c, v) \in J_1$$

en

$$\lim_{(c,v) \rightarrow J_2} R_1(c, v) \in J_2.$$

Beschouw nu R^{n+1}

$$\lim_{S_{t_1} \ni (c,v) \rightarrow (c_0, v_0)} R^{n+1}(c, v) = \lim_{S_{t_1} \ni (c,v) \rightarrow (c_0, v_0)} R \circ R^n(c, v) \in R(J_2) \subset J_2$$

$$\lim_{S_{t_2} \ni (c,v) \rightarrow (c_0, v_0)} R^{n+1}(c, v) = \lim_{S_{t_1} \ni (c,v) \rightarrow (c_0, v_0)} R \circ R^n(c, v) \in R(J_1) \subset J_1$$

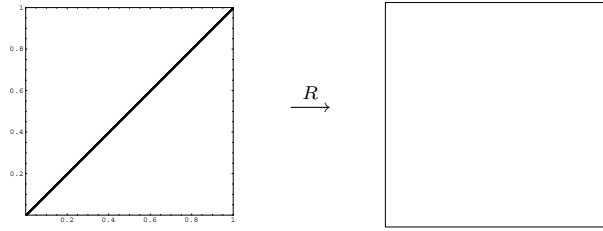
Stel nu $l = n + m$, met n, m en $l \in \mathbb{N}$, $R^l = R^m \circ R^n$, dan aan de ene kant

$$\lim_{S_{t_1} \ni (c,v) \rightarrow (c_0, v_0)} R^l(c, v) = \lim_{S_{t_1} \ni (c,v) \rightarrow (c_0, v_0)} R^m \circ R^n(c, v) \in R^m(J_2) \subset J_2$$

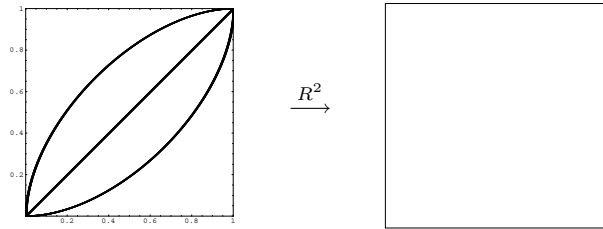
en aan de andere kant

$$\lim_{S_{t_2} \ni (c,v) \rightarrow (c_0, v_0)} R^l(c, v) = \lim_{S_{t_2} \ni (c,v) \rightarrow (c_0, v_0)} R^m \circ R^n(c, v) \in R^m(J_1) \subset J_1$$

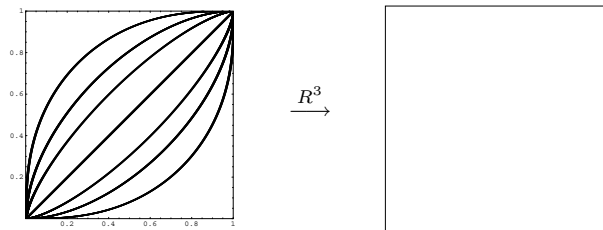
Dus is ook R^l discontinu in C □



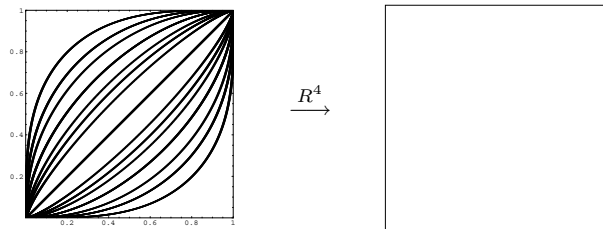
Figuur 4.11: De discontinuïteit van R



Figuur 4.12: De discontinuïteit van R^2



Figuur 4.13: De discontinuïteit van R^3



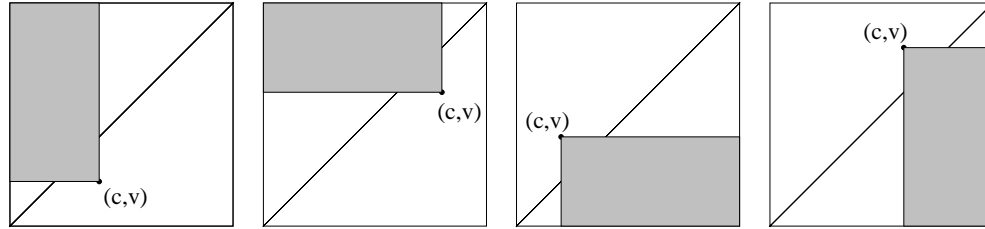
Figuur 4.14: De discontinuïteit van R^4

4.5 Monotoniteit I

Bij de bestudering van de dynamica van de afbeelding $R : D \mapsto D$ is het interessant (en voor een later doel ook heel erg nuttig) om te kijken waar het beeld $R(c, v)$ is gepositioneerd ten opzichte van het origineel (c, v) .

Notatie 4.19. Het gebied $M_{c,v} \subset D$ wordt volledig gedefinieerd door het punt (c, v) , en wel op de volgende wijze (zie ook onderstaand figuur):

- Als $(c, v) \in D_-$ dan $M_{c,v} := (c, 1) \times (0, v)$
- Als $(c, v) \in D_+$ dan $M_{c,v} := (0, c) \times (v, 1)$



Figuur 4.15: $M_{c,v}$

Lemma 4.20.

Er is sprake van 1-richtingsverkeer, oftewel monotoniteit. $\forall (c, v) \in D \setminus D_0$ geldt dat $R(c, v) \in M_{c,v}$

Bewijs.

- $0 < c < v < 1$:
 - ◇ $v < 1 \Rightarrow cv < c \Rightarrow c < \frac{c}{v}$
 - ◇ $cv < c \Rightarrow v - c < v - cv \Rightarrow \frac{v-c}{1-c} < v$

Dus $R(c, v) \in M_{c,v}$.

- $0 < c < v < 1$:
 - ◇ $cv < v \Rightarrow c - v < c - cv \Rightarrow \frac{c-v}{1-v} < c$
 - ◇ $c < 1 \Rightarrow cv < v \Rightarrow v < \frac{v}{c}$

Dus $R(c, v) \in M_{c,v}$.

□

Waar dit op neerkomt, is het feit dat er sprake is van een soort 1-richtingsverkeer, totdat de diagonaal wordt 'overgestoken'.

Hoofdstuk 5

Dynamica van de renormalisatieoperator

In dit hoofdstuk zal worden aangetoond dat het systeem $R : D \setminus D_0 \mapsto D$ gedefinieerd door

$$R(c, v) = \begin{cases} R_0(c, v) := \left(\frac{c}{v}, \frac{v-c}{1-c} \right) & \text{als } 0 < c < v < 1 \\ R_1(c, v) := \left(\frac{c-v}{1-v}, \frac{v}{c} \right) & \text{als } 0 < v < c < 1 \end{cases}$$

een attractor heeft, en zal de structuur van deze attractor besproken worden.

5.1 D opnieuw gedefinieerd

Eerder werd de parameter ruimte $D = (0, 1)^2$ al onderverdeeld in D_- , D_0 en D_+ , waarbij

- $D_- := \{(c, v) \in D \mid 0 < c < v < 1\}$
- $D_0 := \{(c, v) \in D \mid 0 < v = c < 1\}$
- $D_+ := \{(c, v) \in D \mid 0 < v < c < 1\}$

Om de dynamica van R te bestuderen verdelen we D opnieuw in drie deelverzamelingen, A_- , A en A_+ , waarbij

- $A_- := \{(c, v) \in D \mid c + v < 1\}$
- $A := \{(c, v) \in D \mid c + v = 1\}$
- $A_+ := \{(c, v) \in D \mid c + v > 1\}$

Nu geldt dat $D = A_- \cup A \cup A_+$

5.2 Invariant

Lemma 5.1. *Zowel A_- als A als A_+ zijn invariant onder R*

Oftewel:

- $R(A_-) \subset A_-$. Oftewel: als $(c, v) \in A_-$, dan geldt dat ook $R(c, v) \in A_-$
- $R(A) \subset A$. Oftewel: als $(c, v) \in A$, dan geldt dat ook $R(c, v) \in A$
- $R(A_+) \subset A_+$. Oftewel: als $(c, v) \in A_+$, dan geldt dat ook $R(c, v) \in A_+$,

Bewijs.

Beschouw eerst $(c, v) \in D_-$ (het bewijs voor $(c, v) \in D_+$ is nagenoeg identiek)

$$0 < c < v < 1 \Rightarrow v - c > 0$$

Dan:

$$\begin{array}{llll} c + v & \textcircled{S} & 1 & \Rightarrow \\ c + v - 1 & \textcircled{S} & 0 & \Rightarrow \\ (v - c)(c + v - 1) & \textcircled{S} & 0 & \Rightarrow \\ vc + v^2 - v - c^2 - vc + c & \textcircled{S} & 0 & \Rightarrow \\ c - c^2 + v^2 - vc & \textcircled{S} & v - vc & \Rightarrow \\ \frac{c(1-c)+v(v-c)}{v(1-c)} & \textcircled{S} & 1 & \Rightarrow \\ \frac{c}{v} + \frac{v-c}{1-c} & \textcircled{S} & 1 & \Rightarrow \end{array}$$

Dit bewijs is toepasbaar voor \textcircled{S} respectievelijk $<, =, >$

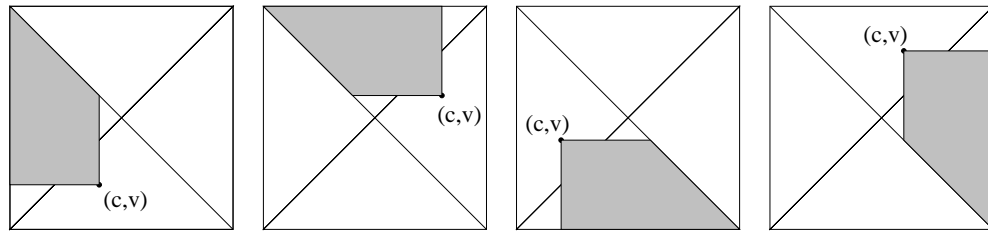
□

5.3 Monotonieit II

Eerder (zie paragraaf (4.5)) was al aangetoond dat $R(c, v) \in M_{c,v}$. Nu de invariantie is bewezen, blijkt dat we nieuwe, scherpere eisen kunnen stellen aan het gebied waar $R(c, v)$ terecht komt (gegeven (c, v))

$$N_{c,v} = \begin{cases} M_{c,v} \cap A_- & \text{als } (c, v) \in A_- \\ M_{c,v} \cap A_+ & \text{als } (c, v) \in A_+ \end{cases}$$

Zie ter verduidelijking de volgende plaatjes



Figuur 5.1: Verscherpte monotonieit

Er geldt namelijk, wegens lemma 4.20 en 5.1 dat

Lemma 5.2.

$\forall (c, v) \in D \setminus D_0$ geldt $R(c, v) \subset N_{c,v}$

5.4 Contractie

Notatie 5.3. De afstand van het punt (c, v) tot (de anti-diagonaal) A wordt genoteerd met $d_A(c, v)$

Deze (euclidische) afstand is eenvoudig te berekenen:

$$d_A(c, v) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{(c+v-1)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} |c+v-1|.$$

Stelling 5.4.

Het beeld $R(c, v)$ ligt dichter bij (de anti-diagonaal) A dan het origineel (c, v) , oftewel $d_A(R(c, v)) < d_A(c, v)$

Voor het bewijs maken we gebruik van een aantal lemma's:

Lemma 5.5.

Als $(c, v) \in D_-$ dan geldt dat $0 < \frac{v-c}{v(1-c)} < 1$

Als $(c, v) \in D_+$ dan geldt dat $0 < \frac{c-v}{c(1-v)} < 1$

Bewijs.

Beschouw $(c, v) \in D_-$ (bewijs voor $(c, v) \in D_+$ is nagenoeg gelijk)
(merk op, $0 < c < v < 1$)

$$\left. \begin{array}{l} c < 1 \Rightarrow vc < c \Rightarrow 0 < v - vc \\ c < v \Rightarrow 0 < v - c \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < \frac{v-c}{v(1-c)}$$

$$v < 1 \Rightarrow vc < c \Rightarrow v - c < v - vc \Rightarrow \frac{v-c}{v(1-c)} < 1$$

□

Dus

Lemma 5.6.

Als $(c, v) \in D_-$ dan geldt dat $\sqrt{\left(\frac{v-c}{v(1-c)}\right)^2} = \frac{v-c}{v(1-c)}$

Als $(c, v) \in D_+$ dan geldt dat $\sqrt{\left(\frac{c-v}{c(1-v)}\right)^2} = \frac{c-v}{c(1-v)}$

Nu is stelling 5.4 te bewijzen

Bewijs.

Merk op

$$(c, v) \in D_- \Rightarrow R(c, v) = \left(\frac{c}{v}, \frac{v-c}{1-c} \right)$$

Als geldt dat $d_A(c, v) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{(c+v-1)^2}$, dan geldt voor $(c, v) \in D_-$

$$\begin{aligned} d_A(R(c, v)) &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{c}{v} + \frac{v-c}{1-c} - 1\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{c(1-c) + v(v-c)}{v(1-c)} - 1\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{c-c^2 + v^2 - vc}{v(1-c)} - \frac{v-vc}{v(1-c)}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{(v^2 - c^2) - (v-c)}{v(1-c)}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{((v-c)(v+c)) - (v-c)}{v(1-c)}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{\left(\frac{(v-c)(v+c-1)}{v(1-c)}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{(c+v-1)^2}\sqrt{\left(\frac{v-c}{v(1-c)}\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{v-c}{v(1-c)}\right)^2} \cdot d_A(c, v) \end{aligned}$$

Voor $(c, v) \in D_+$ geldt op vergelijkbare manier dat:

$$d_A(R(c, v)) = \sqrt{\left(\frac{c-v}{c(1-v)}\right)^2} \cdot d_A(c, v)$$

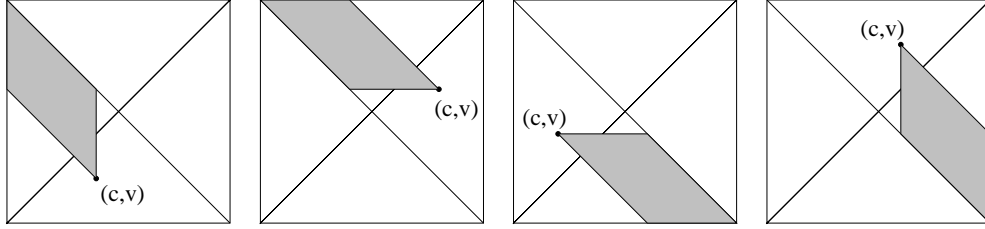
Nu volgt uit lemma 5.6 dat:

$$d_A(R(c, v)) = \begin{cases} \frac{v-c}{v(1-c)} \cdot d_A(c, v) & \text{als } (c, v) \in D_- \\ \frac{c-v}{c(1-v)} \cdot d_A(c, v) & \text{als } (c, v) \in D_+ \end{cases}$$

Nu is lemma 5.5 toepasbaar, dus $d_A(R(c, v)) < d_A(c, v)$, waarmee de stelling is bewezen \square

5.5 Monotoniteit III

Na de invariantie, is nu bewezen dat $R(c, v)$ op maximaal dezelfde afstand van A ligt als het punt (c, v) zelf. Dit levert nog scherpere gebied waar $R(c, v)$ ligt, gegeven (c, v)



Figuur 5.2: Nog scherpere monotoniteit

5.6 Isocontractoren

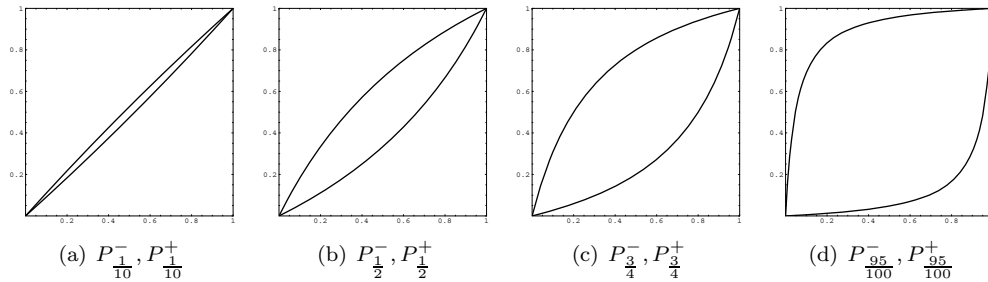
Nu is het wel interessant om te kijken waar de contractie minimaal is, en waar deze maximaal is. Beschouw hiervoor de contractiefactoren $\frac{v-c}{v(1-c)}$ en $\frac{c-v}{c(1-v)}$. Kies $p \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$, en kijk naar alle punten waar deze contractiefactor gelijk aan p is.

$$\frac{v-c}{v(1-c)} = p \Rightarrow P_p^- : v(c) = \frac{c}{1 + p(c-1)}$$

$$\frac{c-v}{c(1-v)} = p \Rightarrow P_p^+ : v(c) = \frac{c(1-p)}{1 - cp}$$

Alle punten op deze krommen hebben dezelfde contractie-factor. Deze krommen zijn als het ware isocontractoren (vergelijkbaar met isobaren en/of isothermen)

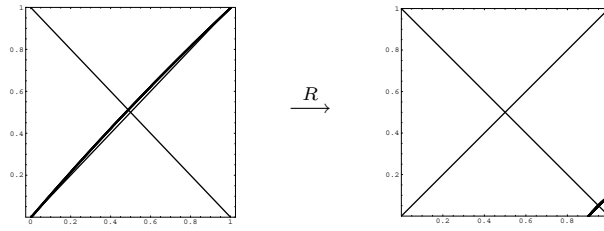
De isocontractoren zien er als volgt uit.



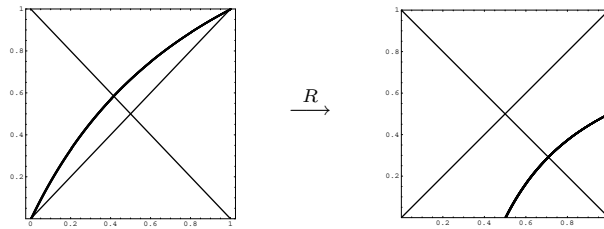
Figuur 5.3: De isocontractoren, met respectievelijke waarden $\frac{1}{10}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{95}{100}$

Merk op dat P_p^+ en P_p^- symmetrisch zijn t.o.v. de diagonaal (D_0).

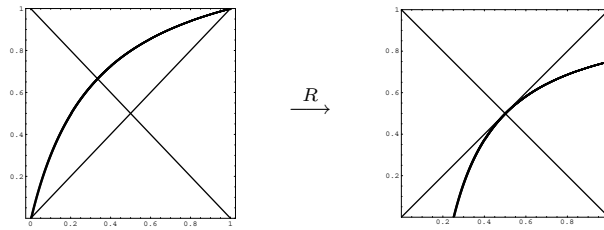
Het is interessant om te kijken hoe deze isocontractoren (onder R) worden afgebeeld: (in de plaatjes is tevens de diagonaal $v = c$ en A weergegeven)



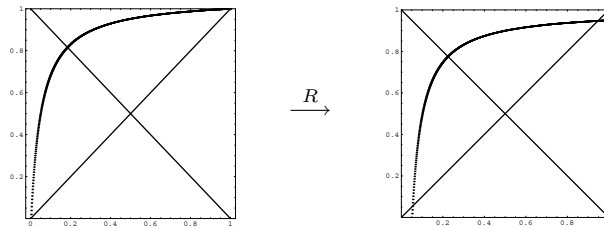
Figuur 5.4: De isocontractor $P_{\frac{1}{10}}^-$ en het beeld



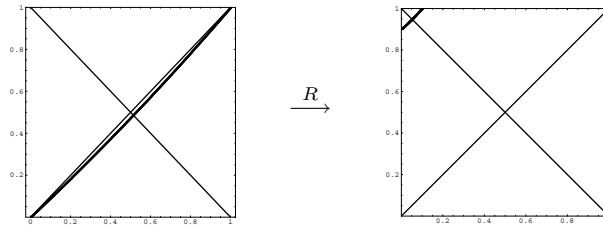
Figuur 5.5: De isocontractor $P_{\frac{1}{2}}^-$ en het beeld



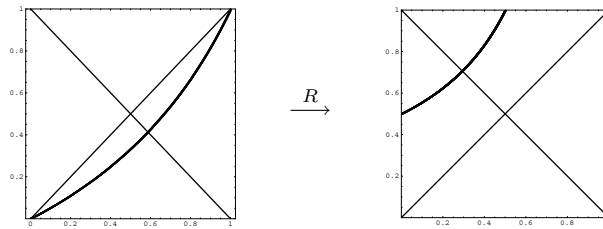
Figuur 5.6: De isocontractor $P_{\frac{3}{4}}^-$ en het beeld



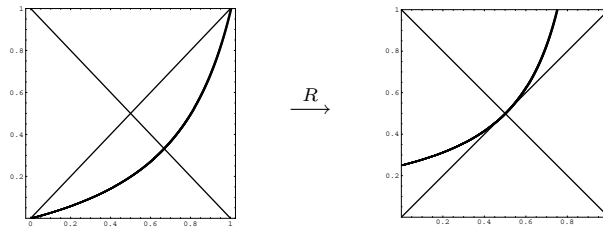
Figuur 5.7: De isocontractor $P_{\frac{95}{100}}^-$ en het beeld



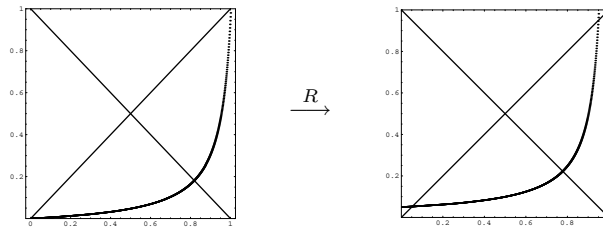
Figuur 5.8: De isocontractor $P_{\frac{1}{10}}^+$ en het beeld



Figuur 5.9: De isocontractor $P_{\frac{1}{2}}^+$ en het beeld



Figuur 5.10: De isocontractor $P_{\frac{3}{4}}^+$ en het beeld



Figuur 5.11: De isocontractor $P_{\frac{95}{100}}^+$ en het beeld

Neem nu W_n , zoals die in paragraaf 4.4 geconstrueerd is. Dan geldt het volgende:

Lemma 5.7.

Laat

$$(c, v) \in \bigcap_{n \geq 1} W_n \text{ en } a = \lim_{n \rightarrow \infty} R^{k_n}(c, v) \text{ voor } (c, v) \in W_n \quad \forall n$$

Dan geldt dat $a \in A$

Bewijs.

Uit het ongerijmde: Stel $a \notin A$, dus $d_A(a) > 0$. Uit de monotonieit blijkt dat $d_A(R^n(c, v))$ strikt dalend is. Er geldt volgens stelling 5.4 dat $d_A(R(a)) < d_A(a)$. Dit leidt tot de volgende tegenspraak.

$$d_A(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} d_A(R^{k_{n+1}}(c, v)) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} d_A(R^{k_n+1}(c, v)) = d_A(R(a)) < d_A(a)$$

waaruit zou volgen dat er geen convergentie optreedt

□

5.7 De attractor

De limietverzameling van $f \in D$ is

$$A_f = \left\{ (c, v) \mid \exists k_n \rightarrow \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} R^{k_n} f = (c, v) \right\}$$

Definitie 5.8.

De verzameling \mathcal{A} is een attractor van R als geldt voor (bijna) alle $f \in D$ dat

$$A_f \subset \mathcal{A}$$

en er is geen kleinere deelverzameling met dezelfde eigenschap.

zie ook:

John Milnor (1985). "On the concept of attractor". Communications of Mathematical Physics 99: 177-195.

Stelling 5.9. *A is de attractor van de renormalisatie operator R*

Bewijs.

Uit lemma 5.7 blijkt al dat geldt dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R^n f \in A$$

In het volgende hoofdstuk zal worden aangetoond dat de periodieke punten van R dicht liggen in A en dat er derhalve geen kleinere deelverzameling van \mathcal{A} is. Zie hiervoor propositie 6.20

□

Hoofdstuk 6

Dynamica op de attractor

In dit hoofdstuk beschouwen we voornamelijk gedrag van punten op de attractor A , de anti-diagonaal A . Eerder is in lemma 5.1 aangetoond dat als $(c, v) \in A$, dan ook $R(c, v) \in A$.

Merk op dat als $(c, v) \in A$, dan kan ons systeem

$$R(c, v) = \begin{cases} \left(\frac{c}{v}, \frac{v-c}{1-c} \right) & \text{als } (c, v) \in D_- \\ \left(\frac{c-v}{1-v}, \frac{v}{c} \right) & \text{als } (c, v) \in D_+ \end{cases}$$

als volgt worden geschreven:

$$R(c, 1-c) = \begin{cases} \left(\frac{c}{1-c}, \frac{1-2c}{1-c} \right) & \text{als } c \in (0, \frac{1}{2}) \\ \left(\frac{2c-1}{c}, \frac{1-c}{c} \right) & \text{als } c \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

Omdat het tweede argument vastligt, is het geheel vereenvoudigbaar tot

$$r(c) = \begin{cases} r_0(c) = \frac{c}{1-c} & \text{als } c \in (0, \frac{1}{2}) \\ r_1(c) = \frac{2c-1}{c} & \text{als } c \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \quad (6.1)$$

Lemma 6.1.

De inverse functie's van r_0 en r_1 bestaan ook:

$$\begin{aligned} r_0^{-1}(c) &= \frac{c}{1+c} \\ r_1^{-1}(c) &= \frac{1}{2-c} \end{aligned} \quad (6.2)$$

Bewijs.

Het is eenvoudig te controleren dat

$$\begin{aligned} r_0 \circ r_0^{-1}(c) &= r_0^{-1} \circ r_0(c) = id. \\ r_1 \circ r_1^{-1}(c) &= r_1^{-1} \circ r_1(c) = id. \end{aligned}$$

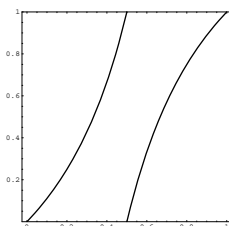
□

Dus zijn $r_0 : (0, \frac{1}{2}) \rightarrow (0, 1)$ en $r_1 : (\frac{1}{2}, 1) \rightarrow (0, 1)$ zowel injectief als surjectief (dus bijectief)

6.1 Periodieke- en dekpunten

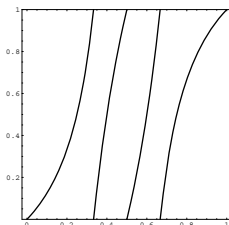
Het punt q is een periodiek punt van periode $n \in \mathbb{N}$ als geldt $r^n(q) = q$, en $r^i(q) \neq q \quad \forall i < n$

De grafiek van de functie r ziet er als volgt uit:



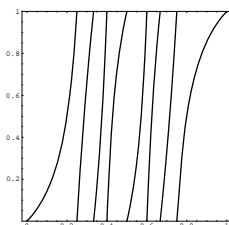
Figuur 6.1: grafiek van r

Hierbij is de eerste tak de grafiek van r_0 , de tweede tak is de grafiek van r_1 . De grafiek van r^2



Figuur 6.2: grafiek van r^2

Hier is de eerste tak de grafiek van $r_0 \circ r_0$, de tweede tak de grafiek van $r_1 \circ r_0$, de derde tak is de grafiek van $r_0 \circ r_1$ en de laatste tak is de grafiek van $r_1 \circ r_1$.



Figuur 6.3: grafiek van r^3

Net als lemma 4.15 kunnen we zien dat

Lemma 6.2.

r^n bestaat uit 2^n takken.

Lemma 6.3.

De eerste tak van $r^n(c) = r_0^n(c) = \frac{c}{1-n \cdot c}$
 De laatste tak van $r^n(c) = r_1^n(c) = \frac{(n+1) \cdot c - n}{k \cdot c - (n-1)}$

Bewijs.

Door middel van volledig inductie:

check voor $r_0(c)$ en $r_1(c)$

$$r_0^{n+1}(c) = r_0 \circ r_0^n(c) = \frac{\frac{c}{1-n \cdot c}}{1 - \frac{c}{1-n \cdot c}} = \frac{c}{1 - (n+1) \cdot c}$$

$$r_1^{n+1}(c) = r_1 \circ r_1^n(c) = \frac{2 \cdot \frac{(n+1) \cdot c - n}{n \cdot c - (n-1)} - 1}{\frac{(n+1) \cdot c - n}{n \cdot c - (n-1)}} = \frac{2(n+1) \cdot c - 2n - nc + n - 1}{(n+1) \cdot c - n} = \frac{(n+2) \cdot c - (n+1)}{(n+1) \cdot c - n} \quad \square$$

Lemma 6.4.

Het domein van (de eerste tak) r_0^n is $(0, \frac{1}{1+n})$
 Het domein van (de laatste tak) r_1^n is $(\frac{n}{1+n}, 1)$

Bewijs.

Voor de eerste tak:

$$\lim_{c \downarrow 0} r_0^n(c) = 0$$

$$\lim_{c \uparrow \frac{1}{1+n}} r_0^n(c) = 1$$

Voor de laatste tak:

$$\lim_{c \downarrow \frac{n}{1+n}} r_1^n(c) = 0$$

$$\lim_{c \uparrow 1} r_1^n(c) = 1$$

Bovendien zijn de 'takken' strikt stijgend, want

$$\frac{d}{dc} r_0(c) = \frac{1}{(c-1)^2} > 1 > 0 \tag{6.3}$$

$$\frac{d}{dc} r_1(c) = \frac{1}{c^2} > 1 > 0$$

Dus geldt vanwege de kettingregel dat elke

$$\frac{d}{dc} r^n(c) > 1 > 0 \tag{6.4}$$

□

Lemma 6.5.

De eerste tak ligt volledig boven de diagonaal, de laatste tak ligt volledig onder diagonaal, oftewel

$$r_0^n(c) > c \quad \forall c \in \left(0, \frac{1}{1+n}\right)$$

$$r_1^n(c) < c \quad \forall c \in \left(\frac{n}{1+n}, 1\right)$$

Bewijs.

Voor de eerste tak:

$$\begin{aligned}0 < c < \frac{1}{1+n} < \frac{1}{n} &\Rightarrow \\0 < nc < 1 &\Rightarrow \\-1 < -nc < 0 &\Rightarrow \\0 < 1 - nc < 1 &\Rightarrow \\\frac{1}{1-nc} > 1 &\Rightarrow \\\frac{1}{1-nc} - 1 > 0 &\Rightarrow \\c \left(\frac{1}{1-nc} - 1 \right) > 0 &\Rightarrow \\\frac{c}{1-nc} - c > 0 &\Rightarrow \\\frac{c}{1-nc} > c &\Rightarrow \\r_0^n(c) > c \quad \forall c \in \left(0, \frac{1}{1+n} \right)\end{aligned}$$

Voor de laatste tak:

$$\begin{aligned}n(c-1)^2 > 0 &\Rightarrow \\nc^2 - 2nc + n > 0 &\Rightarrow \\nc^2 - nc + c > nc + c - n &\Rightarrow \\c(nc - (n-1)) > (n+1)c - n &\Rightarrow \\c > \frac{(n+1)c - n}{nc - (n-1)} &\Rightarrow \\c > r_1^n(c) \quad \forall c \in \left(\frac{n}{1+n}, 1 \right)\end{aligned}$$

□

Lemma 6.6.

r^n heeft precies $2^n - 2$ dekpunten van periode ten hoogste n . (hierbij worden $c = 0$ en $c = 1$ niet meegerekend)

Bewijs.

Eerder is al duidelijk geworden dat r^n uit 2^n takken bestaat. De eerste tak en de laatste tak hebben geen snijpunt met de diagonaal, want $r_0^n(c) > c$ en $r_1^n(c) < c$ en hebben dus geen snijpunt met de diagonaal. De overige takken hebben allen precies 1 snijpunt met de diagonaal (want helling $r^n > 1$), dus ligt er op elke tak een dekpunt van periode ten hoogste n . Het kan echter voorkomen dat sommige dekpunten een lagere periode hebben. Dit heeft te maken met de priemfactoren van k . Bijvoorbeeld treedt een periode-5 punt ook op als dekpunt van r^{10} . □

6.2 Discontinuïteiten

Zoals R niet gedefinieerd is op D_0 , is r niet gedefinieerd op $c = \frac{1}{2}$. We gaan hier nu op zoek naar de $w_n \subset (0, 1)$ waar $r^n : w_n \rightarrow (0, 1)$ goed gedefinieerd is. Hiervoor moeten we de discontinuïteiten k_n vinden, de punten waarop r^n discontinu is. w_n is dan het complement van k_n

Voor het vinden van de discontinuïteiten, maken we gebruik van de eerder toegepaste constructie. De afbeelding $r : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ is niet gedefinieerd op $c = \frac{1}{2}$. Omdat zowel r_0 als r_1 bi-jectief zijn, bestaan er punten $c \in (0, \frac{1}{2})$ en $c \in (\frac{1}{2}, 1)$ die worden afgebeeld op $\frac{1}{2}$. Zo worden de volgende verzamelingen geconstrueerd:

$$\begin{aligned} b_0 &:= \emptyset \\ b_1 &:= \left\{ \frac{1}{2} \right\} \\ b_2 &:= \left\{ c \in (0, 1) \mid r(c) = \frac{1}{2} \right\} = r_0^{-1}(b_1) \cup r_1^{-1}(b_1) \\ b_3 &:= \left\{ c \in (0, 1) \mid r^2(c) = \frac{1}{2} \right\} = r_0^{-1}(b_2) \cup r_1^{-1}(b_2) \\ &\vdots \\ b_n &:= \left\{ c \in (0, 1) \mid r^n(c) = \frac{1}{2} \right\} = r_0^{-1}(b_{n-1}) \cup r_1^{-1}(b_{n-1}) \end{aligned}$$

Hier hebben we:

$$\begin{aligned} b_2 &:= r_0^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \cup r_1^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\} \\ b_3 &:= r_0^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \cup r_0^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \cup r_1^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \cup r_1^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4} \right\} \end{aligned}$$

Lemma 6.7.

b_n bestaat uit 2^{n-1} punten.

Bewijs.

Elk discontinuïteitspunt van b_n ligt in $(0, 1)$, dus heeft elk discontinuïteitspunt -wegens bijectiviteit van r_0^{-1} en r_1^{-1} - twee beelden die wederom in $(0, 1)$ liggen. Bij elke stap $n \rightarrow n+1$ verdubbelt het aantal discontinuïteiten, oftewel $\#b_n = 2 \cdot \#b_{n-1}$, waarbij $\#b_1 = 1$ \square

Lemma 6.8.

Een discontinuïteit van r^n is tevens een discontinuïteit op r^l , voor $l > n \in \mathbb{N}$

Bewijs.

Als c een discontinuïteit is van r^n , dan geldt

$$\lim_{x \uparrow c} r^n(x) = 1,$$

$$\lim_{x \downarrow c} r^n(x) = 0.$$

Dit is eenvoudig aan te tonen mbv inductie:

$$\lim_{x \uparrow \frac{1}{2}} r_0(x) = 1$$

$$\lim_{x \downarrow \frac{1}{2}} r_1(x) = 0$$

Beschouw nu r^{n+1}

$$\lim_{x \downarrow c} r^{n+1}(x) = \lim_{x \downarrow c} r \circ r^n(x) = \lim_{y \downarrow 0} r(y) = 0$$

$$\lim_{x \uparrow c} r^{n+1}(x) = \lim_{x \uparrow c} r \circ r^n(x) = \lim_{y \uparrow 1} r(y) = 1$$

Bovendien geldt dat

$$\lim_{x \downarrow 0} r^m(x) = 0 \quad \text{en} \quad \lim_{x \uparrow 1} r^m(x) = 1 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Stel nu $l = n + m$, met n, m en $l \in \mathbb{N}$, $r^l = r^m \circ r^n$.
Dan, aan de ene kant

$$\lim_{x \uparrow c} r^l(x) = \lim_{x \uparrow c} r^m \circ r^n(x) = 0,$$

en aan de andere kant

$$\lim_{x \downarrow c} r^l(x) = \lim_{x \downarrow c} r^m \circ r^n(x) = 1.$$

Dus is ook r^l discontinu in c

□

Dus hebben we de totale discontinuïteit k_n nodig:

$$k_0 := \{0, 1\}$$

$$k_1 := k_0 \cup b_1$$

$$k_2 := k_1 \cup b_2$$

$$k_3 := k_2 \cup b_3$$

⋮

$$k_n := k_{n-1} \cup b_n$$

We hebben hier:

$$k_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$k_2 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$k_3 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}$$

Lemma 6.9.

k_n bestaat uit $2^n + 1$ punten.

Bewijs.

k_1 bestaat uit 3 punten, nl. $k_1 = \{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Verder geldt dat $\#k_n = \#k_{n-1} + \#b_n = 2^{n-1} + 1 + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} + 1 = 2^n + 1$ \square

De takken van r^n lopen tussen 2 opeenvolgende punten van k_n , bijvoorbeeld de takken van r^3 lopen respectievelijk van $(\frac{0}{1}, \frac{1}{4}), (\frac{1}{4}, \frac{1}{3}), (\frac{1}{3}, \frac{2}{5}), (\frac{2}{5}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{3}{5}), (\frac{3}{5}, \frac{2}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{3}{4}), (\frac{3}{4}, \frac{1}{1})$

De intervallen tussen 2 opeenvolgende punten vormen samen de w_n . $w_n = (0, 1) \setminus k_n$. Bijvoorbeeld:

$$w_0 = (0, 1)$$

$$w_1 = \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

$$w_2 = \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right)$$

Notatie 6.10.

s_{t^n} is een samenhangscomponent van w_n waarbij de index $t^n = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ wederom een woord is zoals eerder is gedefinieerd.

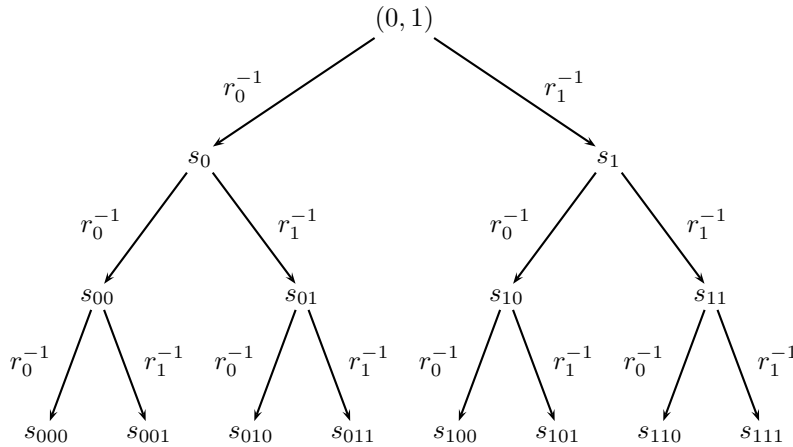
Lemma 6.11.

w_n bestaat uit 2^n samenhangscomponenten.

Bewijs.

Elk samenhangscomponent s_t ligt tussen twee opeenvolgende punten van k_n . Aangezien er $2^n + 1$ punten $\in k_n$ liggen, zijn er $2^n + 1 - 1 = 2^n$ samenhangscomponenten. \square

Voor de verduidelijking is hier ook een boomdiagram geplaatst.



In formules:

$$s_{t_0} = r_0^{-1}(s_t)$$

$$s_{t_1} = r_1^{-1}(s_t)$$

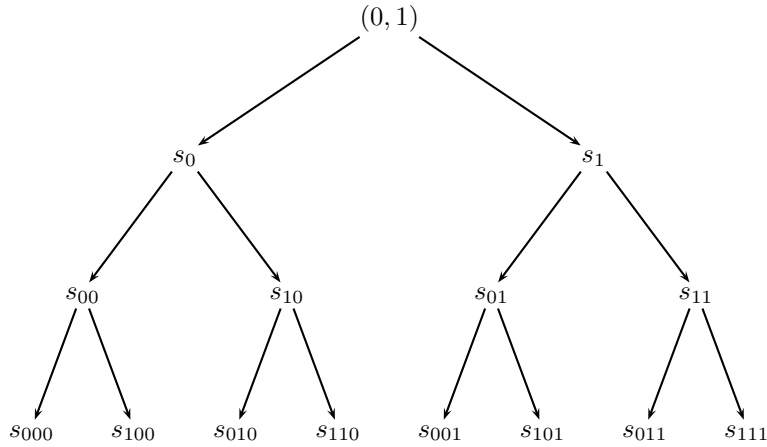
Bijvoorbeeld:

$$s_{101} = r_1^{-1} \circ r_0^{-1} \circ r_1^{-1}((0, 1))$$

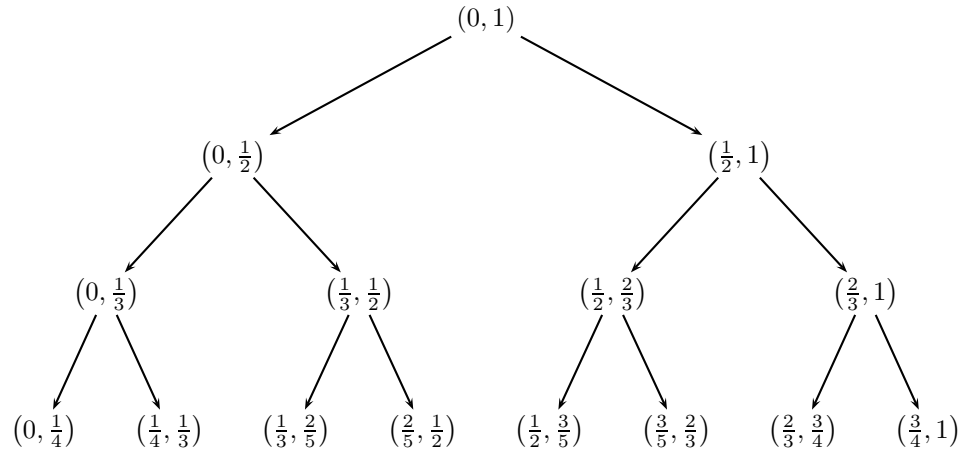
$$s_{100} = r_0^{-1} \circ r_0^{-1} \circ r_1^{-1}((0, 1))$$

Opmerking.

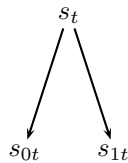
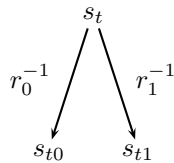
De lexicografische ordening, zoals de boom illustreert, komt niet overeen met de ordening op het interval $(0, 1)$. De ordening op het interval ziet er als volgt uit:



Numeriek zien de intervallen er als volgt uit. (van boven naar beneden kun je respectievelijk w_0, w_1, w_2 en w_3 lezen)



In de onderstaande twee figuren zie je het verschil in de ordening: de linkerboom geeft de lexicografische ordening aan, de rechterboom geeft weer hoe de ordening op het interval tot stand komt



Opmerking.

Beschouw t (bijvoorbeeld $t = 011$)

- Als men t leest van rechts naar links, ziet men als het ware de vooruit-baan.
($(0, 1) = r_0 \circ r_1 \circ r_1(s_{011})$)
- Als men t leest van links naar rechts, ziet men de plaats op het interval.
(011 ligt 'rechts van links van links')

Bovendien zit er in beide ordening een stap van (binair) 1, waarbij 1

- bij de lexicografische ordening wordt geschreven als $0\dots 01$ (binair 011 komt overeen met 3)
- bij de ordening op het interval wordt geschreven als $10\dots 0$ (binair 011 komt overeen met 6)

Het is inmiddels duidelijk hoe de lexicografische ordening ontstaat, namelijk door r_0 of respectievelijk r_1 toe te passen op het interval s_t . Voor de ordening op het interval kan gebruik worden gemaakt van zogenaamde Farey-buren.

6.3 Goede burenen? Farey burenen!!!

Definitie 6.12.

De punten $\frac{a_1}{b_1}$ en $\frac{a_2}{b_2}$ zijn Farey burenen als geldt dat

$$b_1 \cdot a_2 - a_2 \cdot b_1 = 1$$

Lemma 6.13.

Gegeven de Farey burenen $\left\{ \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \right\}$ bestaat er precies 1 punt $\frac{u}{w} \in \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} \right)$ waarvoor geldt dat zowel $\left\{ \frac{a_1}{b_1}, \frac{u}{w} \right\}$ als $\left\{ \frac{u}{w}, \frac{a_2}{b_2} \right\}$ wederom Farey-burenen zijn. Dit punt $\frac{u}{w}$ wordt het tussenpunt genoemd, en er geldt dat

$$\frac{u}{w} = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}$$

Bewijs.

$\frac{a_1}{b_1}$ en $\frac{a_2}{b_2}$ zijn Farey burenen, dus geldt dat

$$b_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2 = 1$$

Als het paar $\frac{a_1}{b_1}$ en $\frac{u}{w}$ Farey burenen zijn moet gelden dat:

$$b_1 \cdot u - a_1 \cdot w = 1$$

Als het paar $\frac{u}{w}$ en $\frac{a_2}{b_2}$ Farey burenen zijn moet gelden dat:

$$w \cdot a_1 - b_2 \cdot u = 1$$

Dit is in matrixform te schrijven:

$$\begin{pmatrix} b_1 & -a_1 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oftewel:

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & -a_1 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De inverse is eenvoudig te berekenen:

$$\begin{pmatrix} b_1 & -a_1 \\ -b_2 & a_2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a_2 b_1 - a_1 b_2} \begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix}$$

Dus is de oplossing

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}$$

Dus:

$$\frac{u}{w} = \frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2} = \frac{\text{som van de tellers}}{\text{som van de noemers}}$$

□

Voor de volledigheid:

Als $\frac{a}{b} < \frac{u}{w}$, dan geldt $\frac{a}{b} < \frac{a+u}{b+w} < \frac{u}{w}$, want

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} < \frac{u}{w} &\Rightarrow \\ aw < ub &\Rightarrow \\ ab + aw < ab + ub &\Rightarrow \\ a(b+w) < b(a+u) &\Rightarrow \\ \frac{a}{b} < \frac{a+u}{b+w} \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} aw < ub &\Rightarrow \\ uw + aw < uw + ub &\Rightarrow \\ w(a+u) < u(b+w) &\Rightarrow \\ \frac{a+u}{b+w} < \frac{u}{w} \end{aligned}$$

Voor het volgende lemma worden de functies 6.1 en 6.2 geschreven voor de breukvorm:

$$\begin{aligned} r_0 \left(\frac{a}{b} \right) &= \frac{a}{b-a} \\ r_1 \left(\frac{a}{b} \right) &= \frac{2a-b}{a} \\ r_0^{-1} \left(\frac{a}{b} \right) &= \frac{a}{a+b} \\ r_1^{-1} \left(\frac{a}{b} \right) &= \frac{b}{2b-a} \end{aligned}$$

Lemma 6.14.

Als $\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right\}$ Farey-buren zijn, met $\frac{u}{w} = \frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}$ als tussenpunt, dan

- $\left\{r_0^{-1}\left(\frac{a_1}{b_1}\right), r_0^{-1}\left(\frac{a_2}{b_2}\right)\right\}$ zijn Farey buren, met $r_0^{-1}\left(\frac{u}{w}\right)$ weer als tussenpunt
- $\left\{r_1^{-1}\left(\frac{a_1}{b_1}\right), r_1^{-1}\left(\frac{a_2}{b_2}\right)\right\}$ zijn Farey buren, met $r_1^{-1}\left(\frac{u}{w}\right)$ weer als tussenpunt

Bewijs.

Het bewijs wordt gegeven voor r_0^{-1} . Voor r_1^{-1} is het bewijs vergelijkbaar.

$\left\{\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}\right\}$ zijn Farey buren, dus geldt dat $a_2b_1 - a_1b_2 = 1$

Bewijs voor r_0^{-1}

$$\begin{aligned} r_0^{-1}\left(\frac{a_1}{b_1}\right) &= \frac{a_1}{a_1 + b_1} \\ r_0^{-1}\left(\frac{a_2}{b_2}\right) &= \frac{a_2}{a_2 + b_2} \\ r_0^{-1}\left(\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}\right) &= \frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2} \end{aligned}$$

Nu geldt:

$$(a_1 + b_1) \cdot a_2 - (a_2 + b_2) \cdot a_1 = a_1a_2 + a_2b_1 - a_1a_2 - a_1b_2 = a_2b_1 - a_1b_2 = 1$$

Dus zijn $r_0^{-1}\left(\frac{a_1}{b_1}\right)$ en $r_0^{-1}\left(\frac{a_2}{b_2}\right)$ Farey buren.

Het tussenpunt is

$$\frac{a_1 + a_2}{a_1 + a_2 + b_1 + b_2} = \frac{\text{som der tellers}}{\text{som der noemers}} = r_0^{-1}\left(\frac{a_1 + a_2}{b_1 + b_2}\right)$$

□

$0 = \frac{0}{1}$ en $1 = \frac{1}{1}$ zijn Farey buren, bovendien wordt elk s_t -interval begrensd door Farey buren. Dan is op het interval s_t het Farey tussenpunt de volgende discontinuïteit, en wordt s_t opgesplitst in s_{0t} en s_{1t}

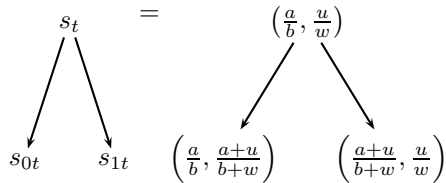
Dit is als volgt toe te passen:

Neem de samenhangscomponent $s_t \subset w_n$, welke begrensd wordt door de Farey buren $\left\{\frac{a}{b}, \frac{u}{w}\right\}$. Dan is het volgende discontinuïteitspunt op dit interval het Farey tussenpunt van deze randpunten, oftewel $\frac{a+u}{b+w}$. Het gegeven interval $s_t = \left(\frac{a}{b}, \frac{u}{w}\right)$

wordt dan opgedeeld in twee nieuwe intervallen, namelijk: $s_{0t} = \left(\frac{a}{b}, \frac{a+u}{b+w}\right)$ en

$s_{1t} = \left(\frac{a+u}{b+w}, \frac{u}{w}\right)$.

Misschien duidelijker:



Hieruit volgt ook dat

$$\begin{aligned} s_{0t} &\subset s_t \\ s_{1t} &\subset s_t \\ s_t &= s_{0t} \cup s_{1t} \end{aligned}$$

6.4 De afstand tot de buren

Nu is er ook iets te zeggen over de lengte van de intervallen s_t , s_{0t} en s_{1t} en hun onderlinge verhouding, of eigenlijk over de lengtes en intervallen van s_t , s_{00t} , s_{01t} , s_{10t} en s_{11t}

Lemma 6.15.

De lengte van s_{10t} verhoudt zich tot de lengte van s_t als maximaal 1 : 5

De lengte van s_{01t} verhoudt zich tot de lengte van s_t als maximaal 1 : 5 oftewel

$$\begin{aligned} \frac{|s_{01t}|}{|s_t|} &< \frac{1}{5} \\ \frac{|s_{10t}|}{|s_t|} &< \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Bewijs.

s_t wordt begrensd door de Farey-buren $\frac{a}{b}$ en $\frac{u}{w}$. Op eerder beschreven manier kunnen nu de intervallen s_{0t} en s_{1t} verkregen. Het proces is op beide intervallen te herhalen, om zo de intervallen s_{00t} , s_{10t} , s_{01t} en s_{11t} te verkrijgen, met:

$$\begin{aligned} s_t &= \left(\frac{a}{b}, \frac{u}{w} \right) \\ s_{00t} &= \left(\frac{a}{b}, \frac{2a+u}{2b+w} \right) \\ s_{10t} &= \left(\frac{2a+u}{2b+w}, \frac{a+u}{b+w} \right) \\ s_{01t} &= \left(\frac{a+u}{b+w}, \frac{a+2u}{b+2w} \right) \\ s_{11t} &= \left(\frac{a+2u}{b+2w}, \frac{u}{w} \right) \end{aligned}$$

Van deze intervallen zijn de lengtes eenvoudig te berekenen:

$$\begin{aligned} |s_t| &= \frac{u}{w} - \frac{a}{b} = \frac{ub - aw}{bw} = \frac{1}{bw} \quad (\text{onafhankelijk van de teller}) \\ |s_{10t}| &= \frac{a+u}{b+w} - \frac{2a+u}{2b+w} = \frac{1}{(b+w)(2b+w)} = \frac{1}{2b^2 + 3bw + w^2} \\ |s_{01t}| &= \frac{a+2u}{b+2w} - \frac{a+u}{b+w} = \frac{1}{(b+2w)(b+w)} = \frac{1}{b^2 + 3bw + 2w^2} \end{aligned}$$

Nu geldt

$$\begin{aligned}
& bw < 5bw < 2b^2 + 3bw + w^2 \text{ (er geldt namelijk } 2bw < 2b^2 + w^2 \forall b, w \in \mathbb{N}) \Rightarrow \\
& \frac{1}{2b^2 + 3bw + w^2} < \frac{1}{5bw} < \frac{1}{bw} \Rightarrow \\
& \frac{|s_{10t}|}{|s_t|} = \frac{bw}{2b^2 + 3bw + w^2} < \frac{1}{5} < 1
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
& bw < 5bw < b^2 + 3bw + 2w^2 \Rightarrow \\
& \frac{1}{b^2 + 3bw + 2w^2} < \frac{1}{5bw} < \frac{1}{bw} \Rightarrow \\
& \frac{|s_{01t}|}{|s_t|} = \frac{bw}{b^2 + 3bw + 2w^2} < \frac{1}{5} < 1
\end{aligned}$$

□

Hieruit volgt

Lemma 6.16.

Elk disjunct 01koppel of 10koppel geeft de factor $\frac{1}{5}$ voor $|s_t|$, de lengte van het interval s_t

Bewijs.

Stel $t = t_n t_{n-1} \dots t_2 t_1 \in \{0, 1\}^n$ bevat 10 koppel, dus $t = p10q$. Dan geldt dat

$$\begin{aligned}
& s_{p10q} \subset s_{10q} \subset s_{0q} \subset s_q \quad \text{met} \\
& |s_{p10q}| < |s_{10q}| < |s_{0q}| < |s_q| \leq 1
\end{aligned}$$

Als nu geldt dat $s_q = \left(\frac{a}{b}, \frac{u}{w}\right)$, met $|s_q| = \frac{1}{bw}$, dan geldt (zie bewijs vorig lemma) dat

$$\begin{aligned}
& s_{10q} = \left(\frac{2a+u}{2b+w}, \frac{a+u}{b+w}\right) \quad \text{met lengte} \\
& |s_{10q}| = \frac{1}{2b^2 + 3bw + w^2} < \frac{1}{5} |s_q| \leq \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

evenzo

$$\begin{aligned}
& s_{01q} = \left(\frac{a+u}{b+w}, \frac{a+2u}{b+2w}\right) \quad \text{met lengte} \\
& |s_{01q}| = \frac{1}{b^2 + 3bw + 2w^2} < \frac{1}{5} |s_q| \leq \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

□

Dit is herhaaldelijk toepasbaar, mocht er in p en/of q ook nog een 01koppel of 10koppel voorkomen.

Bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned}
& |s_{10}| = \frac{1}{6} < \frac{1}{5} \\
& |s_{10t}| < \frac{1}{5} |s_t| \\
& |s_{01001t}| < \frac{1}{5} |s_{1001t}| < \left(\frac{1}{5}\right)^2 |s_{01t}| < \left(\frac{1}{5}\right)^3 |s_t| \leq \frac{1}{125}
\end{aligned}$$

Definitie 6.17.

Een uniform blok in $t \in \{0, 1\}^n$ is een deelwoord met alleen 0, of alleen 1

Lemma 6.18.

Als t een uniform blok heeft met lengte k , dan

$$|s_t| < \frac{1}{k}$$

Bewijs.

s_t heeft een uniform blok van lengte k , dus geldt dat

$$s_t = s_{p000\dots 0q} \quad (k \text{ nullen}) \quad \text{of}$$

$$s_t = s_{p111\dots 1q} \quad (k \text{ enen})$$

Bovendien geldt dat

$$s_{p000\dots 0q} \subset s_{000\dots 0q} \subset s_q$$

$$s_{p1\dots 1q} \subset s_{111\dots 1q} \subset s_q$$

$$|s_{p000\dots 0q}| < |s_{000\dots 0q}| < |s_q|$$

$$|s_{p1\dots 1q}| < |s_{111\dots 1q}| < |s_q|$$

Neem aan dat $s_q = \left(\frac{a}{b}, \frac{u}{w}\right)$.

Dan geldt

$$s_{000\dots 0q} = \left(\frac{a}{b}, \frac{ka + u}{kb + w}\right)$$

$$s_{111\dots 1q} = \left(\frac{a + ku}{b + kw}, \frac{u}{w}\right)$$

met als lengte

$$|s_{000\dots 0q}| = \frac{1}{kb^2 + bw}$$

$$|s_{111\dots 1q}| = \frac{1}{bw + kw^2}$$

Er geldt ($k, b, w \in \mathbb{N}$)

$$1 \leq b^2 \Rightarrow$$

$$k \leq kb^2 < kb^2 + bw \Rightarrow$$

$$\frac{1}{kb^2 + bw} < \frac{1}{k}$$

en

$$1 \leq w^2 \Rightarrow$$

$$k \leq kw^2 < bw + kw^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{bw + kw^2} < \frac{1}{k}$$

dus

$$|s_t| = |s_{p000\dots 0q}| < |s_{000\dots 0q}| = \frac{1}{kb^2 + bw} < \frac{1}{k}$$

$$|s_t| = |s_{p111\dots 1q}| < |s_{111\dots 1q}| = \frac{1}{bw + kw^2} < \frac{1}{k}$$

□

Bijvoorbeeld:

$$|s_{00}| = \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$$

$$|s_{00t}| < \frac{1}{2}$$

$$|s_{000000t}| < \frac{1}{6}$$

Propositie 6.19.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \{0,1\}^n} |s_{t^n}| = 0$$

Bewijs.

Kies $t^n \in \{0,1\}^n$.

Laat L het aantal disjuncte 01 of 10 koppels zijn. ($2L \leq n$) Dan zijn er maximaal $L+1$ uniforme blokken, verdeelt over $n-2L$ (resterende) indices. Stel dat l de lengte is van het 'langste' uniforme blok. Dan geldt dat

$$(L+1) \cdot l \geq n - 2L$$

$$l \geq \frac{n-2L}{L+1}$$

Dan hebben we volgens lemma 6.18 dat

$$|s_{t^n}| = \frac{1}{l} \leq \frac{L+1}{n-2L}$$

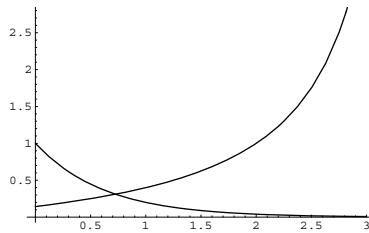
Tevens hebben we dat volgens lemma 6.16 geldt dat

$$|s_{t^n}| < \left(\frac{1}{5}\right)^L$$

Dus geldt dat

$$|s_{t^n}| \leq \min\left(\left(\frac{1}{5}\right)^L, \frac{L+1}{n-2L}\right)$$

In de grafiek ziet dit er als volgt uit



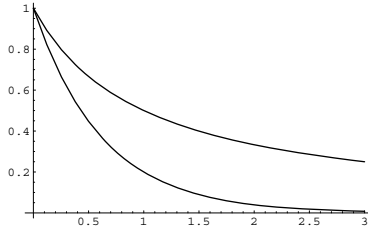
Figuur 6.4: $|s_{t^n}|$

$|s_{tn}|$ is dus maximaal de waarde van $\left(\frac{1}{5}\right)^L$ (of de waarde van $\frac{L+2}{n-2L}$) bij het snijpunt, oftewel waar geldt

$$\left(\frac{1}{5}\right)^L = \frac{L+2}{n-2L}.$$

Dit is lastig om hier een goede oplossing voor te vinden, maar het is wel afschatbaar. Er geldt namelijk dat

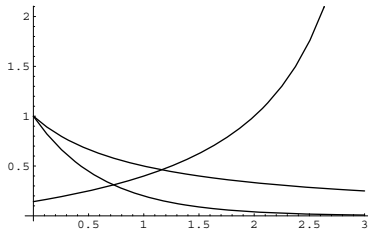
$$\left(\frac{1}{5}\right)^L \leq \frac{1}{L+1} \quad \forall L \in \left(0, \frac{n}{2}\right)$$



Figuur 6.5: $\left(\frac{1}{5}\right)^L$, $\frac{1}{L+1}$

Dan geldt

$$\min\left(\left(\frac{1}{5}\right)^L, \frac{L+2}{n-2L}\right) \leq \min\left(\frac{1}{L+1}, \frac{L+2}{n-2L}\right).$$



Figuur 6.6: hoger, maar afschatbaar maximum

Dus

$$\begin{aligned} \frac{1}{L+1} &= \frac{L+2}{n-2L} \Rightarrow \\ L &= \frac{1}{2}(\sqrt{4n+17} - 5) \Rightarrow \\ \frac{1}{L+1} &= \frac{3 + \sqrt{4n+17}}{4+2n} \end{aligned}$$

Dus

$$|s_{tn}| \leq \min\left(\left(\frac{1}{5}\right)^L, \frac{L+1}{n-2L}\right) \leq \min\left(\frac{1}{L+1}, \frac{L+1}{n-2L}\right) \leq \frac{3 + \sqrt{4n+17}}{4+2n}$$

Dus geldt dan dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \{0,1\}^n} |s_{t^n}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \sqrt{4n + 17}}{4 + 2n} = 0$$

Hieruit volgt dat

$$A \ni c_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{t^n}$$

□

6.5 Periodieke banen

Propositie 6.20.

De periodieke punten liggen dicht in A

Bewijs.

Laat $J \subset [0, 1]$ willekeurig klein. Te bewijzen is dat er in J een periodiek punt ligt.

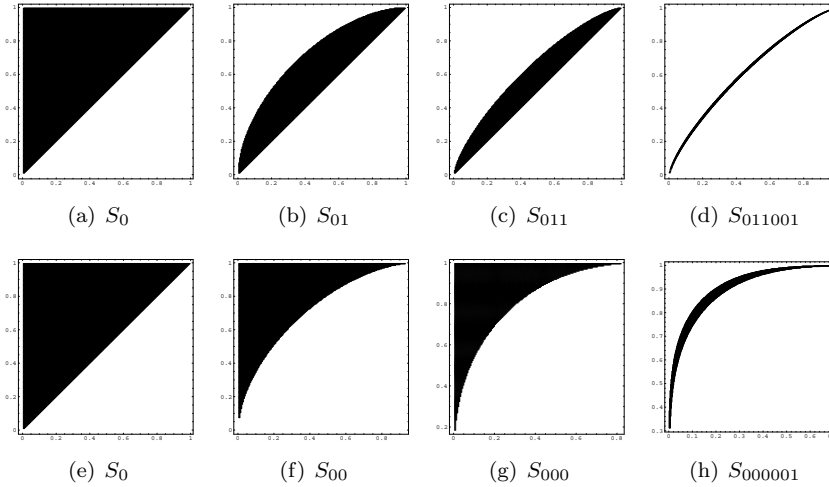
Laat n voldoende groot zijn zodat $|s_{t^n}| \leq \frac{1}{2} |J|$, $\forall t \in \{0, 1\}^n$. Dit kan wegens propositie 6.19. Dan bestaat er een $t_0 \in \{0, 1\}^n$ zodat $s_{t_0} \subset J$. Nu bevat s_{t_0} een periodiek punt van periode ten hoogste n . □

Hiermee is tevens stelling 5.9 bewezen

Hoofdstuk 7

Universaliteit

7.1 Weergave van S_{t^n}



Figuur 7.1: Samenhangscomponenten van respectievelijk W_1 , W_2 , W_3 en W_6

Gegeven een punt $(c, v) \in D$ wordt de kneedrij gedefinieerd. Preciezer, laat $(c, v) \in W_n$, dan $\theta(c, v) = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in \{0, 1\}^n$ zodanig dat

$$\theta_i = \begin{cases} 0 & \text{als } R^{i-1}(c, v) \in D_- \\ 1 & \text{als } R^{i-1}(c, v) \in D_+ \end{cases}$$

Met behulp van de bomen is het eenvoudig weer te geven welke punten aan een gegeven kneedrij voldoen:

$$\begin{aligned} \theta(c, v) = \{0 \dots\} &\Rightarrow (c, v) \in S_{\dots 0} \Rightarrow (c, v) \in D_- \\ \theta(c, v) = \{1 \dots\} &\Rightarrow (c, v) \in S_{\dots 1} \Rightarrow (c, v) \in D_+ \\ \theta(c, v) = \{00 \dots\} &\Rightarrow (c, v) \in S_{\dots 00} \Rightarrow (c, v) \in D_-, R(c, v) \in D_- \end{aligned}$$

zie figuur 7.1

7.2 Weergave van S_{t^n}

Vergelijkbaar met S_{t^n} is het ook vrij eenvoudig om de s_{t^n} weer te geven. Beschouw wederom de kneedrij:

laat $c \in w_n$, dan $\theta(c) = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) \in \{0, 1\}^n$ zodanig dat

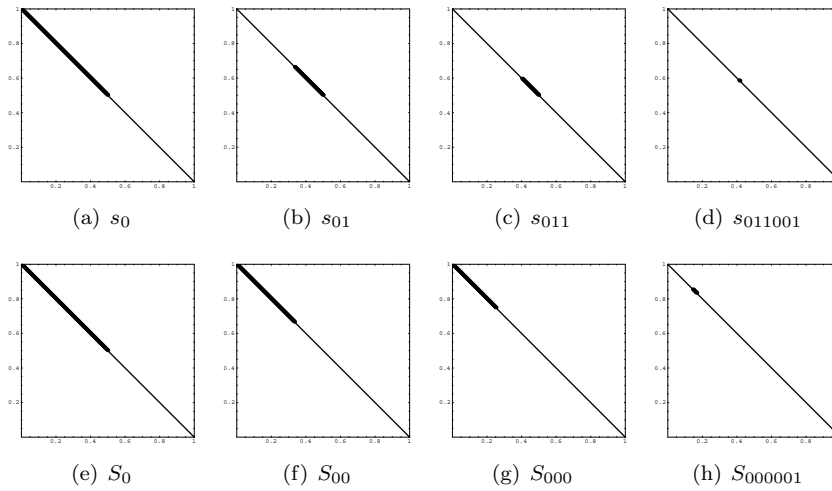
$$\theta_i = \begin{cases} 0 & \text{als } r^{i-1}(c, v) \in (0, \frac{1}{2}) \\ 1 & \text{als } r^{i-1}(c, v) \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

Opmerking.

Op A geldt dat $\theta(c) = \theta(c, 1 - c)$

Wederom is het eenvoudig om weer te geven welke punten aan welke kneedrij voldoen.

$$\begin{aligned} \theta(c) = \{0 \dots\} &\Rightarrow c \in s_{\dots 0} \Rightarrow c \in (0, \frac{1}{2}) \\ \theta(c) = \{1 \dots\} &\Rightarrow c \in s_{\dots 1} \Rightarrow c \in (\frac{1}{2}, 1) \\ \theta(c) = \{00 \dots\} &\Rightarrow c \in s_{\dots 00} \Rightarrow c \in (0, \frac{1}{2}), r(c) \in (0, \frac{1}{2}) \end{aligned}$$



Figuur 7.2: Samenhangscomponenten van respectievelijk w_1 , w_2 , w_3 en w_6

Opmerking.

Beschouw de twee rechter figuren, en vergelijk $|s_{011001}|$ en $|s_{000001}|$. Het verschil in dikte is duidelijk te begrijpen met behulp van paragraaf 6.4. Er geldt namelijk dat $|s_{011001}| \leq (\frac{1}{5})^3$, terwijl $|s_{000001}| \leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5}$ (zie hiervoor lemma 6.16 en lemma 6.18)

Hoewel het mogelijk eerder duidelijk was, is in de plaatjes duidelijk te zien dat

$$s_{t^n} = S_{t^n} \cap A$$

en ook

$$w_n = W_n \cap A$$

$$k_n = K_n \cap A$$

$$b_n = B_n \cap A$$

7.3 Stabiele variëteiten

Definitie 7.1.

De stabiele variëteit $W^s(c_0, v_0)$ van een punt $(c_0, v_0) \in D$ wordt gegeven door

$$W^s(c_0, v_0) = \{(c, v) \in D \mid \lim_{n \rightarrow \infty} |R^n(c, v) - R^n(c_0, v_0)| = 0\}.$$

In het bijzonder kijken we naar de stabiele variëteiten van de punten op de attractor, dus naar

$$W_A^s(c_0) \text{ waarbij } (c_0, v_0) = (c_0, 1 - c_0) \in A$$

Propositie 7.2.

Voor alle $t^n \in \{0, 1\}^n$ en voor $c_0 \in s_{t^n}$ geldt dat

$$W_A^s(c_0) \subset S_{t^n}$$

De constructie van W_A^s is lastig, derhalve zal deze met een numeriek argument worden gedaan, en tegelijkertijd zal propositie 7.2 bewezen worden.

Neem het punt $c_0 \in A$, en pas r toe, en wel n keer ($n \in \mathbb{N}$). Hou hierbij een index $z^{n+1} = \{z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1}\} \in \Sigma_n = \{0, 1\}^{n+1}$ waarbij

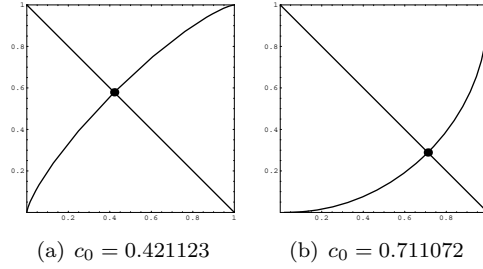
$$z_i = \begin{cases} 0 & \text{als } r^{i-1}(c_0) \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ 1 & \text{als } r^{i-1}(c_0) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$$

Dit geeft een punt $(c_n, 1 - c_n) = (c_n, v_n) \in A$. Neem nu $(\hat{c}_n, \hat{v}_n) = (c_n + \delta, v_n + \delta)$ nabij nabij (c_n, v_n) , loodrecht op A . (neem bijvoorbeeld $\delta = -0.05 + i \cdot 0.001$, met $i = 0, 1, 2, \dots, 99, 100 \in \mathbb{Z}$)

Van dit punt $(\hat{c}_n, \hat{v}_n) \notin A$ is het wel mogelijk om R^{-n} te vinden, en wel met hulp van de z^{n+1} door deze in omgekeerde volgorde weer toe te passen;

$$(\hat{c}_i, \hat{v}_i) = \begin{cases} R_0^{-1}(\hat{c}_{i+1}, \hat{v}_{i+1}) & \text{als } z_i = 0 \\ R_1^{-1}(\hat{c}_{i+1}, \hat{v}_{i+1}) & \text{als } z_i = 1 \end{cases}$$

Dit levert (na n stappen) het punt (\hat{c}_0, \hat{v}_0) Aangezien hiervoor geldt (bij benadering) dat $A \ni (c_n, 1 - v_n) = (c_n, v_n) = R^n(\hat{c}_0, \hat{v}_0)$, hebben we dat $(\hat{c}_0, \hat{v}_0) \in W_A^s(c_0)$



Figuur 7.3: Weergave van stabiele varieteiten

In figuur 7.3 staan (voor een gegeven punt $(c_0, v_0) \in A$) alle gevonden punten (\hat{c}_0, \hat{v}_0) weergegeven die op deze manier gevonden zijn, door verschillende waarden van δ te nemen. Het dikke punt is $(c_0, v_0) \in A$

De verkregen z^{n+1} is nu gelijk aan θ behorend bij s_{t^n} (is namelijk op dezelfde manier verkregen). De - op deze manier gevonden - punten voorkomend uit $(c_0, v_0) \in A$ liggen nu allemaal in S_{t^n} . Voor deze punten is in de bovenstaande constructie $n = 6$ en $\delta = \{-0.1, -0.09, \dots, 0.09, 0.1\}$ genomen.

Definitie 7.3.

De dikte van S_{t^n} wordt op de volgende manier gedefinieerd: S_{t^n} wordt begrensd door twee discontinuïteitskrommen $\subset K_n$. Neem x in de ene, en y in de andere. Dan geldt

$$dikte(S_{t^n}) = \max_x \min_y |x - y|$$

Er geldt

Lemma 7.4.

De dikte van S_{t^n} is maximaal op A , oftewel bij s_{t^n}

Een bewijs wordt niet gegeven. De ingrediënten hiervoor bevatten onder andere de hyperboliciteit, de contractiefactor en lemma 6.16

Eerder is al bewezen dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in \{0,1\}^n} |s_{t^n}| = 0$$

Laat $c \in A$, en neem aan dat $r^n(c) = R^n(c, 1 - c)$ gedefinieerd is voor $n \geq 0$. Laat $\theta(c) = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots\} \in \{0, 1\}^n$ zodanig dat

$$\theta_i = \begin{cases} 0 & \text{als } r^{i-1} \in (0, \frac{1}{2}) \\ 1 & \text{als } r^{i-1} \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

Neem nu

$$t^n = \theta_n \dots \theta_2 \theta_1$$

Merk op dat

$$S_{t^{n+1}} \subset S_{t^n} \Rightarrow \bigcap_{n=0}^N S_{t^n} = S_{t^N}$$

$$s_{t^{n+1}} \subset s_{t^n} \Rightarrow \bigcap_{n=0}^N s_{t^n} = s_{t^N}$$

Dan:

Stelling 7.5.

$$W_A^s(c) = \bigcap_{n \geq 0} S_{t^n}$$

$$A \ni c_0 = \bigcap_{n \geq 0} s_{t^n}$$

Verder geldt dat $W_A^s(c)$ de grafiek is van een functie.

Waar dit op neer komt, is dat als $(c, v) \in W_A^s(c_0)$, $(c_0, v_0) \in A$, is het volgende

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R^n(c, v) - R^n(c_0, v_0)| = 0 \text{ of equivalent hiermee}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |R^n(c, v) - r^n(c_0)| = 0$$

7.4 De nieuwe code

Gegeven een punt $(c, v) \in D$ is het mogelijk om een woord t^n (of zelfs t^∞) te constueren. Nu is het mogelijk om een geheel nieuw woord $a = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ te maken, en wel op de volgende manier.

a_i is het aantal keer dat een zelfde letter achter elkaar voorkomt in θ ; elke keer als in θ een tekenwisseling voorkomt, verschuift de a_i .

Enkele voorbeelden:

$\theta(c) =$	$S_{t^{10}} =$	$a^m =$
$\{0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1\}$	$S_{1010101010}$	$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$
$\{0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 1\}$	$S_{1100010100}$	$\{2, 1, 1, 1, 3, 2\}$
$\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$	$S_{0000000000}$	$\{10\}$
$\{0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1\}$	$S_{1111100000}$	$\{5, 5\}$

Er geldt dat

$$\sum_{i=1}^m a_i = n,$$

de lengte van t^n

Dit zou men kunnen schrijven als een functie, namelijk

$$\tau : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

Opmerking.

Merk op dat de functie $\tau : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ two on one is. Er geldt namelijk het volgende. Beschouw $\theta(c) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ en construeer hieruit $\hat{\theta}(c)$ op de volgende manier:

$$\hat{\theta}_i = 1 - \theta_i \quad \forall i \leq n \in \mathbb{N}$$

Dan geldt dat $\tau(\theta(c)) = \tau(\hat{\theta}(c))$, zie bijvoorbeeld

$$\begin{aligned} \tau(\{0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1\}) &= \tau(\{1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0\}) = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\} \\ \tau(\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}) &= \tau(\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}) = \{8\} \\ \tau(\{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}) &= \tau(\{1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0\}) = \{4, 4\} \end{aligned}$$

Dus is er sprake van een symmetrie

7.5 Symmetrie

Laat $H : D \rightarrow D$ gedefinieerd door

$$H(c, v) = (1, 1) - (c, v) = (1 - c, 1 - v)$$

en laat $h : A \rightarrow A$ gedefinieerd door

$$h(c) = 1 - c$$

Dan commuteert H met R , en commuteert h met r , oftewel

Lemma 7.6.

$$\begin{aligned} H \circ R &= R \circ H \\ h \circ r &= r \circ h \end{aligned}$$

Bewijs.

Het bewijs is eenvoudig rekenwerk; er geldt

$$\begin{aligned} R(c, v) + R(1 - c, 1 - v) &= (1, 1) \Rightarrow \\ R((1 - c, 1 - v)) &= (1, 1) - R(c, v) \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} r(c) + r(1 - c) &= 1 \Rightarrow \\ r(1 - c) &= 1 - r(c) \end{aligned}$$

□

Opmerking.

Er geldt dan ook dat

$$\begin{aligned} H \circ R^n &= R^n \circ H \\ h \circ r^n &= r^n \circ h \end{aligned}$$

Bij de inverses moet wel opgelet worden welke genomen wordt, er geldt namelijk dat: (verder niet relevant, gebruiken we niet)

$$\begin{aligned} R_1^{-1}(1 - c, 1 - v) &= (1, 1) - R_0^{-1}(c, v) \\ r_1^{-1}(1 - c) &= 1 - r_0^{-1}(c) \end{aligned}$$

Hieruit volgt

Lemma 7.7.

Als $c_0 \in A$ het woord θ oplevert, dan levert $h(c_0) \in A$ het woord $\hat{\theta}$.

Bewijs.

$c_0 \rightarrow \theta(c_0) \Rightarrow$

$$\theta_i = \begin{cases} 0 & \text{als } r^{i-1}(c_0) \in (0, \frac{1}{2}) \\ 1 & \text{als } r^{i-1}(c_0) \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\theta_i = \begin{cases} 1 & \text{als } 1 - r^{i-1}(c_0) \in (0, \frac{1}{2}) \\ 0 & \text{als } 1 - r^{i-1}(c_0) \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\theta_i = \begin{cases} 1 & \text{als } h(r^{i-1}(c_0)) \in (0, \frac{1}{2}) \\ 0 & \text{als } h(r^{i-1}(c_0)) \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\theta_i = \begin{cases} 1 & \text{als } r^{i-1}(h(c_0)) \in (0, \frac{1}{2}) \\ 0 & \text{als } r^{i-1}(h(c_0)) \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$1 - \theta_i = \begin{cases} 0 & \text{als } r^{i-1}(h(c_0)) \in (0, \frac{1}{2}) \\ 1 & \text{als } r^{i-1}(h(c_0)) \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\hat{\theta}_i = \begin{cases} 0 & \text{als } r^{i-1}(h(c_0)) \in (0, \frac{1}{2}) \\ 1 & \text{als } r^{i-1}(h(c_0)) \in (\frac{1}{2}, 1) \end{cases}$$

oftewel $h(c_0) \rightarrow \hat{\theta}(h(c_0))$ □

Lemma 7.8.

c_0 en $h(c_0)$ geven identieke a^m

Bewijs.

Dit volgt direct uit het feit dat c_0 en $h(c_0)$ de complementaire woorden $\theta(c_0)$ en $\hat{\theta}(h(c_0))$ oplevert, en uit de definitie van het woord a . Oftewel

$$\tau(\theta(c_0)) = \tau(\hat{\theta}(h(c_0)))$$

□

Door de nu verkregen symmetrie, kijken we voor het restant enkel naar D_-

7.6 Rotatiegetal ρ

Voor we aan het daadwerkelijke rotatiegetal beginnen, eerst het volgende:

Lemma 7.9.

Als $(c, v) \in W_A^s(c_0)$, dan

$$\theta(c, v) = \theta(c_0)(= \theta(c_0, 1 - c_0))$$

Bewijs.

$$(c, v) \in W_A^s(c_0) \Rightarrow$$

$$(c, v) \in \bigcap_{n \geq 1} S_{t^n}$$

Bovendien geldt dat $s_{t^n} = A \cap S_{t^n}$, dus

$$c_0 = A \cap \bigcap_{n \geq 1} S_{t^n}$$

Omdat de $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ constant zijn op S_{t^n} geldt

$$\theta(c, v) = \theta(c_0)$$

□

Hieruit volgt

Propositie 7.10.

$$\tau(\theta(c, v)) = \tau(\theta(c_0))$$

Definitie 7.11.

Neem $a = \{a_1, a_2, \dots\} = \tau(\theta(c, v))$.

Het rotatiegetal ρ van $(c, v) \in D$ is dan

$$\rho = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}}$$

Voorbeeld:

Neem het periode-2 punt, dan geldt dat $\theta = \{0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\}$

Er geldt dan dat

$$\theta = \{0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots\} \Rightarrow$$

$$a = \tau(\theta) = \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, \dots\} \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

$$\frac{1}{\rho} = 1 + \rho \Rightarrow$$

$$\rho^2 + \rho - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

Hieruit volgt dat het periode-2 punt de waarde $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ als rotatie getal heeft

Een ander voorbeeld:

Neem een periode-3 punt, dan geldt dat $\theta = \{0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots\}$

Er geldt dan dat

$$\theta = \{0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots\} \Rightarrow$$

$$a = \tau(\theta) = \{2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots\} \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

$$\frac{1}{\rho} - 2 = \frac{1}{1 + \rho} \Rightarrow$$

$$\frac{\rho}{1 - 2\rho} = 1 + \rho \Rightarrow$$

$$2\rho^2 + 2\rho - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\rho = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$$

Hieruit volgt dat het periode-3 punt de waarde $\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$ als rotatie getal heeft.

Opmerking.

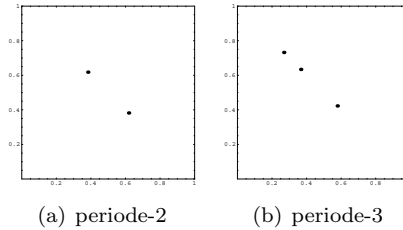
Dit is eenvoudig verifieerbaar. Neem $c = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, dan geldt dat

$$r^2(c) = r_1 \circ r_0(c) = c$$

en voor $c = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)$ geldt

$$r^3(c) = r_1 \circ r_0 \circ r_0(c) = c$$

In figuur 7.4 zijn periode-2 en periode-3 punten afgebeeld; ρ is genomen van de eerste, meest linkse punten ($\in D_-$)



Figuur 7.4: Enkele periodieke punten

Er geldt (maar we geven geen bewijs)

Propositie 7.12.

Als $(c, v) = (c_0, v_0) = (c_0, 1 - c_0) \in A \cap D_-$, dan $\rho_{(c,v)} = c$

Als $(c, v) = (c_0, v_0) = (c_0, 1 - c_0) \in A \cap D_+$, dan $\rho_{(c,v)} = 1 - c$

Opmerking.

Hier zit weer de symmetrie in: $H(\rho_{(c,v)}) = \rho_{H(c,v)}$

7.7 Combinatoriek

Men kan zeggen $f = (c, v)$ (de functie wordt gedefinieerd door de parameters). Als geldt dat $f \in W_A^s(c_0)$, geldt dus ook dat $(c, v) \in W_A^s(c_0)$. Bovendien $W_A^s(c_0) = W^s(c, v) = W^s(f)$

Stelling 7.13.

Laat $f \in D_-$ en $\rho_f \in \mathbb{P} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

(d.w.z. de a_n is goed gedefinieerd, de kettingbreuk is niet eindig ("stopt nooit"), dus ook R_f^n is goed gedefinieerd)

Dan geldt

$$f \in W_A^s(\rho_f)$$

Bewijs.

Wegens stelling 7.5 geldt dat

$$f \in W^s(f) = \bigcap S_{t^n} = W_A^s(c_0)$$

Dus

$$\rho_f = \rho_{c_0}$$

volgens propositie 7.12 geldt dat $\rho_{c_0} = c_0$, dus $\rho_f = \rho_{c_0} = c_0$, en dus geldt

$$f \in W_A^s(c_0) = W_A^s(\rho_f)$$

□

Waar dit, al met al, op neer komt is het volgende:

Als voor gegeven functie $f = f_{c,v}$ geldt dat $(c, v) \in W_A^s(c_0)$ voor $c_0 \in A$, dan houdt het in dat na voldoende (∞) renormalisaties geldt dat de functie $f_{c,v}$ zich net zo gedraagt als een pure rotatie, met c_0 als rotatie getal. In het kort:

De kleinschalige meetkunde (fijne structuur) van f is hetzelfde als die van de pure rotatie over ρ_f ; de meetkunde wordt bepaald door de combinatoriek van f , namelijk ρ_f of a .

Universaliteit: De combinatoriek(topologie) alleen bepaalt de meetkunde.