rijksuniversiteit groningen
faculteit wiskunde en natuurwetenschappen

Luchtstroming rondom een auto

Een wiskundige beschrijving

Peter Gooijert

Bachelorscriptie Technische Wiskunde

Augustus 2008

Luchtstroming rondom een auto

Een wiskundige beschrijving

Peter Gooijert

Begeleider: Dr.ir. R.W.C.P. Verstappen

Instituut voor Wiskunde en Informatica
Postbus 407
9700 AK Groningen

Samenvatting

Een auto rijdt met een bepaalde snelheid in de open lucht. De luchtstroming die hierbij ontstaat is wiskundig te beschrijven. De stroming is op te splitsen in twee delen. In een dunne laag rondom de auto, de zogenaamde grenslaag, is de viscositeit van belang. Buiten deze grenslaag hebben we te maken met een niet-viskeuze potentiaalstroming. We kunnen de aerodynamische drag van auto's bekijken en op deze manier de aerodynamica aanpassen, zodat een auto nog sneller kan rijden of een lagere weerstand heeft. Tegenwoordig wordt er ook steeds vaker gebruik gemaakt van de computer. Met behulp van Computational Fluid Dynamics is het mogelijk om de stroming rond een auto te berekenen en de aerodynamica te verbeteren.

Inhoudsopgave

1 Inleiding **1**

1.1 Probleemstelling . . . 1

1.1.1 Hoe kunnen we stromingen rond een auto wiskundig beschrijven? . . . 1

1.1.2 Computational Fluid Dynamics . . . 1

2 Stromingen rond een auto **3**

2.1 Navier-Stokes vergelijkingen . . . 3

2.1.1 Dichtheid . . . 3

2.1.2 Viscositeit . . . 4

2.1.3 De Navier-Stokes vergelijkingen . . . 5

2.2 Externe stromingen . . . 6

2.2.1 Massabehoud . . . 6

2.2.2 Impulsbehoud en Bernoulli . . . 7

2.2.3 Potentiaalstroming . . . 8

2.2.4 Grenslaag en het Reynoldsgetal . . . 9

2.2.5 Stromingen in grenslaag . . . 9

2.2.6 Drag en Lift . . . 15

2.3 Interne stroming . . . 17

2.4 Stroming rond een auto wiskundig beschreven . . . 19

3 Aerodynamische drag van personenauto's **21**

3.1 Analyse van de drag . . . 22

3.1.1 Lokale oorsprong en effect op de omgeving . . . 24

3.2 Drag in delen bekeken . . . 25

3.2.1 De voorkant . . . 25

3.2.2 De voorruit en het dak . . . 26

3.2.3 De achterkant . . . 28

3.2.4 De zijkant, onderkant en wielen . . . 31

3.2.5 Wijzigingen in de aerodynamica . . . 31

4 Stroming rond een racewagen **33**

4.1 Stroming rond vleugels . . . 33

4.2 Racewagens en vleugels . . . 35

5 Computational Fluid Dynamics **39**
5.1 CFD methoden voor auto-aerodynamica 39
5.1.1 De basisstappen van een CFD berekening 40
5.1.2 Discretiseren van een auto 41
5.1.3 Lineaire CFD methoden 42
5.1.4 Niet-lineaire CFD methoden 42
5.1.5 Resultaten met behulp van CFD in de autoindustrie 44

6 Conclusie en discussie **47**
6.1 Conclusie 47
6.2 Discussie 48

Bibliografie **49**

Hoofdstuk 1

Inleiding

Een auto rijdt op een weg met een bepaalde snelheid in de open lucht. De lucht zal zich om de auto heen gaan verplaatsen. Deze luchtstroming willen we wiskundig beschrijven.

1.1 Probleemstelling

Het onderwerp van dit bacheloronderzoek is op te splitsen in twee delen. Ten eerste gaan we kijken naar de luchtstromingen rond auto's en de wiskunde die daar bij komt kijken. Hier proberen we een wiskundig model op te stellen om de stromingen te beschrijven. Het tweede deel van het onderzoek zal gaan over Computational Fluid Dynamics, toegepast op de stromingen rond auto's. Dit deel zal gericht zijn op het gebruik van de computer.

1.1.1 Hoe kunnen we stromingen rond een auto wiskundig beschrijven?

Is het mogelijk de luchtstromingen (aerodynamica) rond een auto wiskundig te beschrijven? En als het mogelijk is, hoe kunnen we dit dan omschrijven? Dit zijn de twee belangrijkste vragen waarop een antwoord wordt gezocht. Uiteraard is het probleem wat ingewikkelder dan deze twee vragen doen vermoeden. Zo kun je gaan afvragen wat het verschil is tussen normale personenauto's en racewagens, die veel spoilers en vleugels hebben. Daarbij komen termen als *drag* en *downforce* kijken, maar wat betekenen deze termen eigenlijk? En hoe kunnen we ze in de wiskunde omschrijven?

Verder is het natuurlijk de vraag, wat kunnen we nu met het wiskundig model van de luchtstroming rond een auto? Zijn er nog toepassingen die gebruik maken van deze wiskunde?

1.1.2 Computational Fluid Dynamics

Tegenwoordig wordt er steeds meer gebruik gemaakt van de computer. Zo is het ook mogelijk om de stromingen rond een auto te beschrijven met behulp van *Computational Fluid Dynamics* (CFD). Wat voor rol speelt de computer precies bij het berekenen? Hoe gaat het berekenen in zijn werk en wat voor numerieke wiskunde methodes worden daarbij gebruikt? Verder is het de vraag welke resultaten er tot nu toe zijn behaald met behulp van Computational Fluid Dynamics op het gebied van auto's.

Hoofdstuk 2

Stromingen rond een auto

Een auto, of ander voertuig, is vaak een ingewikkeld geheel waarvan de vorm niet eenduidig is vastgelegd. De ene auto ziet er immers heel anders uit dan de andere. De aerodynamica van de auto's kan dan ook verschillend zijn. Hoe kan hier dan toch een model worden opgesteld om de stromingen te bekijken? Allereerst zijn er bij voertuigen meerdere soorten van luchtstroming mogelijk. Ten eerste is er de stroming rond de auto, de zogenaamde externe stroming (*external flow*). Daarnaast is er ook sprake van interne stroming (*internal flow*). Dit zijn stromingen die door het voertuig gaan. Als laatste zijn er nog stromingen die binnen de techniek van een auto optreden. Hierbij valt te denken aan de stroming van vloeistoffen binnen de motor, maar ook luchtstromingen binnen bepaalde onderdelen. Een auto en andere voertuigen zijn *bluff bodies* (stompe lichamen). Dit wil zeggen dat de voorkant vaak breed en plat is. Het oppervlak loodrecht op de stroming is relatief groot. (Zo zijn gebouwen bijvoorbeeld ook *bluff bodies*.) Als we de stroming rond een auto willen bekijken, dan moeten we de auto als één geheel zien. Soms is het echter wel mogelijk een onderdeel te beschouwen, bijvoorbeeld de stroming rond een spiegel of wielkast. Hierbij wordt aangenomen dat de stroming, in het beschouwde deelgebied weinig of geen interactie heeft met de globale stroming rond een auto.

Om de stromingen rond een auto te beschrijven hebben we eigenlijk al een model. Deze wordt in de wiskunde gegeven door de Navier-Stokes vergelijkingen. Het doel is om dit ingewikkelde model te versimpelen tot een model waarmee we de stromingen makkelijk kunnen beschrijven. Daarvoor gaan we eerst eens beter kijken naar de Navier-Stokes vergelijkingen.

2.1 Navier-Stokes vergelijkingen

Voordat we de Navier-Stokes vergelijkingen kunnen bekijken moeten we aantal dingen definiëren. Zo beschrijven de vergelijkingen alleen stromingen in een viskeuze vloeistof. Maar wat is een viskeuze vloeistof? En voldoet de stroming van lucht rond een auto hieraan? Daarnaast speelt binnen de stromingsleer de dichtheid van een vloeistof of gas een grote rol. Hier gaan we eerst eens naar kijken.

2.1.1 Dichtheid

Voordat er naar de stromingen gekeken kan worden moeten er eerst een aantal termen en eigenschappen worden geïntroduceerd en worden uitgelegd. Om te beginnen met het medium waarin de auto zich bevindt. Binnen de stromingsleer wordt vaak gesproken over vloeistof

(*fluid*). Hiermee kan zowel een gas als een vloeibaar medium worden bedoeld. Veel stromingen bij voertuigen zijn stromingen van lucht, een auto rijdt immers op de weg en in een omgeving van lucht. Alleen binnen de techniek van een auto komen ook vloeistofstromingen voor. Binnen de stromingsleer zien we de lucht als een gas. Bij een ideaal gas gaan we er vanuit dat de moleculen klein zijn ten opzichte van de afstand tussen de moleculen. Een ideaal gas 'in rust' heeft een drietal belangrijke eigenschappen, welke hieronder volgen.

1. (*dichtheid*) De dichtheid ρ van een gas is de totale massa van moleculen per volume-eenheid. Vaak wordt dit gegeven in kg/m^3. Voor lucht in rust geldt dat $\rho = 1,2250 kg/m^3$.

2. (*druk*) De druk p van een gas is de kracht per oppervlakte-eenheid op een oppervlak. De druk wordt meestal gegeven in bar of atm. Voor lucht in rust geldt een druk $p = 1$ atm.

3. (*temperatuur*) Gas heeft een absolute temperatuur, welke afhangt van de kinetische energie van de moleculen. Voor een ideaal gas geldt de gaswet $p = \rho RT$, met R de gasconstante en T de absolute temperatuur in *Kelvin*.

Een ander belangrijk punt bij de stromingen bij auto's is de samendrukbaarheid van lucht. Deze samendrukbaarheid is sterk afhankelijk van de veranderingen in druk en temperatuur, maar ook van de variatie in dichtheid. In 1997 werd de hoogste snelheid ooit gemeten van een landvoertuig, deze bedraagt 1224 km/h (ongeveer gelijk aan de geluidssnelheid). Als auto's met zo'n snelheid rijden is de samendrukbaarheid van lucht zeer belangrijk. Bij de meeste raceauto's, en dus helemaal bij personenauto's, is de maximale snelheid echter maar een derde van deze snelheid. Hierdoor zijn de veranderingen van druk en temperatuur in het stromingsveld zeer klein, dus kunnen we veranderingen in de dichtheid buiten beschouwing laten. Het medium waar de stroming in plaatsvindt kunnen we dus als onsamendrukbaar beschouwen. Voor de lucht kunnen we nu een constante dichtheid nemen, welke gelijk is aan $\rho = 1,2250 kg/m^3$ bij $p = 1$ atm en $T = 288$ K.

2.1.2 Viscositeit

Een gas wat in beweging is met een snelheid v, bevat moleculen die een eigen snelheid c hebben. Als deze moleculen ook een geordende snelheid v hebben, kunnen we spreken van viscositeit (stroperigheid). We kunnen viscositeit zien als:

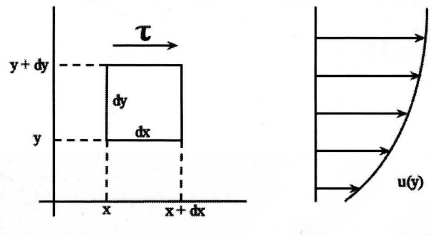
$$\text{viscositeit} = \frac{\text{afschuifspanning}}{\text{afschuifsnelheid}}$$

In de wiskunde definiëren we de (af)schuifspanning τ, met eenheid Pa, als volgt

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \tag{2.1}$$

In deze formule is μ de dynamische viscositeitscoëfficiënt, met als eenheid Pa·s. Deze viscositeitscoëfficiënt is afhankelijk van de soort vloeistof en is voor lucht ongeveer gelijk aan $2 \cdot 10^{-5}$ Pa·s. De schuifspanning is de schuifkracht per eenheid van het oppervlak van een voorwerp. (Zie ook figuur 2.1.)

Naast de dynamische viscositeit wordt er ook vaak gebruik gemaakt van de kinematische viscositeit. Deze hangt af van de druk en temperatuur. Voor onsamendrukbare vloeistoffen



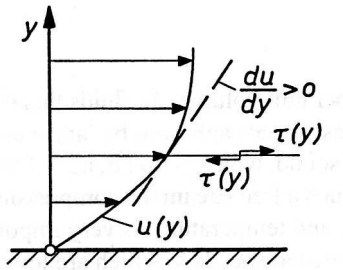
Figuur 2.1: Schuifspanning, ontstaan door snelheidsverschillen. Afbeelding afkomstig uit [7].

geldt dat er alleen temperatuurafhankelijkheid geldt voor μ en ν. De relatie ziet er als volgt uit

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{2.2}$$

Hierin is ν de kinematische viscositeitscoëfficiënt.

Viscositeit zorgt binnen een stroming voor weerstand. Stel dat we een parallelle stroming hebben, waarin we een lichaam plaatsen. Als er geen sprake is van viscositeit dan stroomt de vloeistof zonder problemen om het lichaam heen. Hebben we echter een vloeistof welke wel stroperig is dan zal de stroming aan de wand van het lichaam gaan kleven. Hierdoor neemt de snelheid van de stroming af en de stroming op de wand zal nul zijn. Dit verschijnsel levert een verschil op van snelheden in de stroming bij de wand en de stroming verder van het lichaam verwijderd.



Figuur 2.2: Snelheidsvermindering aan de wand in een viskeuze stroming. Afbeelding afkomstig uit [1].

2.1.3 De Navier-Stokes vergelijkingen

Binnen de stromingsleer zijn er bewegingsvergelijkingen, de zogenaamde Euler vergelijkingen (zie ook §2.2.2). Als we aan deze vergelijkingen termen die viskeuze krachten beschrijven toevoegen krijgen we de Navier-Stokes vergelijkingen. Dit zijn de exacte bewegingsvergelijkingen voor een stroming. Voordat we de vergelijkingen gaan opschrijven introduceren we eerst een aantal variabelen. We gaan uit van een driedimensionale ruimte x, y, z. Er is sprake van een snelheidsvector $\mathbf{v} = (u, v, w)$. We geven de dichtheid aan met ρ en de druk met p. De Navier-Stokes vergelijkingen zien er in vectornotatie dan voor onsamendrukbare vloeistoffen als volgt uit

$$\rho\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \mu\Delta\mathbf{v} \tag{2.3}$$

Hierbij geldt een continuïteitsvergelijking $\text{div}(\mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, als dichtheid ρ constant is.

De vergelijkingen zijn afgeleid door Claude-Louis Navier in 1827 en George Stokes in 1845. Voor een afleiding kan worden gekeken in [7]. Als we te maken hebben met een externe kracht, dan moet deze nog worden toegevoegd aan de rechterkant van de Navier-Stokes vergelijking 2.3. Deze term is van de vorm $\rho\mathbf{F}$, met $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

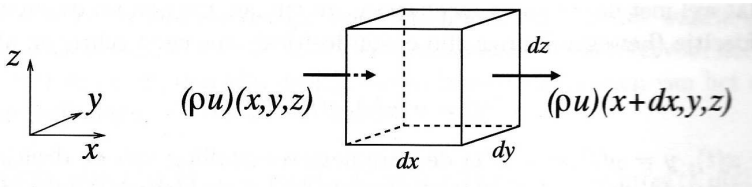
Het oplossen van de Navier-Stokes vergelijkingen is een ingewikkeld probleem. We kunnen dus ook niet maar zo de stromingen rond een auto gaan beschrijven met deze vergelijkingen. Er is maar een hele kleine kans dat de oplossing precies gevonden kan worden, daarom gaan we het model van de Navier-Stokes vergelijkingen versimpelen. Omdat de Navier-Stokes vergelijkingen een hogere orde hebben dan de Eulervergelijkingen zijn er extra randvoorwaarden nodig. Er moet aan de wand (oppervlak) van een voorwerp in de stroming worden voldaan aan randvoorwaarden. Dit houdt in dat voor niet viskeuze stromingen de snelheid loodrecht op het oppervlak nul moet zijn ($\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$). Terwijl voor viskeuze stromingen de *no-slip* conditie moet gelden, dat wil zeggen dat de snelheid nul wordt op het oppervlak van het lichaam. De stroming komt in het laatste geval tot stilstand vlak bij het lichaam.

2.2 Externe stromingen

Om de externe stroming rond een auto te gaan beschrijven gaan we er eerst vanuit dat we te maken hebben met 'stilstaande' lucht. Dus in dit geval is lucht 'in rust' en mogen we dichtheid constant nemen (zie §2.1.1). De snelheid V_∞ is nu dus gelijk aan de snelheid van de auto. Er vanuit gaande dat de stroming niet loslaat kunnen we zeggen dat de viskeuze effecten alleen plaatsvinden in een dunne laag op het oppervlak. Deze laag wordt ook wel grenslaag (*Boundary Layer*) genoemd. Boven deze laag kan de stroming als niet-viskeus worden beschouwd, waarbij de druk werkt op de grenslaag.

2.2.1 Massabehoud

Het eerste begrip wat nodig is om de stroming te beschrijven is het behoud van massa. Om dit te laten zien maken we gebruik van een klein rechthoekig blokje met zijden dx, dy en dz (figuur 2.3). De massa van dit blokje wordt gegeven door $\rho dxdydz$, met ρ de dichtheid.



Figuur 2.3: Blokje voor massabehoud. Afbeelding afkomstig uit [7].

We gaan er nu vanuit dat door elke zijde van het blokje vloeistof (wat ook een gas zou kunnen zijn) naar binnen en buiten stroomt. Wiskundig gezien bestaat het behoud van massa uit termen van de dichtheid en de snelheid $\mathbf{v} = (u, v, w)$. De hoeveelheid vloeistof dat naar

binnen stroomt levert een toename op van de vloeistof in het blokje. De hoeveelheid vloeistof dat naar binnen en naar buiten stroomt kunnen als volgt weergeven (voor de x-richting)

$$(\rho u)(x+dx,y,z)dydz \text{ en } -(\rho u)(x,y,z)dydz$$

Voor beide andere richtingen kunnen we soortgelijke termen opstellen. Deze kunnen we nu samen nemen zodat vergelijking 2.4 ontstaat.

$$\begin{aligned}\frac{d\rho}{dt}dxdydz &= -(\rho u)dydz\,[(x+dx,y,z)+(x,y,z)] \\ &\quad -(\rho v)dxdz\,[(x,y+dy,z)+(x,y,z)] \\ &\quad -(\rho w)dxdy\,[(x,y,z+dz)+(x,y,z)]\end{aligned} \tag{2.4}$$

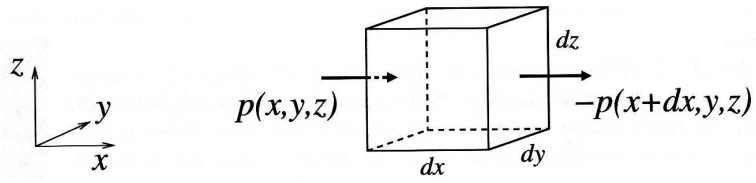
Als we nu door $dxdydz$ delen en dz, dy en dz naar nul laten gaan krijgen we de volgende continuïteitsvergelijking in vectornotatie

$$\frac{d\rho}{dt}+\nabla\cdot(\rho\mathbf{v})=0 \tag{2.5}$$

Als de dichtheid niet verandert, zoals bij een onsamendrukbare vloeistof het geval is, is de vergelijking $\nabla\cdot\mathbf{v}=0$.

2.2.2 Impulsbehoud en Bernoulli

Een tweede behoudswet die een grote rol speelt bij het beschrijven van stromingen is het behoud van impuls. Deze is gebaseerd op de *Tweede wet van Newton*. Ook hier maken we weer gebruik van een klein blokje (figuur 2.4), waar we nu de impulsbalans voor gaan opstellen.



Figuur 2.4: Blokje, gebruikt om impulsbehoud af te leiden. Afbeelding afkomstig uit [7].

Voor de x-richting geldt dat 'massa maal versnelling' (Tweede wet van Newton) wordt gegeven door

$$\rho\frac{Du}{Dt}dxdydz$$

Deze term moet gelijk zijn aan de som van drukkracht (p) en massakracht (F_1) in de x-richting gegeven door

$$p(x,y,z,t)dydz-p(x+dx,y,z,t)dydz+\rho F_1$$

Het gelijk stellen van deze vergelijkingen, het wegdelen van $dxdydz$ en het naar nul laten gaan van deze afstanden levert het volgende op

$$\rho\frac{Du}{Dt}=-\frac{dp}{dx}+\rho F_1$$

Ook voor de y- en z-richting kunnen we zo'n vergelijking opstellen. Het samen nemen hiervan geeft (in vectornotatie) de impulsvergelijking van Euler

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{F} \tag{2.6}$$

Met behulp van deze vergelijking kunnen we de wet van Bernoulli afleiden voor stationaire stromingen. We gaan er vanuit dat de massakracht conservatief is. Dat wil zeggen dat $\mathbf{F} = \nabla f$, met f een potentiaal. De impulsvergelijking kan dan herschreven worden tot

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \left(- \int \frac{dp}{\rho(p)} + f \right). \tag{2.7}$$

In het stationaire geval, dus als $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$, wordt de versnellingsterm gegeven door $\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{1}{2}\nabla|\mathbf{v}|^2 + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}$. De vector $(\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}$ staat loodrecht op de snelheid $\mathbf{v}$. zodat geldt

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \int \frac{dp}{\rho(p)} - f \right) = 0. \tag{2.8}$$

Langs een stroomlijn reduceert de stationaire Eulervergelijking tot de wet van Bernoulli

$$\frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \int \frac{dp}{\rho(p)} - f = \text{constant}. \tag{2.9}$$

Als er geen sprake is van massakrachten en wanneer de dichtheid constant is krijgen we de meest eenvoudige vorm van de wet van Bernoulli, namelijk

$$\frac{1}{2}\rho|\mathbf{v}|^2 + p = \text{constant} \tag{2.10}$$

langs een stroomlijn.

2.2.3 Potentiaalstroming

De stroming buiten de grenslaag kunnen we beschouwen als een potentiaalstroming. Dit houdt in dat we uitgaan van een homogene stroming, in een niet-viskeuze vloeistof. Verder kijken we alleen maar naar een onsamendrukbare vloeistof (we weten inmiddels dat dit voor auto's geldt). Er bestaat in dit geval een snelheidspotentiaal Φ, zodat $\mathbf{v} = \nabla\Phi$ geldt. Uit de continuïteitsvergelijking volgt dan dat er moet worden voldaan aan de volgende 2-dimensionale potentiaalvergelijking

$$\Delta\Phi = \Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0. \tag{2.11}$$

Met deze vergelijking kunnen we de snelheidsvector $\mathbf{v}$ bepalen en vervolgens met de wet van Bernoulli de druk p. Voor het oplossen van de potentiaalvergelijking zijn geschikte randvoorwaarden nodig. Deze kunnen per voorwerp verschillen. Voor het oplossen van de potentiaalvergelijking maken we gebruik van een stroomfunctie $\Psi(x, y)$. De lijnen waarvoor geldt dat $\Psi = \textit{constant}$ zijn de stroomlijnen. Naast deze stroomlijnen zijn er ook equipotentiaallijnen, waarvoor geldt dat $\Phi = \text{constant}$. Deze twee soorten stroomlijnen staan loodrecht op elkaar (zie ook [7]). Samen vormen Ψ en Φ de complexe snelheidspotentiaal $\chi = \Phi + i\Psi$. Met behulp van deze complexe snelheidspotentiaal kunnen we stroomlijnen rond een lichaam bepalen en de snelheidspotentiaal Φ bepalen. Hiermee kunnen we dan de druk rond een lichaam in een stroming bepalen.

2.2.4 Grenslaag en het Reynoldsgetal

Voordat we de grenslaag gaan bestuderen introduceren we eerst het getal van Reynolds (of korter het Reynoldsgetal). We kunnen de bekende Navier-Stokes vergelijkingen zonder massakracht dimensieloos maken door deze om te schrijven. Daarvoor hebben we de karakteristieke lengte en snelheid nodig. De karakteristieke snelheid (V) is de snelheid op grote afstand van het voorwerp in de stroming en de karakteristieke lengte (L) is de lengte van het voorwerp. De volgende dimensieloze variabelen kunnen dan gemaakt worden

$$(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}) = \frac{1}{L}(x,y,z),\ \widetilde{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{V},\ \widetilde{p} = \frac{p}{\rho V^2},\ \widetilde{t} = \frac{Vt}{L}$$

De Navier-Stokes vergelijkingen kunnen dan in vectorvorm als volgt geschreven worden

$$\frac{D\widetilde{\mathbf{v}}}{D\widetilde{t}} = -\nabla\widetilde{p} + \frac{1}{Re}\widetilde{\Delta}\widetilde{\mathbf{v}} \tag{2.12}$$

Binnen deze herschreven vergelijking is $Re = \frac{\rho VL}{\mu} = \frac{VL}{\nu}$ het Reynoldsgetal. Het getal is dimensieloos en geeft een maatstaf voor de verhouding tussen traagheidskrachten [1] en viskeuze krachten. Als het Reynoldsgetal klein is ($Re << 1$) hebben we te maken met grote viskeuze krachten. De vloeistof is dus stroperig en/of de snelheid van de stroming zeer laag. Als het Reynoldsgetal groot is, groot wil in dit geval zeggen veel groter dan 1, dan heeft de viscositeit weinig invloed op de stroming rond een lichaam. Alleen in een dunne laag om het lichaam, de zogenaamde grenslaag, speelt de viscositeit een rol van betekenis. De stroming hangt af van het Reynoldsgetal. Voor een vast lichaam in een medium (zoals een auto in een omgeving van lucht) betekent dit, dat het stromingspatroon afhangt van de karakteristieke snelheid.

Voor een auto in een luchtomgeving kunnen we nu het Reynoldsgetal gaan berekenen. We hebben daarvoor nodig de lengte van de auto (l), de karakteristieke snelheid van de auto (V) en de kinematische viscositeitscoëfficiënt (ν). Er geldt dan

$$Re = \frac{Vl}{\nu}$$

Een gemiddelde auto is $4,0$ meter lang. De kinematische viscositeitscoëfficiënt kunnen we berekenen met behulp van $\nu = \frac{\mu}{\rho}$. Voor lucht geldt dat $\mu = 2,0 \cdot 10^{-5}$ Pa·s en $\rho = 1,3\text{kg/m}^3$. Voor lucht geldt dan dat $\nu = 7,8 \cdot 10^{-6}$. Als de auto 50 km/h (constante V) rijdt krijgen we dat $Re = 7,2 \cdot 10^6$. Dit Reynoldsgetal is veel groter dan 1. We kunnen concluderen dat viscositeit alleen een rol speelt in de grenslaag rond de auto. Daarbuiten heeft de viscositeit dus geen noemenswaardige invloed op de stroming.

2.2.5 Stromingen in grenslaag

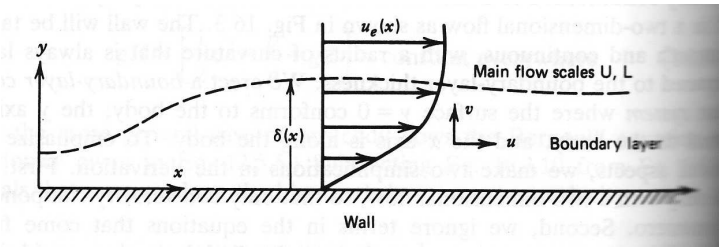
Zoals al eerder is genoemd is de grenslaag (*Boundary Layer*) een laag op het oppervlak waar de effecten van viscositeit optreden. Buiten de grenslaag kunnen we de stroming beschouwen zonder de viskeuze effecten. Het idee van de grenslaag stamt uit 1904 en is afkomstig van Ludwig Prandtl. Hij stelde dat als er weinig viscositeit is, de effecten alleen in een dunne laag op het oppervlak plaatsvinden. Dit geldt voor zowel gassen als vloeistoffen. Voordat we echt met de stromingen in de grenslaag kunnen gaan werken is het noodzakelijk om te kijken naar

[1] krachten van de vorm massa x versnelling

de definitie van 'dunne' laag. Om te kijken naar het begrip dun hebben we de karakteristieke lengte (L) nodig. Als we de dikte van de grenslaag δ nemen, dan moet het volgende gelden

$$\frac{\delta}{L} << 1$$

Het belangrijkste van de hypothese van Prandtl is dat de drukverandering in de dunne grenslaag uiteindelijk nul is.



Figuur 2.5: Grenslaag op een vlakke wand. Afbeelding afkomstig uit [4].

Voor stromingen in een grenslaag kunnen we vergelijkingen afleiden. Daarbij gaan we kijken naar de orde van termen in de vergelijkingen. We weten dat $\frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{U}{\delta}$, loodrecht op de snelheidsrichting van u. Deze kunnen we ook afschatten op de volgende manier

$$\frac{\partial u}{\partial y} \approx O\left[\frac{U}{L}\right]$$

We gaan uit van een twee-dimensionale stroming en nemen de dichtheid ρ. Allereerst moeten bij een grenslaag de variabelen geschaald worden, waarbij de variabelen dimensieloos gemaakt worden. De tangentiële snelheid u schalen we met karakteristieke snelheid U, de tangentiële afstand x met karakteristieke lengte L en de 'normaal' afstand y schalen we met dikte δ. Deze dikte is onbekend, maar er wordt verondersteld dat deze naar nul gaat als het Reynoldsgetal naar oneindig gaat. Daarnaast hebben we nog de verticale snelheid v. Hiervoor hebben we een onbekende schaling α, dus $\overline{v} = \frac{v}{\alpha}$. We gaan nu de continuïteitsvergelijking bekijken met een schatting van de orde van de termen om een equivalentierelatie voor α te vinden. Hiervoor is de dichtheid ρ constant.

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial u}{\partial x} & + & \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ O\left[\dfrac{U}{L}\right] & & O\left[\dfrac{\alpha}{\delta}\right] \end{array} \tag{2.13}$$

We vinden nu de volgende relatie voor α

$$\alpha \approx \frac{\delta}{L} U$$

Vervolgens kunnen we op dezelfde manier kijken naar de bewegingsvergelijking in de y-richting. Ook hier schrijven we een schatting van de grootte (orde) onder de vergelijking. Aangezien er sprake is van een onbekende schaling van de druk, kunnen we een schaling P

kiezen. Daarbij wordt er vanuit gegaan dat $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$, dus dat er sprake is van een stationair probleem.

$$\begin{array}{ccc} u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} & = & -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \\ O\left[\frac{U}{L}\frac{\delta U}{L}\right] O\left[\frac{\delta}{L}\frac{U}{\delta}\frac{\delta U}{L}\right] & & O\left[\frac{P}{\rho U^2}\right] O\left[\frac{\nu}{L^2}\frac{\delta U}{L}\right] O\left[\frac{\nu}{\delta^2}\frac{\delta U}{L}\right] \end{array} \tag{2.14}$$

Vervolgens kunnen we deze orde termen herschrijven tot

$$O\left[\left(\frac{\delta}{L}\right)^2\right] + O\left[\left(\frac{\delta}{L}\right)^2\right] = O\left[\frac{P}{\rho U^2}\right] + O\left[\frac{1}{Re}\left(\frac{\delta}{L}\right)^2\right] + O\left[\frac{1}{Re}\right]$$

We nemen nu als schaal $P = \rho U^2$ en wanneer $Re \to \infty$ krijgen we het volgende

$$O[0] + O[0] = O[1] + O[0] + O[0]$$

Hieruit volgt dat $\frac{dp}{dy} = 0$ in de grenslaag, dus de druk is constant in de richting loodrecht op de wand. Het gevolg hiervan is dat de drukkrachten op een lichaam alleen worden veroorzaakt door de niet-viskeuze 'buiten' stroming.

Naast de bewegingsvergelijking in de y-richting, is er ook een bewegingsvergelijking in de x-richting voor de grenslaag. Dit ziet er als volgt uit

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{2.15}$$

Ook in deze vergelijking kunnen we weer naar de orde van de termen kijken

$$O\left[\frac{U^2}{L}\right] + O\left[\frac{\delta}{L}\frac{U^2}{\delta}\right] = O\left[\frac{1}{\rho}\frac{\rho U^2}{L}\right] + O\left[\frac{\nu U}{L^2}\right] + O\left[\frac{\nu U}{\delta^2}\right]$$

Na delen door U^2/L krijgen we de volgende dimensieloze ordes

$$O[1] + O[1] = O[1] + O\left[\frac{1}{Re}\right] + O\left[\left(\frac{\delta}{L}\right)^{-2}\frac{1}{Re}\right]$$

Als we wederom het Reynoldsgetal naar oneindig laten gaan, dan blijven de eerste orde termen natuurlijk staan. De term met $1/Re$ zal wegvallen. Alleen bij de laatste term is het niet direct duidelijk wat er gebeurt, want $\frac{1/Re}{(\delta/L)^2} \approx \frac{0}{0} \to ?$ Om tot een oplossing te komen stellen we dat bovenstaande breuk eindig is zodat de volgende equivalentierelatie geldt

$$\frac{\delta}{L} \approx \sqrt{\frac{1}{Re}}$$

Hieruit volgt dan dat de laatste term van de orde 1 wordt, als het Reynoldsgetal naar oneindig gaat. Als we alles samen bekijken hebben we de volgende bewegingsvergelijkingen in de grenslaag

$$\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Om de bewegingsvergelijking in de x-richting op te stellen kunnen we ook kijken naar de Eulervergelijking voor een element met massa $\rho\Delta x\Delta y\Delta z$. Deze kan als volgt geschreven worden

$$\rho\Delta x\Delta y\Delta z\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = F$$

We kunnen nu met behulp van deze vergelijking de bewegingsvergelijking opstellen van een stroming in de grenslaag. We gaan wederom uit van een twee-dimensionale grenslaag en kiezen daarbij het x,y-vlak (zie figuur 2.5). Bovenstaande vergelijking wordt dan

$$\rho\Delta x\Delta y\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y$$

Na het wegdelen van Δx en Δy en het substitueren van de schuifspanning krijgen we de *grenslaag bewegingsvergelijking*

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{2.17}$$

De hierbijbehorende continuïteitsvergelijking ziet er voor een samendrukbare stroming als volgt uit

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = -\frac{\partial p}{\partial t} \tag{2.18}$$

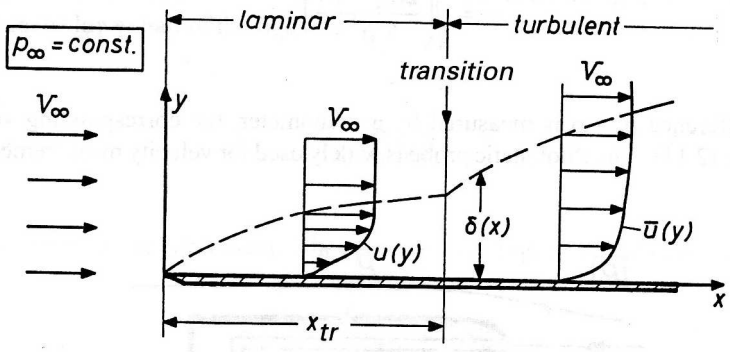
Als we te maken hebben met een onsamendrukbare stroming verandert dit in $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$.

Om te kijken wat voor effecten er zijn binnen de grenslaag van een auto gaan we eerst een twee-dimensionale plaat bekijken. Binnen de grenslaag worden twee stromingen onderscheiden, de laminaire en turbulente stroming. Bij een laminaire stroming lopen de stroomlijnen bijna evenwijdig/parallel aan de plaat. In dit geval zijn zowel snelheid V_∞ en p_∞ constant. De stroming moet dan wel voldoen aan de no-slip conditie langs de wand.

Naarmate we een grotere x neemt de snelheid V_∞ af en de kinematische viscositeitscoëfficiënt ν toe. De dikte δ van de grenslaag hangt echter af van deze twee grootheden en zal toenemen. De volgende equivalentierelatie geldt

$$\delta \approx \sqrt{\frac{\nu x}{V_\infty}}$$

Als de dikte van de grenslaag te groot wordt verandert de laminaire stroming in een turbulente stroming. Een turbulente stroming bevat weinig tot geen regelmaat en is niet eenvoudig te beschrijven.



Figuur 2.6: Stroming in de grenslaag van een vlakke plaat. Op een bepaald punt x_{tr} is er een overgang van laminaire naar turbulente stroming. Afbeelding afkomstig uit [1].

Om de laminaire stroming langs een vlakke plaat wiskundig te bekijken hebben we het volgende stelsel vergelijkingen

$$\begin{aligned} u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} &= \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Om dit stelsel op te lossen zijn er twee randvoorwaarden nodig. Deze zijn voor $y = 0$, $u = v = 0$ en voor $y = \infty$, $u = u_0$. Deze voorwaarden hebben de betekenis dat er op oneindige afstand de snelheid niet wordt beïnvloed en dat er 'no-slip' geldt op het oppervlak. Het probleem wat nu ontstaat is voor het eerst opgelost door Heinrich Blasius in 1908. Om nu de vergelijkingen op te lossen introduceren we een stroomfunctie $\Psi(x, y)$. Deze stroomfunctie moet voldoen aan

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y},\ v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

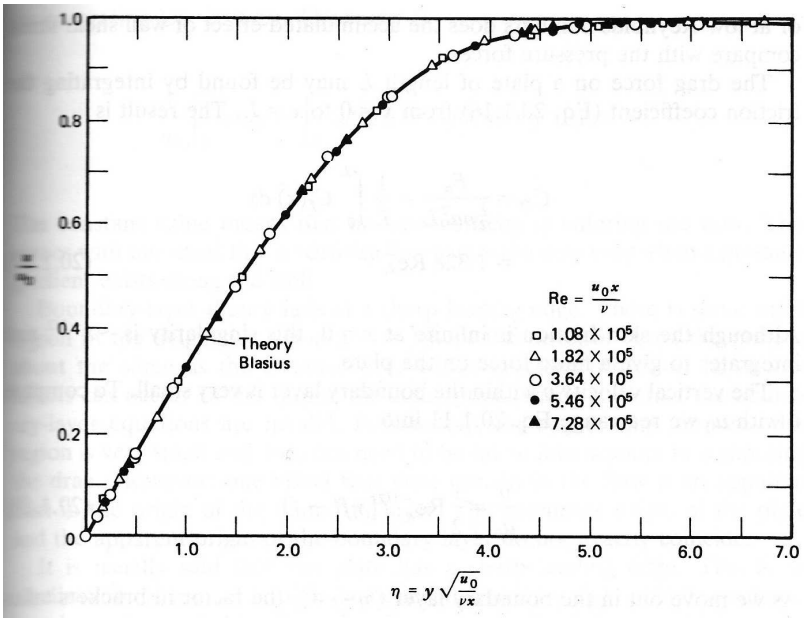
Zoals direct te zien is voldoet deze functie aan de continuïteitsvergelijking. Daarnaast wordt het probleem nu een normale differentiaalvergelijking, welke makkelijk op te lossen is. Omdat er met dimensieloze parameters nog makkelijker gewerkt kan worden introduceren we $\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu x/u_0}}$. Hiermee kunnen we de volgende dimensieloze functie opstellen

$$f(\eta) = \frac{\Psi}{\sqrt{\nu x u_0}}.$$

Na een aantal schalingen van de snelheid krijgen we de volgende differentiaalvergelijking, welke met de gegeven beginvoorwaarden en standaard methoden opgelost kan worden.

$$f''' + \frac{1}{2} f f'' = 0 \tag{2.19}$$

Een oplossing van het probleem is te zien in figuur 2.7, waar η tegen de geschaalde snelheid is uitgezet.



Figuur 2.7: Oplossing van Blasius voor de stroming in een grenslaag. De verhouding tussen de snelheid en karakteristieke snelheid is uitgezet tegen de parameter η. Verder zijn er resultaten aangegeven voor verschillende waarden van het Reynoldsgetal. Afbeelding afkomstig uit [4].

Naast laminaire stromingen langs een plaat zijn er ook turbulente stromingen. Voor een turbulente stroming in de grenslaag kunnen we benaderende vergelijkingen opstellen. Daarvoor gaan we variabele waarden voor u, v en p invoeren. Deze parameters bestaan uit een tijdsgemiddelde term (aangegeven met hoofdletter), met daarbij opgeteld een tijdsafhankelijke term. De parameters zien er dan als volgt uit

$$\begin{aligned} u &= U(x,y) + u_1(x,y,z,t) \\ v &= V(x,y) + v_1(x,y,z,t) \\ p &= P(x) + p_1(x,y,z,t) \end{aligned}$$

Als we dit nu substitueren in 2.17 krijgen we de volgende vergelijking met bijbehorende continuïteitsvergelijking

$$\rho\left[(U+u_1)\frac{\partial}{\partial x}(U+u_1) + (V+v_1)\frac{\partial}{\partial y}(U+u_1)\right] = -\frac{\partial}{\partial x}(P+p_1) + \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\frac{\partial}{\partial y}(U+u_1)\right] \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(U+u_1) + \frac{\partial}{\partial y}(V+v_1) = 0 \quad (2.21)$$

Omdat we alleen de stroming willen weten in de grenslaag als functie van de tijd nemen we de gemiddelden van elke termen in vergelijkingen 2.20 en 2.21. Uiteindelijk krijgen we dan voor een turbulente stroming in een grenslaag de volgende vergelijkingen

$$\rho\left(U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial u}-\rho\overline{u_1u_2}\right) \tag{2.22}$$

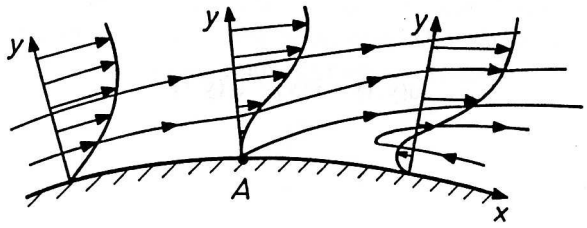
$$\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0 \tag{2.23}$$

In de eerste vergelijking vinden we aan de rechterkant de totale afschuifspanning. De rest van de vergelijkingen komen overeen met degene die we hadden gevonden voor een laminaire stroming in een grenslaag. Het oplossen van deze vergelijking gaat helaas niet op de manier van Blasius, zoals bij een laminaire stroming. Dit heeft te maken met de extra term $\overline{u_1v_1}$, waarmee de tijdsgemiddelde snelheid wordt aangeduid. Het is dan ook lastiger om iets over de turbulente stroming te zeggen.

Binnen de grenslaag gaat op een bepaalde x_{tr} de laminaire stroming over in een turbulente stroming (zie figuur 2.6). Met behulp van het Reynoldsgetal kunnen we zien wanneer dit optreedt. Voor een vlakke plaat geldt de volgende relatie

$$Re_{x_{tr}}=\frac{V_\infty x_{tr}}{\nu}=5\cdot10^5$$

De overgang van een laminaire stroming naar een turbulente stroming hangt dus af van de snelheid, het Reynoldsgetal en de viscositeitscoëfficiënt. De stromingen in de grenslaag hangen sterk af van de drukverdeling bij de stroming buiten de grenslaag. Als de druk toeneemt in de stroomrichting van de grenslaagstroming, dan is een omgekeerde stroming zelfs mogelijk.



Figuur 2.8: Loslaten van een stroming (*seperation*). Afbeelding afkomstig uit [1].

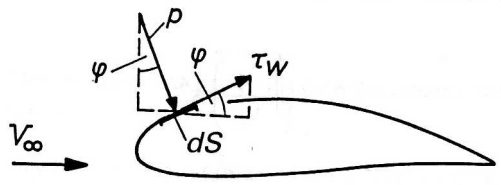
Dit verschijnsel wordt ook wel loslaten (*separation*) genoemd. Op het loslaatpunt, dus het punt waar de stroming 'weer terug gaat' moet gelden dat

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$

Het loslaten van de stroming treedt veel sneller op bij een laminaire stroming, dan bij een turbulente stroming.

2.2.6 Drag en Lift

Binnen de stromingsleer wordt er vaak gesproken over *drag* en *lift*. Ook bij de stromingen rond auto's spelen deze termen een rol. De oorzaak van lift en drag ligt in de druk op het lichaam in een stroming en de krachten daarop. De lift wordt veroorzaakt door de druk, welke loodrecht op het oppervlak staat. De drag wordt daarentegen deels veroorzaakt door de druk en door de schuifkrachten (*shear forces*) langs het oppervlak.



Figuur 2.9: Bepaling van drag rond een vleugelprofiel. Ditzelfde gaat ook op voor ander lichamen. Afbeelding afkomstig uit [1].

Voor het bekijken van de drag gaan we wederom uit van een vlakke plaat met lengte L. De drag is een kracht die de druk en viskeuze effecten op een lichaam samen neemt. Voor een vlakke plaat hebben we aan de wand een weerstand met bijbehorende weerstandscoëfficiënt C_f. Deze geeft een verband tussen de spanning (τ_0) op de wand en de druk.

$$C_f = \frac{\tau_0}{\frac{1}{2}\rho u_0^2} \tag{2.24}$$

Met behulp van deze weerstandscoëfficiënt kunnen we nu de drag F_D op de plaat bepalen. Daarvoor gaan we een integratie uitvoeren over de lengte van de plaat.

$$C_D = \frac{1}{L}\int_0^L C_f(x)dx = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho u_0^2 L}$$

Hierin is C_D de dragcoëfficiënt. Als we kijken naar de zogenaamde *bluff bodies* dan kunnen we vergelijking voor de drag schrijven als

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho u_0^2 A} \tag{2.25}$$

In deze formule is A het oppervlakte van het lichaam in de stroming. De richting van de dragkracht is parallel aan de beweging van een lichaam en is 'naar achteren' gericht. Naarmate de snelheid toeneemt zal de kracht dus groter worden. Hierdoor wordt ook de weerstand op het lichaam in de stroming groter. De drag D kan in het algemeen ook worden geschreven als $D = D_f + D_p$. Hierin is D_f de frictiedrag en D_p de drag veroorzaakt door de druk. Deze twee soorten drag kunnen we berekenen door een klein stukje dS op de rand te nemen. De druk en spanningskracht maken een hoek φ met de verticale en horizontale richting, zoals te zien is in figuur 2.9. De frictiedrag onstaat door de component van de spanningskrachten te integreren in de richting van de 'vrije stroming', zodat

$$D_f = \oint \tau \cos(\varphi) dS. \tag{2.26}$$

Op identieke wijze kan ook de drukdrag worden berekend, door de component van de druk te integreren in de richting van de vrije stroming, zodat geldt

$$D_p = \oint p \sin(\varphi) dS. \tag{2.27}$$

Zoals al eerder genoemd is de lift een kracht die in de normaalrichting (dat wil zeggen loodrecht) van de bewegingsrichting van een lichaam staat. Vaak wordt er over lift gesproken

bij vleugelprofielen. Deze lift zorgt er immers voor dat een vliegtuig kan vliegen. Ook op auto's treden deze liftkrachten op. De wiskundige vergelijking voor lift L komt overeen met de vergelijking die we hebben bij drag. Deze ziet er als volgt uit

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho u_0^2 A} \tag{2.28}$$

In deze formule staat C_L voor de liftcoëfficiënt. Naast de lift wordt er ook vaak gesproken over *downforce*. Dit kunnen we beschouwen als negatieve lift.

Naast de drag- en lift-krachten werken er ook nog zogenaamde zij-krachten (*side forces*) op een auto in een stroming. Ook hier is weer een vergelijking voor op te stellen waarmee we de kracht Y kunnen berekenen. In deze vergelijking staat wederom een coëfficiënt, C_Y genaamd.

$$C_Y = \frac{Y}{\frac{1}{2}\rho u_0^2 A} \tag{2.29}$$

Zoals te zien is zijn alle drie vergelijkingen gelijk aan elkaar, alleen de krachten met bijbehorende coëfficiënten verschillen van elkaar. In de praktijk wordt er vooral gekeken naar de drag en lift.

In tabel 2.1 zijn een aantal voorbeelden te vinden van waarden van de drag- en lift-coëfficiënten. Zoals bij racewagens te zien is kan dit ook een negatieve waarde zijn. In het algemeen geldt dat een hogere coëfficiënt meer drag, danwel lift betekent.

	C_L	C_D
Ronde plaat	0	1,17
Vleugelvorm	0	0,82
Personenauto	0,32	0,43
Racewagen	-3,00	0,75

Tabel 2.1: Verschillende lift- en drag-coëfficiënten.

Nu we weten wat drag en lift zijn, kunnen we tot slot nog kijken wat voor oorzaken ze hebben en hoe groot de invloed ervan is op de coëfficiënten. In de tabellen 2.2 en 2.3 zijn een aantal elementen te zien die bijdragen aan de grootte van de drag- en lift-coëfficiënten.

Wat?	ΔC_D
Materiaal wrijving	0,04 - 0,05
Drag van koeling	0,00 - 0,06
Interne stromingen	0,00 - 0,05
Drag van de vorm	0,00 - 0,45
Drag door lift	0,00 - 0,60

Tabel 2.2: Bijdrage aan de dragcoëfficiënt van een auto.

2.3 Interne stroming

Naast de beschreven externe stromingen zijn er ook nog interne stromingen waarmee rekening gehouden moet worden. Een interne stroming kan worden gezien als een stroming tussen twee

Wat?	ΔC_L
Voertuigvorm	0,35 (tot -0,10)
Vleugels	0,00 (tot -2,00)
Interactie vleugels/voertuig	0,00 (tot -2,00)

Tabel 2.3: Bijdrage aan de liftcoëfficiënt van een auto.

wanden. In tegenstelling tot de stroming rond een lichaam kunnen de viskeuze effecten nu niet in een grenslaag worden weergegeven. De effecten treden op in het hele stromingsveld. Ook in dit geval kan de viskeuze stroming gekarakteriseerd worden door het Reynoldsgetal

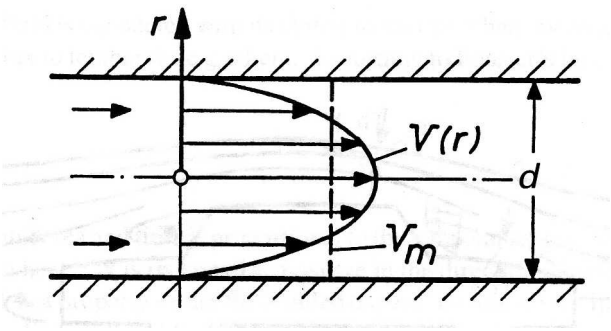
$$Re_d = \frac{V_m d}{\nu} \tag{2.30}$$

met d de afstand tussen de wanden en V_m de *mean* snelheid van de stroming. Ook voor de interne stromingen zijn basisvergelijkingen op te stellen. Voor het geval van een stroming in een buis kan de wet van massa behoud worden geschreven als

$$\rho \int_S V dS = \text{constant} \tag{2.31}$$

met V de stroomsnelheid en S de oppervlakte loodrecht op de stroming. De *mean* snelheid kan dan geschreven worden als

$$V_m = \frac{1}{S} \int_S V dS.$$



Figuur 2.10: Stroming door een buis. Afbeelding afkomstig uit [1].

Bij het bekijken van de interne stroming gaan we uit van een 1-dimensionaal probleem. De Tweede wet van Newton geldt nog steeds, alleen moet er naast de drukkrachten ook rekening gehouden worden met de viskeuze krachten die op treden. Door de viskeuze effecten is er sprake van weerstand, waardoor de druk omlaag gaat. Als het drukverlies wordt aangeduidt met Δp, dan kan de vergelijking van Bernoulli (2.10) voor interne stroming geschreven worden als

$$p_1 = \frac{\rho}{2} V_{m_1}^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} V_{m_2}^2 + \Delta p. \tag{2.32}$$

De afname van de druk is gerelateerd aan de dynamische druk $\rho V_{m_1}^2/2$, welke de dimensieloze verliescoëfficiënt geven

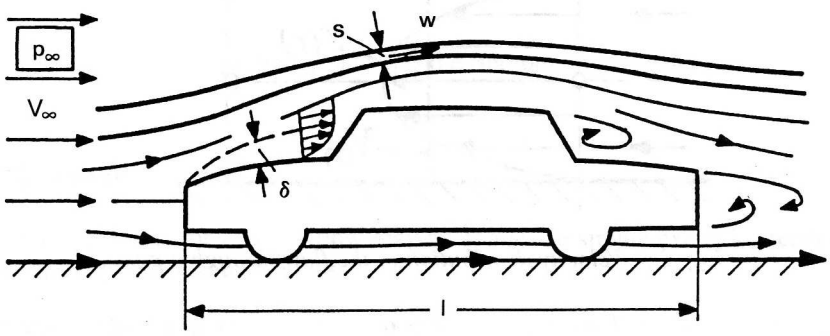
$$\zeta = \frac{\Delta p}{\frac{\rho}{2} V_{m_1}^2}. \tag{2.33}$$

Deze verliescoëfficiënt is verschillend voor interne stromingen en hangt in het algemeen ook af van het Reynoldsgetal. Bij auto's is deze coëfficiënt een criterium voor kwaliteit van de koeling van de motor en de radiatoren. Voor een auto, maar ook andere voertuigen, zijn de interne en externe stromingen aan elkaar gerelateerd. Zo maakt het koelsysteem van de motor gebruik van het drukverschil in de externe stroming rond een auto. Ditzelfde geldt voor de ventilatie in de auto zelf.

2.4 Stroming rond een auto wiskundig beschreven

Nu de basis van stromingen rond voorwerpen bekend is, kunnen we nu gaan kijken naar stromingen rond een auto. Normaal gesproken rijdt een auto met een bepaalde snelheid door de lucht. In het model gaan we er vanuit dat de auto stilstaat en de lucht om de auto heen stroomt. De lucht heeft daarbij dan de snelheid, waarmee de auto rijdt. Aangezien deze snelheid in verhouding niet te groot is kunnen we de dichtheid van lucht constant nemen en dus een onsamendrukbare stroming bekijken. Stromingen rond 3-dimensionale lichamen, zoals een auto, zijn moeilijk te beschrijven. Vaak wordt er gekeken naar een 2-dimensionaal model. Dit is ook het geval bij het beschrijven van de luchtstroming rond een auto. Een auto wordt in de lengte richting bekeken.

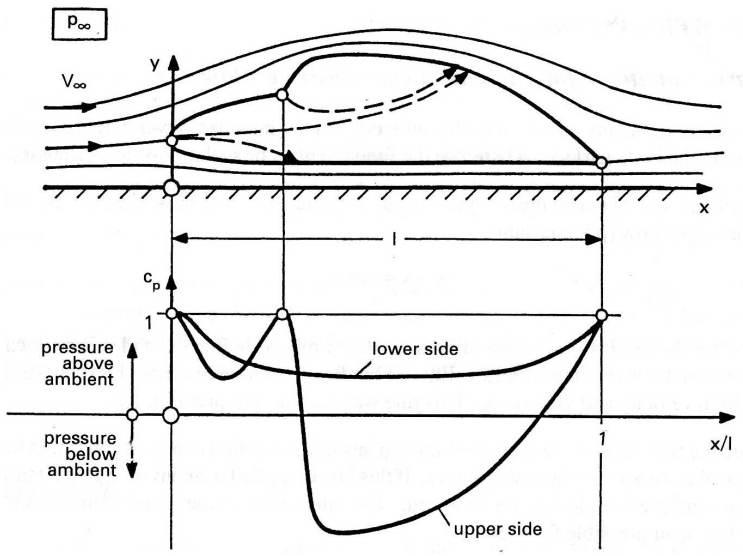
De stromingen rond dit versimpelde model kunnen worden beschreven als een potentiaal stroming. Hiermee kunnen stroomlijnen rond de auto worden bepaald en worden getekend.



Figuur 2.11: Schets van de stroming rond een auto, 2-dimensionaal. Afbeelding afkomstig uit [1].

Naast deze potentiaalstroming rond een auto, treden er langs het oppervlak nog meer effecten op. De viscositeit die optreedt bij stromingen, worden beperkt tot een kleine laag boven het oppervlak van een auto (de zogenaamde wand). In deze grenslaag verschilt de stroming met de stroming daarbuiten. Vanwege de viskeuze effecten gaat in de grenslaag op een bepaald moment de laminaire stroming over in een turbulente stroming. Hierdoor verandert de dikte van de grenslaag en neemt de weerstand toe.

Naast het bepalen van de stroming kan ook de drukverdeling worden gegeven voor een lichaam met autovorm in een stroming. Hierbij speelt de drukcoëfficiënt c_p een rol, deze wordt



Figuur 2.12: Stroming rond een autovormig lichaam met bijbehorende drukverdeling. De drukverdeling bestaat uit twee grafieken. De ene grafiek (*lower side*) geeft de druk weer als we langs de onderkant van de auto 'lopen' en de andere (*upper side*) geeft de druk aan de bovenkant weer. De oppervlakte tussen de grafieken geeft de grootte van de liftkrachten. Afbeelding afkomstig uit [1].

gegeven als

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} \tag{2.34}$$

Met behulp van de wet van Bernoulli kunnen we dit worden omschrijven naar

$$c_p = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2}\rho V_\infty^2} = 1 - \left(\frac{w}{V_\infty}\right)^2 \tag{2.35}$$

In deze formule is w de lokale snelheid. Als deze snelheid nul is, dan is de drukcoëfficiënt gelijk aan 1. Er kan bij de drukverdeling onderscheid worden gemaakt tussen het oppervlak aan de bovenkant en het oppervlak aan de onderkant. Als de drukverdeling in figuur 2.12 wordt bekeken, dan is het drukniveau aan de bovenkant veel groter dan aan de onderkant. Dit houdt in dat er een omhoog gerichte lift werkt op het voertuig. Als echter de x-componenten van de druk worden geïntegreerd, dan zou de drag D gelijk zijn aan nul. Dit is in overeenstemming met de Paradox van d'Alembert. Deze zegt dat in een onsamendrukbare, niet viskeuze stroming er geen weerstand (drag) optreedt. Verder kan met de drukverdeling worden bepaald, waar bij een auto lucht in- en uitgangen kunnen zitten.

De aerodynamica van de auto (en daarmee ook de stroming) wordt uitgebreid beschreven in het volgende hoofdstuk.

Hoofdstuk 3

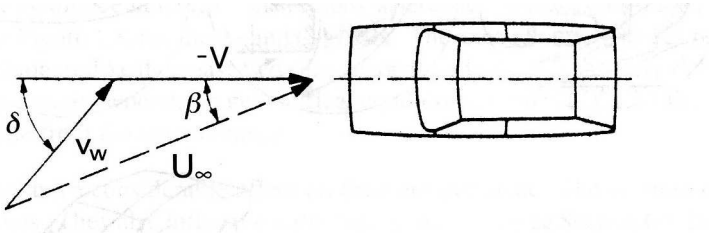
Aerodynamische drag van personenauto's

Bij de luchtstroming rond auto's gaat het vaak over de drag. Het bepalen van de drag is tot op de dag van vandaag helaas nog steeds niet analytisch mogelijk. Met behulp van Computational Fluid Dynamics zijn er alleen numerieke benaderingen voor de drag te maken. Door deze berekeningen is het echter wel mogelijk om schattingen van de aerodynamische drag te maken. Verder zijn diverse experimenten, in bijvoorbeeld windtunnels, een grote informatiebron voor de stromingen en drag rond een auto. De oorzaak van de moeilijk te bepalen drag van auto's komt door het feit dat auto's zogenaamde *bluff bodies* zijn. Dit zijn lichamen, die in verhouding redelijk lang zijn, met een groot oppervlak loodrecht in de stroming.

Zoals we al eerder gezien hebben treden viskeuze effecten alleen op in de grenslaag, een dunne laag boven het oppervlak. De drag in deze grenslaag kan met de algemene vergelijkingen voor turbulente stromingen worden bepaald. Daarbij kijken we alleen 2-dimensionaal. Verder kan specifiek het loslaatpunt van een stroming worden bepaald. Hierdoor is het mogelijk om de vorm van de auto te optimaliseren ten opzichte van de drag. Ook is het mogelijk om met de grenslaagtheorie, de informatie die wordt verkregen door schaalmodellen, om te zetten naar resultaten voor echte auto's.

Het beschrijven van de stromingen rond auto's is dus vooral gebaseerd op de algemene vergelijkingen uit de stromingsleer en op data. Deze data kan zowel numeriek als experimenteel zijn bepaald. De luchtstroming van een auto hangt naast de snelheid van de auto mede af van de windsnelheid. Een auto rijdt in de open lucht waar altijd sprake is van wind, met snelheid V_w. Samen met de snelheid V geeft dit een relatieve stroomsnelheid U_∞. Deze situatie is te zien in figuur 3.1.

Bij het bekijken van de stroming rond een auto laten we de wind eerst buiten beschouwing. Er wordt vanuit gegaan dat de auto alleen een snelheid V heeft. De stroming van lucht rond een auto kan op twee verschillende manieren loslaten van het oppervlak van de auto. Ten eerste kan de stroming loslaten op de randen van het oppervlak. Er onstaan in dit geval wervels die parallel aan de loslaatlijn (de lijn op het loslaatpunt) zijn. Op een aantal plaatsen aan de voorkant van de auto en ter hoogte van de voorruit laat de stroming los en ontstaan er wervels. Een stukje verderop komt de stroming weer aan het oppervlak en lijkt het laminair te zijn. Het loslaten van de stroming kan echter ook aan het einde van het oppervlak (de achterkant van een auto) plaatsvinden. Dit veroorzaakt het zogenaamde *dead water*: aan de



Figuur 3.1: Auto met zijwind, welke meestal buiten beschouwing wordt gelaten. Afbeelding afkomstig uit [1].

achterkant ontstaat een turbulente stroming.

Een tweede manier van loslaten van de stroming van het oppervlak is een drie-dimensionaal probleem. Op de hoeken vormt zich een kegelvormige wervel. Deze wervels komen overeen met de wervels die ontstaan bij vliegtuigvleugels. In dit geval is de richting van de kegelvormige stoming gelijk aan de stroomrichting van de lucht. Zie daarvoor ook figuur 3.2.

De stroming van lucht die rond een auto gaat is aan het oppervlak inmiddels bekend. De luchtstromingen rond de bodemplaat en rond de wielen zijn ingewikkelde drie dimensionale stromingen.

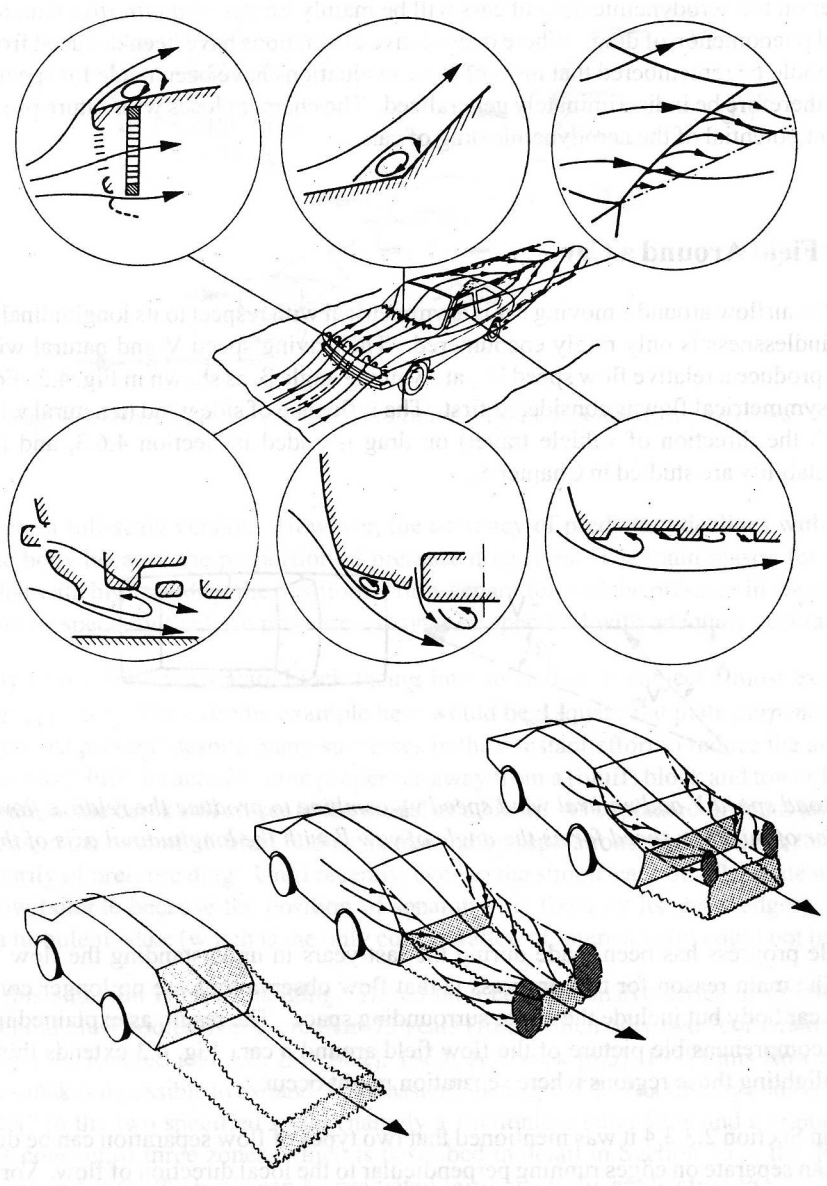
3.1 Analyse van de drag

Het doel van het analyseren van de drag is een verband te leggen tussen oorzaak en gevolg. Dus wat veroorzaakt de drag en wat zijn de gevolgen daarvan? Bij de stromingen rond een auto is dit behoorlijk ingewikkeld. Het is echter mogelijk om de drag op de volgende drie manieren te bekijken.

- Onderzoek de systemen uit de natuurkunde, welke drag veroorzaken.
- Het bekijken van delen van de drag ten opzichte van een lokale oorsprong.
- Het bekijken van de effecten van de drag op het omliggende stromingsveld.

Bij alle manieren krijgen we in principe goede resultaten. Er moet alleen op gelet worden dat de verschillende manieren niet door elkaar gehaald worden. Als eerste gaan we kijken naar de fysische oorzaak van drag. Hiervoor wordt de luchtstroming rond een auto vergeleken met de stroming van een viskeuze vloeistof met een ideale stroming. Deze ideale stroming wil zeggen dat er geen weerstand is van het medium, waarin de vloeistof zich beweegt. De drag, de aerodynamische weerstand van beweging, kan worden verklaard door het verschil tussen beide stromingen. De drag voor een frictieloze stroming is immers altijd nul (Paradox van d'Alembert). Met numerieke methoden is het mogelijk om de stroming zonder drag, dus een niet viskeuze stroming, rond een auto te bepalen. De drag is nu te vinden op die plaatsen waar de viskeuze stroming afwijkt van de ideale stroming.

Tussen de ideale en werkelijke stroming zijn nog een tweetal grote verschillen. Ten eerste kan de stroming in werkelijkheid loslaten (*flow separation*) en ten tweede zijn er afschuifspanningen op het oppervlak. Deze twee zorgen ervoor dat de drukverdeling er anders uit ziet en dat de drag ontstaat. In de grenslaag zal bij een auto de stroming aan de achterkant altijd loslaten. De totale drag van de auto volgt uit vergelijkingen 2.26 en 2.27, daarbij zit ook de



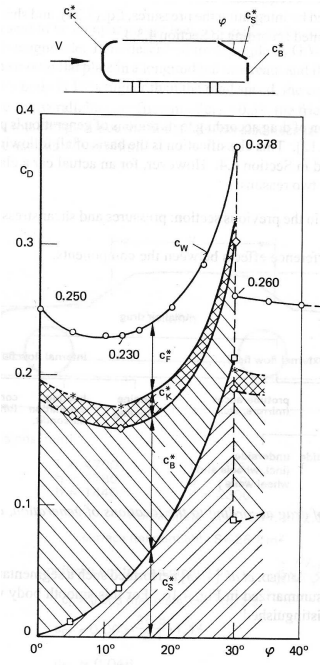
Figuur 3.2: Overzicht van de luchtstroming rondom een auto. Afbeelding afkomstig uit [1].

drag die ontstaat uit wervels. Voor auto's geldt dat de frictiedrag in het algemeen klein is. De dragcoëfficiënt hiervan is ongeveer $0,046$ ten opzichte van een totale dragcoëfficiënt van $0,30$.

3.1.1 Lokale oorsprong en effect op de omgeving

Naast het bekijken van de totale drag is het ook mogelijk om de drag per deel te bekijken. We bekijken dan de drag in het gebied waar deze ontstaat. Er is sprake van een lokale oorsprong. Er zijn ook hier weer twee opmerkingen te maken die er voor zorgen dat het opdelen van de drag voor een auto niet eenvoudig is. Ten eerste is het onbekend zijn van de druk en de schuifspanningen een probleem. Ten tweede kan er interferentie optreden tussen de verschillende drageffecten, waardoor het niet te zien is welk effect bij welk deel van de drag hoort. De verdeling van drag van een autovormig lichaam kan gedaan worden in vier gebieden, te weten

1. de voorkant
2. de achterkant, alleen het schuine deel onder een hoek φ
3. het rechte deel van de achterkant
4. de zijpanelen, de bodemplaat en het dak.



Figuur 3.3: Invloed van hoek φ op de totale drag en de percentages van de totale drag veroorzaakt door elke deel in een automodel. Afbeelding afkomstig uit [1].

In figuur 3.3 is voor verschillende hoeken φ de waarden van de dragcoëfficiënten bepaald van elk van de vier gebieden. Hierbij valt het op dat de invloed van de drag aan de voorkant

van een auto klein is. Als de hoek groter wordt dan 30 graden is er geen sprake meer van wervels aan de achterkant, waardoor de drag anders wordt verdeeld. Ook is het zo dat de drag in de eerste drie delen voornamelijk bestaat uit drukdrag, terwijl die voor het dak, de bodemplaat en de zijpanelen vooral frictiedrag is. Helaas is het in de praktijk haast niet mogelijk zo'n opdeling voor een auto te maken. Daarnaast weten we nu nog niks over het ontstaan van de drag.

Het effect van een rijdende auto op de omgeving is waar te nemen als een groot gebied wordt bekeken. Met behulp van de drukverdeling en snelheden op de randen van het gebied kunnen conclusies worden getrokken over de krachten op een auto. Daarbij kan de drag worden bepaald. Tevens kan de drag met de volgende formule worden berekend

$$c_D A = \int_S (1 - c_{ptot}) dS - \int_S \left(1 - \frac{u}{V}\right)^2 dS + \int_S \left(\frac{v}{V}\right)^2 + \left(\frac{w}{V}\right)^2 dS. \tag{3.1}$$

In deze formule zijn u, v en w de componenten van de snelheid. De drag die hiermee berekend kan worden blijkt echter groter te zijn dan de drag die gemeten wordt in een windtunnel. Bovenstaande formule zegt iets over het onstaan van drag en de verdeling van wervels in de luchtstroming. Deze wervels voor het x-, y- en z-vlak worden als volgt bepaald

$$\omega_x = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y},\ \omega_y = \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z},\ \omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \tag{3.2}$$

Zoals al eerder is gezegd veroorzaakt de luchtstroming rond een auto een zogenaamde lift. Deze lift is meestal omhoog gericht en wordt veroorzaakt door een drukverschil rond de auto. Het resultaat is, dat de naar beneden gerichte kracht op de auto afneemt naarmate de snelheid groter wordt. Dit is vooral bij race- en sportwagens van belang. Hier komen we later nog op terug.

3.2 Drag in delen bekeken

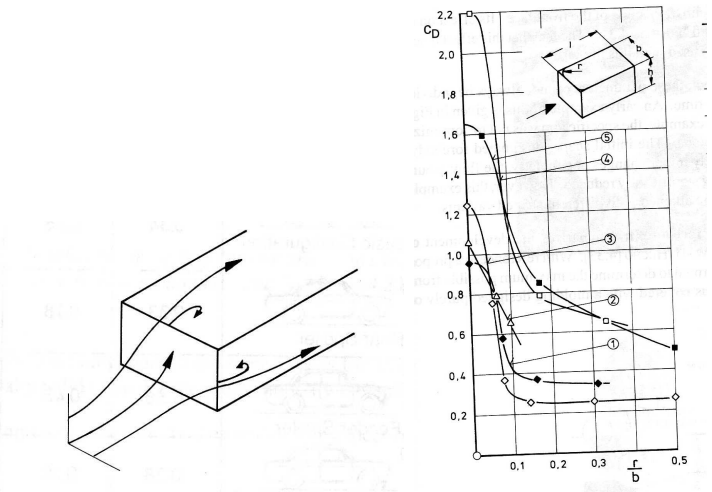
Zoals we gezien hebben is de drag rond een auto per deel te bestuderen. Zo kunnen we onder andere kijken naar de voor- en achterkant van een auto. Het bepalen hiervan gebeurt vooral door experimenten in een windtunnel en numeriek met *Computational Fluid Dynamics*. Toch blijft het bij benaderingen van stromingen en is het helaas niet mogelijk om met de wiskunde uit hoofdstuk 2 de stroming echt uit te rekenen.

3.2.1 De voorkant

Om de voorkant van de auto te bekijken wordt uitgegaan van een versimpeld model. De voorkant van de auto kan namelijk gezien worden als een rechthoekig blok, waarbij de wielkasten buiten beschouwing worden gelaten. Gezien de geringe afstand met de weg zal de stroming voornamelijk over de voorkant van de auto gaan en zijn de stroomlijnen dus omhoog gericht. De stroming zal gaan loslaten met als gevolg dat de drukverdeling op de randen en hoeken zal gaan afwijken van de ideale luchtstroming.

Bij de stroming rond de voorkant van een auto zijn er een aantal parameters te variëren die invloed kunnen hebben op de stroming en drag. Zo kan er ondere andere gekeken worden naar de hoek waaronder de motorkap is geplaatst en de hoek die de voorkant maakt. Ook kan er gekeken worden naar het rond maken van de hoeken. De voorkant wordt gezien als

een rechthoekig blok, maar het is mogelijk om de randen glad en cirkelvormig te maken. Zo kan er een straal r worden bepaald die de mate van afronding geeft. Zie daarvoor figuur 3.4.



(a) Model van de voorkant

(b) Invloed van afgeronde hoek

Figuur 3.4: De voorkant van een auto als blok. Tevens de invloed van het afronden van de hoeken ten opzichte van de verhouding straal/breedte. Afbeeldingen afkomstig uit [1].

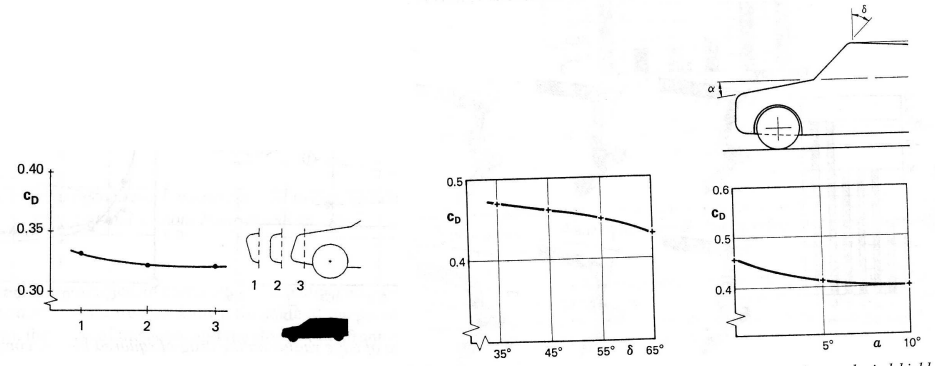
Als we nu de drag gaan bekijken, met behulp van de dragcoëfficiënt, dan neemt de drag af als de straal r groter wordt. Bij een bepaalde grootte van de straal blijft de drag echter min of meer constant. De stroming laat in dit geval niet meer los (dus geen *seperation*) en de stroming is in dit geval bijna ideaal. Het bepalen van de straal zal grotendeels experimenteel moeten gebeuren, waarbij rekening gehouden moet worden met het Reynoldsgetal. Voor een auto zijn kleine afrondingen van de hoeken al voldoende om het loslaten van de stroming tegen te gaan.

Ook kunnen we kijken naar de hoek waaronder de motorkap wordt geplaatst. Naarmate de hoek groter wordt zal de drag afnemen, totdat er een evenwicht wordt bereikt. De combinatie van afrondingen aan de voorkant van de auto en de plaatsing van de motorkap onder een hoek, geven een afname van de drag. Hierdoor is er een betere luchtstroming, welke ook doorwerkt op andere delen van de auto. Er is een grotere drukgradiënt (verandering van de druk) mogelijk, zonder dat de stroming gaat loslaten van het oppervlak. De derde parameter die gevariëerd kan worden is de hoek van het frontoppervlak in de stroming. Deze heeft het minste effect op de drag en daarmee op de stroming. Als de voorkant schuin in de stroming staat is de drag iets lager. Zie daarvoor ook figuur 3.5.

Voor het optimaliseren van de stroming rond de voorkant van de auto wordt kijkt men naar een combinatie van de bovengenoemde parameters. Verder is het niet altijd noodzakelijk om hoeken af te ronden. Het is ook mogelijk om een klein schuin stukje in de stoming te plaatsen, waardoor de stroming niet loslaat van het oppervlak.

3.2.2 De voorruit en het dak

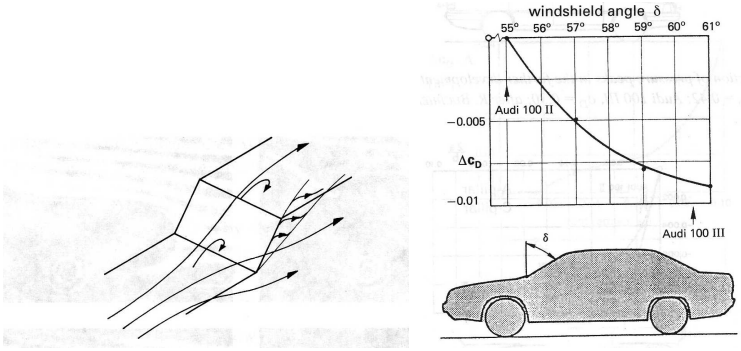
Als we kijken naar de stroming van lucht rond de voorruit van een auto dan zijn er drie punten waar de stroming mogelijk zou kunnen loslaten. Aan de onderkant van de ruit, aan



(a) Voorkant (b) Motorkap en voorruit

Figuur 3.5: Vermindering van drag bij verschillende hoeken aan de voorkant van een auto. Afbeeldingen afkomstig uit [1].

de bovenkant en aan de zijkanten (bij de A-spijl). De eerste twee vallen onder een 'quasi-2-dimensionale' stroming, terwijl de laatste volledig 3-dimensionaal is. Bij de eerste twee is het dan ook mogelijk dat de stroming weer aan het oppervlak gaat lopen na seperatie. De parameters die hier een rol in spelen zijn de hoek van de voorruit en de straal van de A-spijlen. De hoek van de voorruit heeft effect op het loslaten en aanhechten van de stroming. Naarmate de hoek van de vooruit kleiner wordt, dus de ruit ligt platter, neemt de drag een klein beetje af. Het effect is echter lang niet zo groot als gedacht. Dit is in figuur 3.6 te zien voor een oude Audi 100.



(a) Model (b) Resultaat Audi 100

Figuur 3.6: Model voor de stroming rond de voorruit en de afname van drag voor een Audi 100 ten op zichte van de hoek waaronder de voorruit wordt geplaatst. Afbeeldingen afkomstig uit [1].

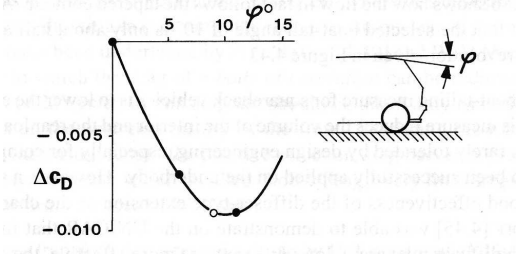
Om de drag langs het dak te verminderen is het mogelijk om het dak in de lengterichting te buigen. Daarbij mag deze boog niet te groot worden, want dan kan de dragcoëfficiënt juist weer toenemen. Bij het ontwerpen van het dak moet verder rekening gehouden worden met het frontale oppervlak in de stroming. Deze moet namelijk constant blijven, anders is het mogelijk dat de drag behoorlijk toeneemt. Het gevolg hiervan is dat bij de meeste auto's de voor- en achterruit al licht gebogen moeten worden. De stroming langs het dak is verder

parallel aan de rijrichting. Aan de zijkanten van het dak is verder geen luchtstroming.

3.2.3 De achterkant

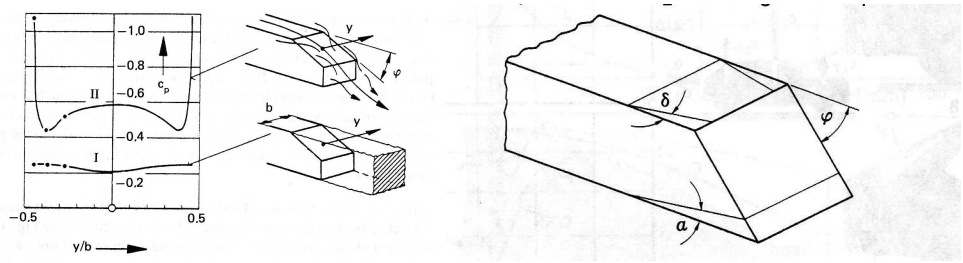
Waarschijnlijk is de achterkant het meest interessante deel van de auto bij het bekijken van de luchtstroming. Bij personenauto's is vaak de achterkant verschillend. Dit heeft ook effect op de luchtstroming en bijbehorende drag. Over het algemeen worden er drie verschillende achterkanten beschouwd, dat van een stationwagon (*squareback*), een hatchback (*fastback*) en een sedan (*notchback*). Zoals al eerder vermeld zal de stroming aan de achterkant van de auto altijd loslaten. Ook hier is er weer sprake van een 3-dimensionaal of 'quasi-2-dimensionaal' type loslating met bijbehorende parameters. Deze zijn voor het 3-D geval de hoeken aan de achterkant en voor het 'quasi-2-D' geval het zogenaamde *boat-tailing*. Zie daarvoor ook figuur 3.2.

Bij het ontwerp van de achterkant van de auto is het zaak dat de druk (op de basis) achter zo groot mogelijk is, terwijl de basis zelf klein is. Voor een stationwagon of andere auto met een vierkante achterkant, is dit te bereiken door de achterkant bij te schaven, waardoor de achterkant kleiner wordt gemaakt. Dit wordt ook wel boat-tailing genoemd (zie ook figuur 3.7). Door dit toe te passen kan de drag gereduceerd worden. Voor een optimaal resultaat kan een hoek gekozen worden rond de 20 graden. Naast het schuiner maken van de achterkant, is het ook mogelijk de achterkant van de auto langer te maken. Dit heeft echter niet altijd een afnemend effect op de drag. Het principe van boat-tailing kan ook op de zijkanten van een auto worden toegepast. In de meeste gevallen is een kleine hoek van 10 graden al voldoende om de drag te verkleinen. Het boat-tailing effect werkt ook op de onderkant van een auto. Er wordt dan gesproken over een diffuser.



Figuur 3.7: Boat-tailing van de achterkant van een auto met bijbehorende afname van de drag. Afbeelding afkomstig uit [1].

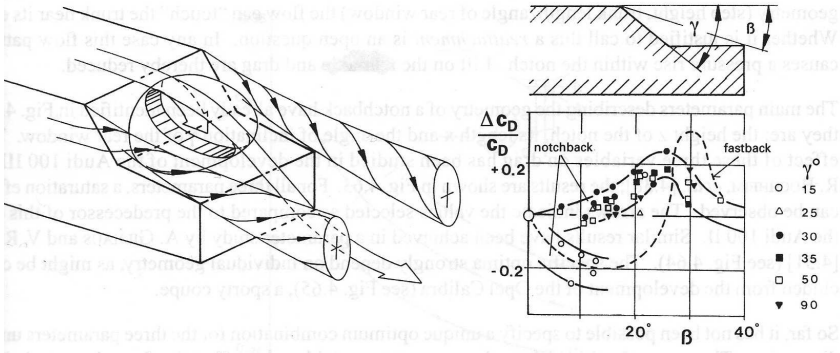
Een hatchback heeft in tegenstelling tot de blokkige stationwagons een schuinlopende achterkant, welke daarna bijna recht naar beneden gaat. Afhankelijk van de hoek die het schuine deel maakt, ontstaan er wervels in de stroming. Naarmate de hoek toeneemt worden zowel de drag als lift groter, totdat er een kritieke waarde wordt bereikt, deze is ongeveer bij een hoek 50 graden. Bij het groter worden van de hoek, tussen 0 en 50 graden, ontstaan er pieken in de druk veroorzaakt door wervels. Als de hoek groter wordt gekozen dan de kritieke waarde, breken de wervels op en ontstaat er het zogenaamde *dead water*, waarbij de druk op de achterkant bijna constant is. Uit experimenten blijkt dat de drag minimaal is voor een hoek van 15 graden. Dit is dan ook de hoek die voor veel coupé's gebruikt wordt. De toename van drag wordt veroorzaakt door het ontstaan van de wervels, de dragcomponent van de wervels geeft de toename van de gehele drag.



(a) Drukverdeling (b) Boat-tailing

Figuur 3.8: Stroomlijnen en drukverdeling rond de achterkant van een hatchback en boat-tailing bij een hatchback. Afbeeldingen afkomstig uit [1].

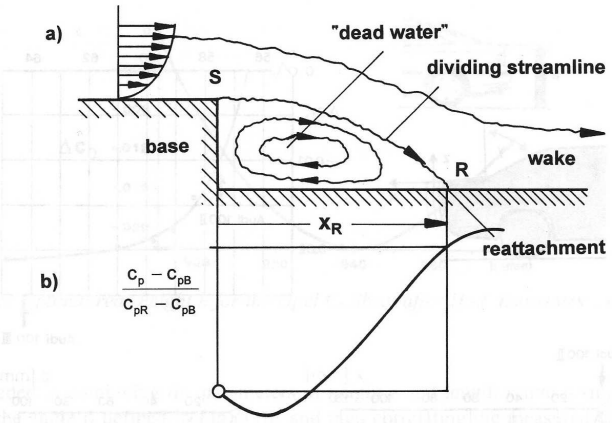
Ook voor een hatchback kan boat-tailing worden toegepast. Door de onderzijde licht te verhogen en de zijkanten bij te schaven kan de drag worden gereduceerd. De belangrijkste conclusie die kan worden getrokken voor hatchbacks en andere auto's met schuine achterkant, is dat de drag verminderd kan worden door de ontstane wervels te verminderen.



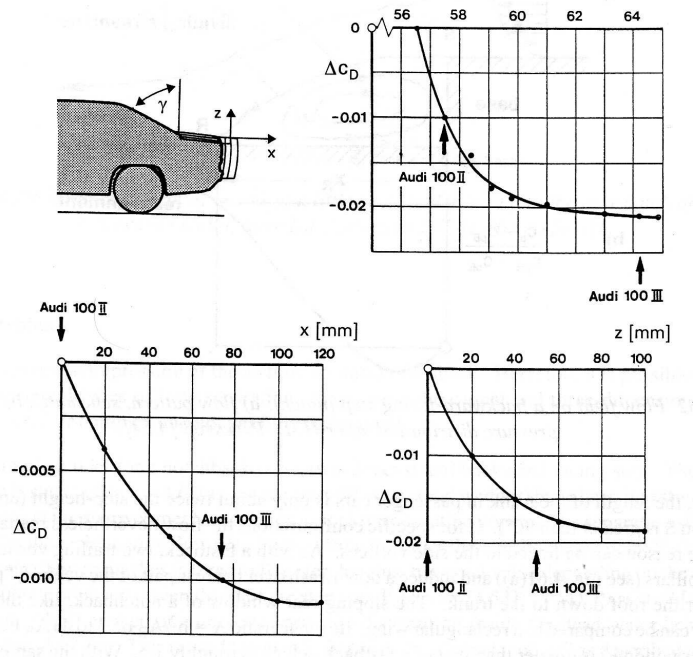
Figuur 3.9: Stroming rond de achterkant van een sedan. Afbeelding afkomstig uit [1].

De laatste vorm van een achterkant die we van een auto bekijken is een sedan vorm. Voor een sedan geldt ook dat er twee vormen zijn voor het loslaten van de stroming. Deze zijn wederom quasi-2-dimensionaal en 3-dimensionaal. De interactie tussen deze twee vormen is echter ingewikkeld en is ook moeilijk te begrijpen. Het meest simpele 2-dimensionale model voor de achterkant van een sedan is een 'trapje' met één trede, zoals te zien is in figuur 3.10.

In dit model laat de stroming los van het oppervlak en ontstaan er wervels die met de klok mee draaien. Er is een scheidende stroomlijn die het verschil geeft tussen de *dead water* omgeving en de stroming daarbuiten. De lengte x_R hangt onder andere af van de dikte van de grenslaag. Ook bij een sedan speelt de hoek waaronder de achterruit geplaatst is weer een grote rol. Daarnaast speelt de lengte en de hoogte van de kofferbak een rol. Het effect van deze drie parameters op de drag is terug te vinden in figuur 3.11. Door te variëren met de parameters is het dus mogelijk de drag te verminderen.



Figuur 3.10: Model voor de achterzijde van een sedan met bijbehorende drukverdeling. Afbeelding afkomstig uit [1].



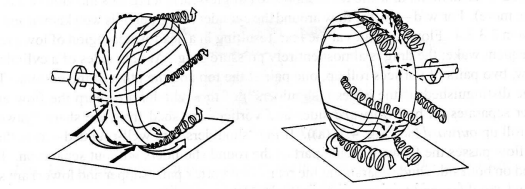
Figuur 3.11: Invloed van 3 parameters (hoek γ, afstanden x en z) op de drag aan de achterkant van een Audi 100. Afbeelding afkomstig uit [1].

3.2.4 De zijkant, onderkant en wielen

We kunnen ook nog gaan kijken naar de zijkanten van een auto. Als we een auto van bovenaf bekijken, is het meest eenvoudige model dat hiervoor opgesteld kan worden een rechthoek. Ook de zijkant van de auto is aan te passen zodat de stroming rond de auto wordt verbeterd. Net als bij het dak, kan de zijkant licht gebogen worden om de drag te verminderen. Daarnaast kan er op de uiteinden boat-tailing worden toegepast. De drag neemt echter alleen maar af, als de dragcoëfficiënt sneller afneemt dan het frontale oppervlak toeneemt. In dit geval speelt dus $c_D \cdot A$ een rol. Helaas is het aanpassen van de zijkant zeer beperkt mogelijk. Ook wordt de stroming van lucht aan de zijkant nog op een aantal punten verstoord. Dit wordt veroorzaakt door de spiegels, ramen en wielen.

De onderkant van een auto is over het algemeen een ruw oppervlak. Het verminderen van de drag zou gedaan kunnen worden, door de bodemplaat glad te maken. Dit kan echter nadelige gevolgen hebben voor de koeling van bepaalde technische systemen.

Eén van de grootste bijdragen aan de dragcoëfficiënt worden geleverd door de wielen en wielkasten. Voor gestroomlijnde auto's kan dit oplopen tot een bijdrage van 50 procent. De oorzaak hiervan komt omdat wielen niet gestroomlijnd zijn, er zijn lokale stromingen en de wielen roteren in wielkasten. In figuur 3.12 is de luchtstroming rond een wiel getekend. Zoals te zien is ontstaan er op diverse plaatsen wervels. Om de drag van de auto te verlagen zal er in de toekomst steeds vaker naar de wielen gekeken gaan worden, omdat de aerodynamica van de auto zelf al redelijk optimaal is.



Figuur 3.12: Luchtstroming rondom een wiel. Afbeelding afkomstig uit [1].

3.2.5 Wijzigingen in de aerodynamica

Nu de aerodynamica van een auto grotendeels beschreven is kunnen we nog gaan kijken hoe deze gewijzigd zou kunnen worden. Ten eerste kan er aan de voorkant (meestal onder de bumper of in de bumper verwerkt) van de auto een spoiler gemonteerd worden. Als dit een goed ontwerp is kan het de drag verminderen, de lift op de vooras verminderen en zorgen dat er meer volume in de stroming van de koeling zit. Het verminderen van drag is hier natuurlijk het meest van belang. Dit is gebasseerd op het feit dat de spoiler de luchtsnelheid onder de auto vermindert. De drag die nu op de voorkant van een auto werkt kan worden gesplist in D_B en D_S, de drag op de onderkant en spoiler. Er wordt verondersteld dat D_B alleen frictiedrag is, maar in de praktijk is er ook nog een deel van de 'drukdrag'. Voor het beschrijven van de drag maken we gebruik van de dragcoëfficiënt. Voordat deze opgesteld kan worden introduceren we eerst de wrijvingscoëfficiënt voor de onderkant met oppervlak A_B. Deze is gelijk aan

$$c_f = \frac{D_B}{\frac{\rho}{2} v^2 A_B}. \tag{3.3}$$

De dragcoëfficiënt is voor de onderkant dan gegeven door

$$c_{DB} = c_f \frac{A_B}{A} \left(\frac{v}{V}\right)^2. \tag{3.4}$$

De snelheidsverhouding v/V is een functie van de hoogte van de spoiler z_S en s, de mate van ruwheid, dus $v/V = f(z_S/s)$. Verder is een spoiler te beschouwen als een plaat in een luchtstroom met dragcoëfficiënt

$$c'_{DS} = \frac{D_S}{\frac{\rho}{2} V^2 A_S}, \tag{3.5}$$

waarin A_S het frontale oppervlak van de spoiler. De dragcoëfficiënt voor de spoiler wordt dan $c_{DS} = c'_{DS} \frac{A_S}{A}$. De totale dragcoëfficiënt is nu $c_{DB} + c_{DS}$, welke te minimaliseren is, ten opzichte van de spoilerhoogte. Bij het vergroten van de spoilerhoogte is het echter mogelijk dat de drukdrag op de spoiler dermate toeneemt, dat de totale drag met spoiler nog groter is, dan voor een auto zonder spoiler. Hoe een spoiler verder geplaatst kan worden is vooral gebasseerd op experimenten.

Naast het plaatsen van een voorspoiler is het ook mogelijk om achter op de auto een spoiler te monteren. Deze heeft als doel de drag en de lift op de achteras te verminderen en om vuil tegen te gaan op de achterzijde van de auto. Voor spoilers aan de achterzijde zijn er twee ontwerpen mogelijk, een strip die op het oppervlak gemonteerd wordt of een vleugel 'op poten'. De werking van deze spoilers is totaal anders dan die van de voorspoiler. De druk op de achterzijde van de auto wordt vergroot, met als resultaat minder lift en drag.

Naast de spoilers zijn ook nog andere uitstekende dingen op auto's die de drag kunnen beinvloeden. Twee voorbeelden daarvan zijn spiegels en antennes. Aangezien het frontale oppervlak van bijvoorbeeld een spiegel klein is, zal de drag hiervan ook klein zijn, in verhouding tot de hele auto. Toch kan de invloed van de spiegels niet worden verwaarloosd. De spiegels verstoren de stroming langs de zijkanten van een auto. Dit kan een hinderlijk lawaai opleveren voor de inzittenden van de auto. Een antenne daarentegen heeft zo'n klein oppervlak in de stroming, dat het effect op de drag verwaarloosbaar is.

Hoofdstuk 4

Stroming rond een racewagen

De stroming en drag van een personenauto zijn bekend. We kunnen nu gaan kijken naar de stroming en drag van racewagens. Deze hebben in de meeste gevallen veel vleugels (spoilers). Waarvoor worden deze eigenlijk gebruikt? En waarom kan een racewagen veel sneller rijden dan een normale auto? Op deze vragen gaan we proberen een antwoord te vinden. Daarvoor wordt eerst de wiskunde die we inmiddels hebben voor de stroming rond een personenauto uitgebreid met de beschrijving van stromingen rond vleugels.

4.1 Stroming rond vleugels

Een vleugel (*wing*) is een drie-dimensionaal lichaam. Vaak wordt er bij het bekijken van vleugels een 2-dimensionaal model gemaakt bestaande uit de dwarsdoorsnede van een vleugel. Dit geeft dan een vleugelprofiel (*airfoil*). Als een vleugel op een auto gemonteerd wordt zijn we wederom geïnteresseerd in de stroming rond een vleugel en de invloed daarvan. We gaan daarvoor eerst de stroming rond een vleugelprofiel bekijken. De stroming die hier plaatsvindt is een 2-dimensionale potentiaalstroming met stroomfunctie Ψ. De stroomlijnen worden in dit geval gegeven door de lijnen, waarvoor $\Psi =$ constant. Daarnaast zijn er de equipotentiaallijnen $\Phi =$ constant waarmee de complexe snelheidspotentiaal voor de stroming opgesteld kan worden:

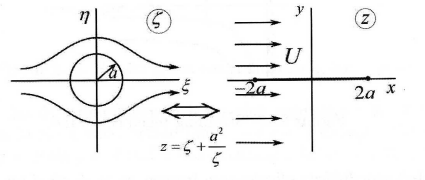
$$\chi = \Phi + i\Psi. \tag{4.1}$$

Met behulp van conforme afbeeldingen kan nu de stroming rond een vleugelprofiel worden bepaald. Er wordt hierbij vanuit gegaan dat het beeld van een functie van een stroming wederom een stroming is. Er zijn dan twee vlakken (assenstelsels) waarbij de stroomlijnen worden afgebeeld op stroomlijnen. Voor een vleugel wordt er eerst gekeken naar de Joukowski-afbeelding. Deze conforme afbeelding beeldt een cirkel in het ζ-vlak af als een lijnstuk in het z-vlak. Zie ook figuur 4.1. Voor een uitgebreide beschrijving kan gekeken worden in [7].

De stroming kan nu worden beschreven met de snelheidspotentiaal en is van de vorm

$$\chi = U\left(\zeta + \frac{b^2}{\zeta}\right), z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta}, (b > a).$$

Dezelfde afbeelding kan ook worden bekeken met een stroming onder invalshoek α. De stroming, uitgedrukt in de snelheidspotentiaal wordt dan

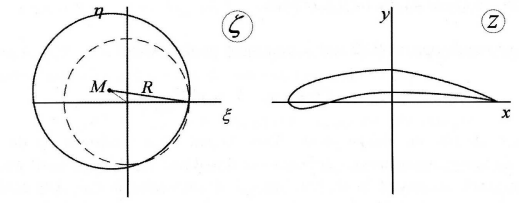


Figuur 4.1: Joukowski afbeelding. Deze conforme afbeelding beeldt een cirkel af op een lijnstuk. Afbeelding afkomstig uit [7].

$$\chi(\zeta) = U\left(\zeta e^{-i\alpha} + \frac{a^2}{\zeta}e^{i\alpha}\right), z = \frac{a^2}{\zeta}. \tag{4.2}$$

Om in de praktijk de stroming goed te beschrijven met er nog rekening gehouden worden met de Kutta-Joukovski-afstroomvoorwaarde. Deze voorwaarde zegt dat de potentiaalstroming om een vlakke plaat aan de achterrand een eindige snelheid moet hebben.

Met behulp van de Joukovski-afbeelding kan nu de stroming rond een vleugelprofiel onder een invalshoek worden bepaald. Daarvoor wordt het middelpunt van de cirkel in het ζ-vlak omhoog en naar links gebracht. Het beeld in het z-vlak heeft dan de vorm van een vleugelprofiel. Dit is terug te zien in afbeelding 4.2.



Figuur 4.2: Conforme afbeelding voor een vleugelprofiel. Afbeelding afkomstig uit [7].

Voor een vleugel met een stroming onder invalshoek α kan wederom een stroomfunctie worden opgesteld. Deze is van de volgende vorm

$$\chi(z) = U\left((\zeta - \zeta_M)e^{-i\alpha} + \frac{R^2}{\zeta - \zeta_M}e^{i\alpha}\right) + i\frac{\Gamma}{2\pi}\left((\zeta - \zeta_M)e^{i\alpha}\right) \tag{4.3}$$

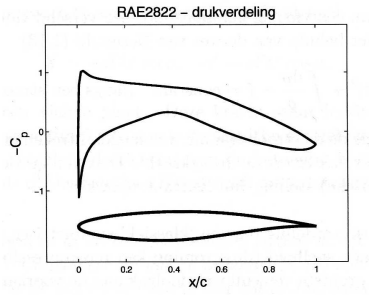
met $z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta}$ en Γ, de wervelsterkte. Deze wervel wordt toegevoegd om te voldoen aan de Kutta-Joukovski-afstroomvoorwaarde. Met behulp van deze stroomfunctie kan de kracht die op een vleugel werkt worden bepaald. Deze kracht, welke loodrecht op de stroming staat, komt overeen met de kracht die men vindt voor een vlakke plaat in een stroming en is gelijk aan

$$X = -\rho\Gamma U \sin\alpha \text{ en } Y = \rho\Gamma U \cos\alpha. \tag{4.4}$$

Als de snelheid van de stroming rond een vleugel voldoende groot is kan de stroming de bocht aan het einde van de vleugel niet meer maken. De stroming laat los van de achterkant, waarbij er een wervel achter de vleugel ontstaat. Aangezien de stroming circulatievrij is, ontstaat er rond de vleugel een wervel in tegengestelde richting.[2] De lift van een vleugel volgt

[2]Circulatievrij: de som van alle wervels is gelijk aan nul

uit het verschil in druk op de boven- en onderkant van een vleugel. Uit de wet van Bernoulli volgt dat met een hogere snelheid aan de onderkant van de vleugel de druk groter is, dan aan de bovenkant van de vleugel, waar de stroomsnelheid lager is. Dit snelheidsverschil geeft dus een drukverschil op een vleugel, waardoor de lift ontstaat. Ook voor een vleugelprofiel kan nu een drukverdeling worden getekend, een voorbeeld is te zien in figuur 4.3.



Figuur 4.3: Drukverdeling van een vleugelprofiel. Afbeelding afkomstig uit [7].

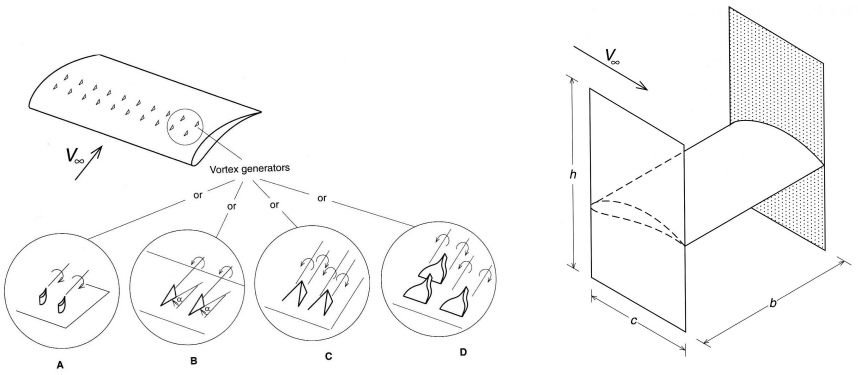
Ook bij een vleugel in een stroming is er sprake van drag. Al er sprake is van een onsamendrukbare stroming, dan is het mogelijk om ook bij een vleugel de viskeuze effecten te beschouwen in een grenslaag. Deze dunne laag boven het oppervlak is te vergelijken met de theorie uit paragraaf 2.2.5. Als een vleugel een eindige lengte heeft, dan ontstaan er aan de uiteinden (zijkanten) ook wervels. De sterkte van deze wervels is afhankelijk van de lift.

Naast de standaard vleugels zijn er ook nog een aantal aanpassingen aan een vleugel te maken om de effecten ervan te verbeteren. Een voorbeeld daarvan zijn de wervelgenerators (*vortex generators*). Zoals in figuur 4.4 te zien is zijn er meerdere soorten wervelgenerators mogelijk. De hoogte is net iets groter dan de dikte van de grenslaag. Mits goed geplaatst op een vleugel is het mogelijk om met de generators het loslaten van de stroming terug te dringen. Daarnaast hebben ze het effect om, bij een grote liftcoëfficiënt, de drag terug te brengen en de maximum lift te vergroten. Bij een lage liftcoëfficiënt is het echter ook mogelijk dat de drag juist toeneemt. Soortgelijke effecten kunnen ook bereikt worden met het maken van golven in de achterkant van de vleugel. De drag van een vleugel kan ook verminderd worden door ribbels aan te brengen op het oppervlak. De wervels die ontstaan in de grenslaag worden als het ware gestabiliseerd, waardoor de turbulente stroming pas veel later ontstaat. Een derde verbetering aan een vleugel kan gemaakt worden door de uiteinden te voorzien van verticale platen, zie ook afbeelding 4.4.

Daarbij kan een extra flap worden gemonteerd, zoals dit veel bij racewagens voorkomt. In de meeste gevallen wordt hiermee de lift vergroot. Daarnaast kan de grenslaag iets in dikte afnemen. Alleen voor hoge liftcoëfficiënten wordt het loslaten van de stroming hier beperkt. Voor lage liftcoëfficiënten is het echter zo dat de drag toeneemt en de lift afneemt.

4.2 Racewagens en vleugels

Het doel van racewagens is om zo snel mogelijk te kunnen rijden. Daarbij moet aan de ene kant de weerstand (de drag) zo klein mogelijk zijn, maar aan de andere kant moet de auto nog wel veilig kunnen rijden. Zoals we bij een personenauto hebben gezien neemt de lift toe als de snelheid groter wordt. Racewagens hebben een nog hogere snelheid, waarbij de lift dus

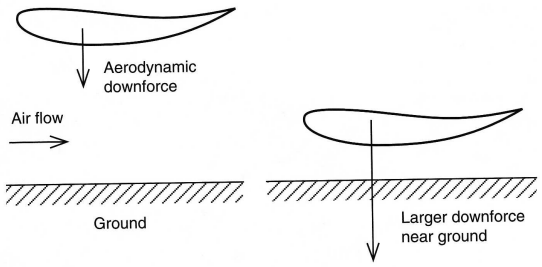


(a) Wervelgenerators (b) Platen op de vleugel

Figuur 4.4: Aanpassingen aan een vleugel om de effecten te verbeteren. Afbeeldingen afkomstig uit [1].

nog groter is. Hierdoor zou de auto kunnen 'opstijgen'. Dit willen we natuurlijk voorkomen. Ook de drag neemt kwadratisch toe met de snelheid en is bij racewagens dus groter. Deze zouden we graag willen verkleinen.

Om de auto bij hoge snelheden aan de grond te houden wordt gebruik gemaakt van *downforce*. Downforce kunnen we zien als een negatieve lift. Om deze downforce te creëren kan er gebruik gemaakt worden van 'omgekeerde' vleugels (*inverted wings*). Bij deze vleugels, een voorbeeld is te zien in figuur 4.5 is de druk aan de bovenkant juist groter dan aan de onderzijde. Als deze op de juiste plek aan een racewagen worden gemonteerd, wordt de wagen als het ware naar beneden gedrukt.

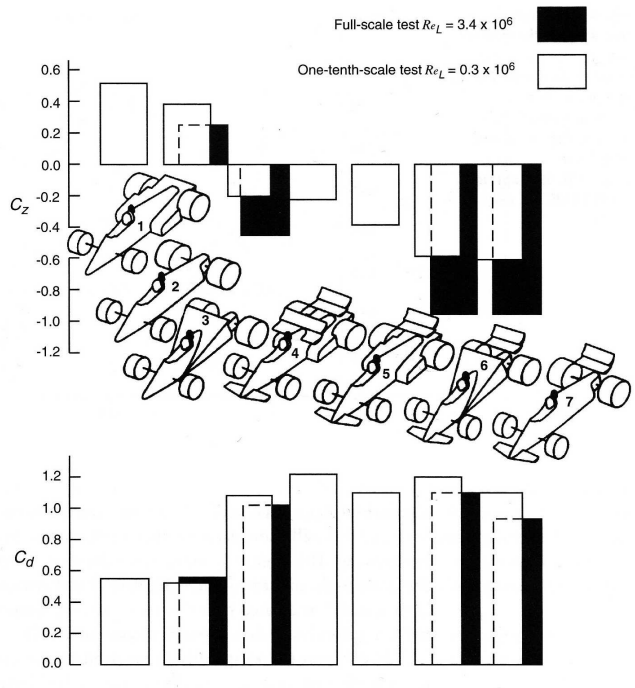


Figuur 4.5: Een 'omgekeerde' vleugel. Als de afstand tot de grond kleiner is, is de downforce groter. Afbeelding afkomstig uit [2].

De vraag is natuurlijk waar plaatsen we deze vleugels? Bij het ontwerpen van een racewagen wordt er eerst gekeken naar een zogenaamde basisvorm. Deze vormen en de stroming rond deze lichamen komt overeen met de lichamen die we bekeken hebben bij personenauto's. Om de drag en lift bij hoge snelheden van de auto laag te houden, kunnen dezelfde veranderingen worden toegepast als bij een personenauto. Daarbij valt te denken aan de aanpassing van de hoek van een voorruit. De interactie tussen vleugels en de rest van een auto is van groot belang. Door het plaatsen van de juiste vleugel op de juiste plaats kan een downforce op de auto worden bereikt die even groot is aan de downforce op alleen de vleugel. De interactie tussen een vleugel en de auto verandert de drukverdeling. Het design van een vleugel hangt

dan ook af van het soort racewagen. Verder speelt de afstand tot de grond een rol. Naarmate de vleugel een grotere afstand tot de weg heeft is de downforce lager, dan wanneer de vleugel vlak boven de weg zit. Dit kan invloed hebben op het weggedrag van een (race)auto.

Het plaatsen van vleugels is zeer uitgebreid onderzocht voor 'open wiel' racewagens. Bij deze auto's zitten de wielen niet in wielkasten (bijvoorbeeld de huidige Formule 1 auto's). Uit experimenten met verschillende opstellingen (zie figuur 4.6) kunnen een aantal conclusies worden getrokken.

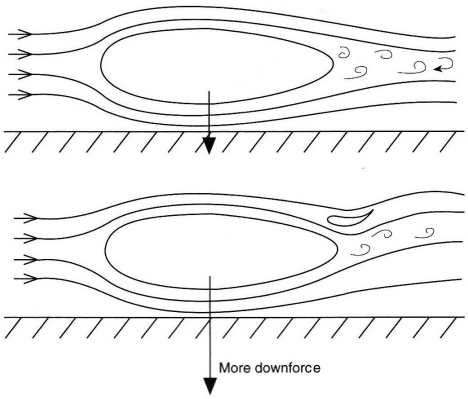


Figuur 4.6: Een aantal opstellingen om vleugels te plaatsen op een Formule 1 auto. Er zijn tests uitgevoerd op ware grote en op een 1:10 schaal. Er is zowel gekeken naar drag (C_d) als lift (C_z). De resultaten zijn in bovenstaande figuren te zijn. Afbeelding afkomstig uit [2].

Zo zijn vleugels die geplaatst worden tussen de assen van de auto niet efficiënt. De gecreëerde downforce is laag en ze belemmeren de werking van vleugels die aan de achterzijde van een auto worden geplaatst. Vleugels die aan de voor- en achterkant worden geplaatst hebben de meeste invloed op de downforce en hebben als bijkomend voordeel dat ze gemakkelijk aan te passen zijn. Een deltawing is alleen werkzaam zonder achtervleugel (zie figuur 4.6). De wervels van een deltawing werken een achtervleugel tegen. Nadat er een schatting van de plaats van de vleugels is gemaakt kan de exacte locatie (experimenteel) worden bepaald. Het plaatsen van de vleugels en de vorm daarvan is zoals al eerder gezegd uniek voor elk voertuig.

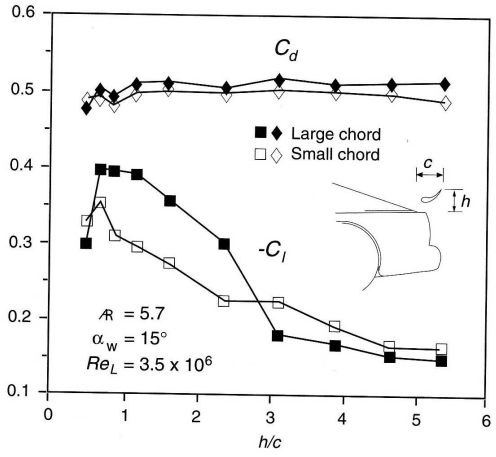
Het plaatsen van een achtervleugel geeft meer downforce (zie figuur 4.7). Door de vleugel is de druk op een auto groter en wordt deze als het ware naar beneden gedrukt.

Naarmate de snelheid toeneemt zal ook de downforce toenemen. Om het effect van de interactie tussen vleugel en lichaam op de aerodynamica te bekijken kunnen we de hoogte van de vleugels variëren. Figuur 4.8 geeft aan wat voor effect de hoogte van de vleugel heeft op de drukverdeling. Tevens wordt de breedte (koorde of in het Engels *chord*) van de vleugel



Figuur 4.7: Het plaatsen van een achtervleugel geeft meer downforce. Afbeelding afkomstig uit [2].

aangepast. De verandering van lift is bij het plaatsen van vleugels echter veel groter dan de verandering in drag.



Figuur 4.8: Drag (dragcoëfficiënt C_d) en lift (C_l) ten op zichte van de verhouding hoogte/koorde van een vleugel. Afbeelding afkomstig uit [2].

Naast de vleugels aan de achterzijde, kunnen er ook vleugels aan de voorzijde van een auto gemonteerd worden. Vooral bij de 'open wiel' racewagens zijn deze goed zichtbaar. (Wagens waarbij de wielen in wielkasten zitten is de vleugel vaak al verwerkt in de voorbumper.) De vleugel aan de voorkant lijkt veel meer op dat van een vliegtuigvleugel. Ook voor deze vleugels geldt dat de hoogte en breedte invloed hebben op de downforce en drag. Daarnaast zijn ze belangrijk voor het vervolg van de stroming rond de rest van de auto.

Een racewagen kan een hogere snelheid bereiken, doordat de aerodynamica verbeterd is ten op zichte van een personenauto. Door de juiste vorm te kiezen en vleugels te monteren, wordt de drag vermindert en de lift vervangen door downforce. Een racewagen blijft op deze manier ook bij hogere snelheden aan de grond.

Hoofdstuk 5

Computational Fluid Dynamics

Bij het bekijken van de stromingen rond auto's wordt er tegenwoordig veelvuldig gebruik gemaakt van de computer. Met behulp van wiskunde in de vorm van Computational Fluid Dynamics (Numerieke stromingsleer) is het mogelijk de stroming te bepalen en om experimenten uit te voeren. Voorheen gebeurde dit vooral in windtunnels en met experimenten op de weg. Beide methoden hadden een aantal nadelen. Zo zijn windtunnels erg duur en als er modellen worden gebruikt in de tunnels zijn de resultaten niet altijd nauwkeurig. Hoewel het testen op de weg erg realistisch is, blijken de resultaten door invloed van de wind, vaak tegen te vallen.

Om bovenstaande nadelen te vermijden wordt er in de auto-industrie steeds vaker gebruik gemaakt van Computational Fluid Dynamics (kortweg CFD). Het neemt de rol van windtunnelexperimenten over en is een basisgereedschap geworden om de aerodynamica van auto's te bekijken en aan te passen. De codes die bij CFD gebruikt worden zijn voornamelijk afkomstig uit de vliegtuig industrie, maar zijn niet altijd toe te passen op auto's. CFD simulaties zijn handig bij het voorspellen van stroming rond auto's en bij het bestuderen van vormveranderingen aan de auto en de daarbij ontstane verandering in de stroming.

Voor simulaties met CFD moet gelden dat de resultaten minimaal overeen komen met die van windtunneltesten. Dit houdt in dat een dragverandering van minimaal $0,002$ meetbaar moet zijn. Daarnaast mag de rekentijd niet veel groter zijn dan de tijd die het kost om een test uit te voeren in een windtunnel.

5.1 CFD methoden voor auto-aerodynamica

Zoals we al gezien hebben kan de stroming rondom een auto beschreven worden door de Navier-Stokes vergelijkingen (zie paragraaf 2.1.3). Deze vergelijkingen zijn een systeem van niet-lineaire, tweede orde partiële differentiaalvergelijkingen. Exacte oplossingen zijn er alleen voor een aantal speciale gevallen te vinden, welke geen rol van betekenis hebben voor de auto-aerodynamica. Om toch een benaderende oplossing te vinden wordt er gebruik gemaakt van numerieke methoden. Voor het benaderen van de Navier-Stokes vergelijkingen, om een stroming te berekenen zijn er een aantal methoden bekend. Deze zijn op te splitsen in lineaire en niet-lineaire methoden. In tabel 5.1 is een samenvatting gegeven van deze methoden met de bijbehorende aannames, oplosmethoden en het rooster dat er bij nodig is. Zo zijn er de *Euler* methode, de *Reynolds Averaged Navier Stokes* methode (RANS), de *Large Eddy Simulation* methode (LES) en de *Direct Numerical Simulation* methode (DNS).

Methoden	Lineaire methoden	Eulermethoden	RANS-methoden	LES/DNS-methoden
Aanname	Medium niet samendrukbaar, niet viskeus en rotatievrij	Medium niet viskeus	Modelleren van turbulentie	Bij LES: modelleren van eddies
Oplosmethode	Iteratieve numerieke methoden	Eindige elementen/ volume methoden	zie Eulermethoden	Zie Eulermethoden
Rooster	Alleen oppervlakte discretisatie	Zowel oppervlakte als domein discretisatie	zie Eulermethoden	Zie Eulermethoden

Figuur 5.1: Tabel met een overzicht van methoden die worden gebruikt bij CFD.

Als we kijken naar een potentiaalstroming en de Eulermethoden , dan worden de viskeuze termen genegeerd. De stroming wordt beschouwd als een 'aangehechte' stroming, welke niet kan loslaten. In werkelijkheid zal de stroming echter wel loslaten van het oppervlak. De methode laat het loslaten niet zien en dat heeft als gevolg dat de drag over de auto niet te bestuderen is. Een belangrijke stap voor het beschrijven van de werkelijke stroming, is het meenemen van de viskeuze krachten in de berekening. De turbulente stroming is met de Navier-Stokes vergelijkingen te beschrijven. Hierbij wordt de beweging gesplitst is een *steady* (tijdsgemiddelde) stroming en een *unsteady* (tijdsfluctuerende) stroming. De niet stabiele Navier-Stokes vergelijkingen geven, samen met termen onstaan uit gemiddelde tijdwaarden, de Reynolds-Averaged-Navier-Stokes vergelijkingen. De simulatie hangt hierbij sterk af van het toegepaste turbulentiemodel.

De volgende stap voor het beschrijven van de werkelijke stroming is de Large Eddy Simulation. Hierbij wordt de stroming bekeken in stukken van het medium, de zogenaamde eddies. Ook hierbij wordt weer gebruik gemaakt van de Navier-Stokes vergelijkingen, waarbij deze in de plaats worden gemiddeld. Daarnaast moet er een model opgesteld worden voor de weggemiddelde kleinste eddies. Bij Direct Numerical Simulation wordt er gebruik gemaakt van de volledige Navier-Stokes vergelijkingen. Het grote verschil met de LES-methode is, dat de turbulentie nu niet gemodelleerd wordt. Zowel DNS als LES geven een tijdsafhankelijke snelheid en viskeuze krachten.

5.1.1 De basisstappen van een CFD berekening

Voor het uitvoeren van berekeningen met Computational Fluid Dynamics zijn er een drietal basisstappen die voor elke methode gelden. Als de methode eenmaal gekozen is dan doorloopt men de volgende onderdelen:

1. Discretisatie van het oppervlak en/of het domein waarop de berekeningen worden uitgevoerd.

2. Het berekenen van de aerodynamica, dus het oplossen van de vergelijkingen bij de gekozen methode.

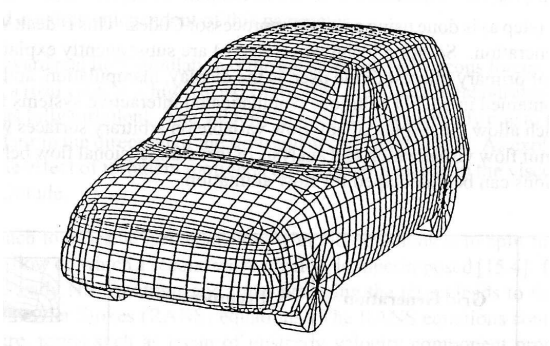
3. Het implementeren van de resultaten en deze verwerken tot grafieken, om vervolgens conclusies te kunnen trekken.

Het spreekt voor zich dat bij alle drie punten de computer een zeer grote rol speelt.

5.1.2 Discretiseren van een auto

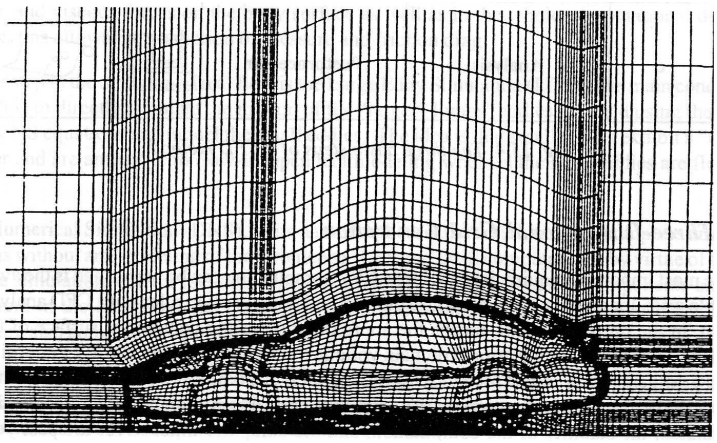
Om gebruik te kunnen maken van een numerieke methode moet een auto eerst gediscretiseerd worden. Dit houdt in dat er als het ware een rooster over het oppervlak van de auto wordt gelegd. Met behulp van dit rooster kunnen vervolgens de berekeningen worden uitgevoerd om de Navier-Stokes vergelijkingen op te lossen. Het is dus noodzakelijk om een geschikt rooster te maken. Het 'continue' oppervlak van de auto, wordt discreet gemaakt door het rooster. Berekeningen worden meestal in de roosterpunten uitgevoerd. De afgelopen jaren is er veel aandacht besteed aan het discretiseren.

Voor lineaire methoden is alleen discretisatie van het oppervlak nodig. Een voorbeeld hiervan is te zien in figuur 5.2.



Figuur 5.2: Oppervlakte discretisatie van een auto. Afbeelding afkomstig uit [1].

Voor het maken van een rooster wordt er vaak gebruik gemaakt van CAD-tekeningen (Computer Added Design) uit de auto-industrie. Voor niet lineaire methoden is het ook van belang dat de omgeving van de auto gediscretiseerd wordt. Het is dan mogelijk de partiële differentiaalvergelijkingen op te lossen. In figuur 5.3 is een voorbeeld te zien van een discretisatie van een auto voor een niet-lineaire methode.



Figuur 5.3: Discretisatie van zowel het oppervlak van een auto met discretisatie van de omgeving. Afbeelding afkomstig uit [1].

Het meest simpele rooster bestaat uit een lineare orthogonale set van lijnen. Vanwege de

complexe vorm van een auto wordt vaak niet de hele auto in één keer gediscretiseerd. Er wordt vaak gekozen voor een 'multiblock' rooster. De auto wordt dan opgedeeld in stukken, waarna elk stuk apart gediscretiseerd wordt.

Bij het discretiseren van een auto is het belangrijk om rekening te houden met de omgeving. In werkelijkheid is de omgeving onbegrensd, maar voor een computerberekening is dit niet mogelijk. Er moet bij het maken van een rooster dan ook rekening gehouden worden met een aantal zaken. Eén daarvan is het feit of we berekeningen uitvoeren voor de hele auto of slechts voor een klein deel, zoals een spiegel. Verder speelt de beperkende rekenkracht van de computer nog een rol, bij de keuze van discretisatie. Naast vaste roosters is het ook mogelijk om een discretisatie te maken, waarbij het rooster afhangt van de oplossing. Bij elke rekenstap wordt dan de vorige oplossing gebruikt, om het discretisatierooster aan te passen.

5.1.3 Lineaire CFD methoden

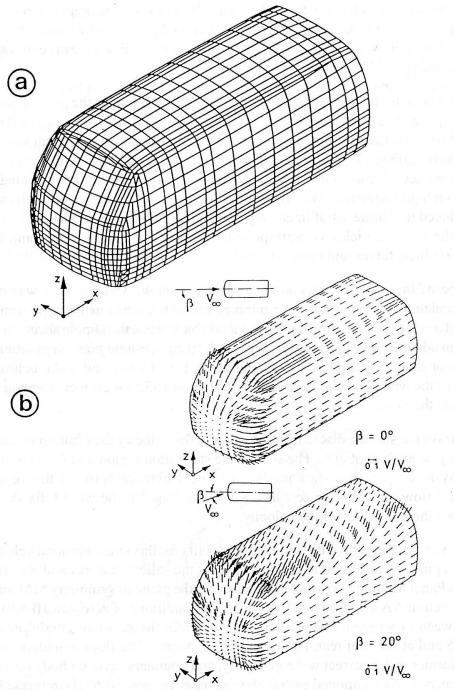
Bij de lineaire methoden wordt de Laplace vergelijking numeriek opgelost. Ondanks de beperkingen worden deze methoden nog vrij veel gebruikt. Een van deze lineaire methoden is de *Panel* methode (Panelenmethode). Bij deze methode wordt het oppervlak van een auto opgedeeld in panelen. Ook de lucht achter de auto wordt nog deels opgedeeld in panelen. Elk van deze panelen heeft een punt waarin moet worden voldaan aan de randvoorwaarden. In dit geval moet de snelheid in de richting van de normaal (loodrecht op het oppervlak) nul zijn. Daarnaast bezitten de panelen singulariteiten over het oppervlak. Deze worden gebruikt als 'bron' en 'put' op het oppervlak van de auto en als 'dipool' voor het oppervlak van de lucht. (De stromingen van een bron, put en dipool komen uitgebreid aan de orde in [7]) Hiermee kan het snelheidsveld rond een auto worden bepaald. Door de auto op te delen in panelen ontstaat een verzameling algebraïsche vergelijkingen welke met standaard iteratieve methoden opgelost kunnen worden. Daarbij valt te denken aan de Jacobi of Gauss-Seidelmethoden (Zie [8]). Als er sprake is van n panelen, dan is de orde van deze methode tussen n^2 en n^3. Een verdubbeling van het aantal panelen, betekent dus minimaal vier maal zoveel rekenwerk. In afbeelding 5.4 is een Volkswagenbus opgedeeld in panelen en is het snelheidsveld bepaald.

5.1.4 Niet-lineaire CFD methoden

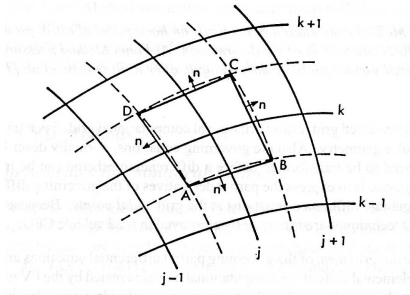
Om bij niet-lineaire CFD methoden de vergelijkingen op te lossen wordt er meestal gebruik gemaakt van een drietal methoden uit de numerieke wiskunde, namelijk de Eindige differenties, Eindige volume en de Eindige elementenmethode. Daarbij wordt de eerste weinig gebruikt bij het berekenen met auto's. Dat komt omdat cartesische coördinaten niet gebruikt kunnen worden, waardoor er eerst naar een ander coördinatensysteem getransformeerd moet worden. Dat levert erg veel (onnodig) rekenwerk op. De meest gebruikte oplosmethode is de Eindige volume methode. Er worden gestructureerde roosters gebruikt en de methode is goed toe te passen op auto's. Zie afbeelding 5.5 voor een voorbeeld rooster.

Methoden die gebaseerd zijn op de Euler vergelijking, geven een nauwkeuriger beeld van de stroming rond een auto dan de lineaire methoden. Toch worden deze methoden nog maar zelden gebruikt, omdat andere methoden met de RANS vergelijkingen betere resultaten geven. Deze vorm van Navier-Stokes vergelijkingen hebben we al gezien bij het beschrijven van de grenslaag. Ze zijn gegeven in 2.22 en 2.23.

Als er gebruik gemaakt wordt van de RANS vergelijkingen, afgeleid uit de gemiddelde tijd Navier-Stokes vergelijkingen, dan is het noodzakelijk om een model op te stellen voor

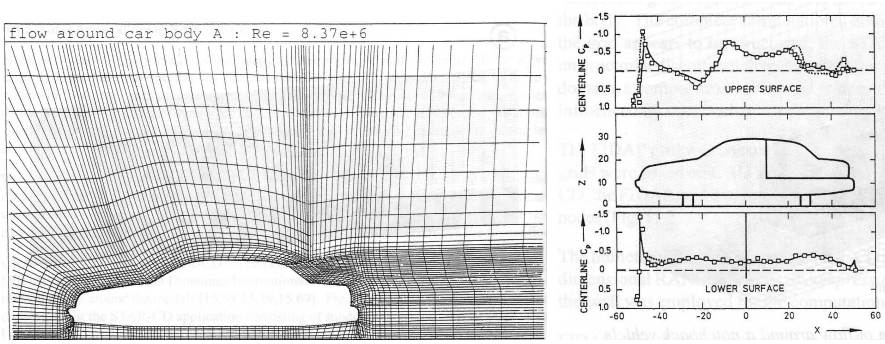


Figuur 5.4: Discretisatie van een Volkswagenbus voor de panelenmethode. De snelheidsvelden zijn berekend met en zonder zijwind. Met behulp van deze snelheidsvelden zijn stroomlijnen te schetsen. Afbeelding afkomstig uit [1].



Figuur 5.5: Voorbeeld van een deel van een discretisatierooster. Afbeelding afkomstig uit [1].

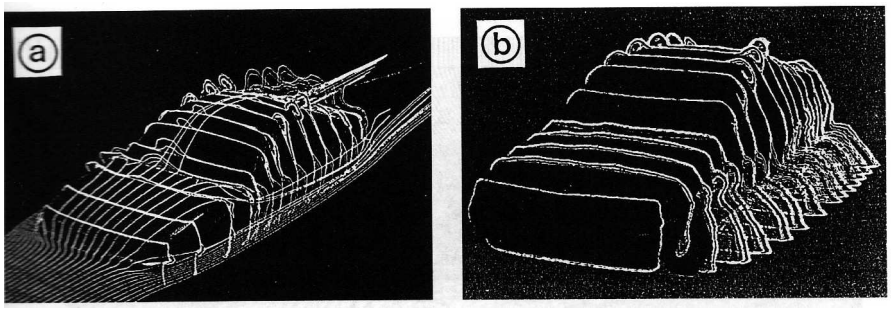
turbulentie. Voor deze modellen kan worden gekeken in [1]. In onderstaand figuur 5.6 is een rooster van een RANS methode te zien samen met de resultaten van de methode, in dit geval de drukverdeling rondom een auto.



(a) Rooster (b) Drukverdeling

Figuur 5.6: Gebruik van een RANS methode voor het bepalen van een drukverdeling rond een automodel. Afbeeldingen afkomstig uit [1].

Met de eerder genoemde LES en DNS methoden is het mogelijk om de stroomlijnen rond een auto te bepalen en weer te geven. Een voorbeeld hiervan is te zien in figuur 5.7. Aangezien een beschrijving van deze methoden te ver van dit bacheloronderzoek afligt wordt verwezen naar [1].



Figuur 5.7: Stroomlijnen rond een automodel zonder wielen (A) en met wielen (B), bepaald met de DNS methode. Afbeelding afkomstig uit [1].

5.1.5 Resultaten met behulp van CFD in de autoindustrie

De afgelopen jaren is het gebruik van Computational Fluid Dynamics in de auto-industrie sterk toegenomen. Ook bij het ontwerpen van Formule 1 auto's wordt veelvuldig gebruik gemaakt van CFD methoden. CFD wordt naast experimenten met windtunnels gebruikt om de aerodynamica van auto's te testen. Het stelt de ontwerpers in staat om aanpassingen te verrichten aan een computermodel van de auto. Met behulp van CFD kan dan de luchtstroming en/of de drag worden bepaald. Hierdoor is het mogelijk de aerodynamica te optimaliseren.

Vaak wordt er ook gekeken naar een bepaald deel van de auto. Zo levert een buitenspiegel erg veel windlawaai op tijdens het rijden. Met behulp van CFD wordt er gekeken wat er aan de spiegel veranderd kan worden om het geluid terug te dringen. Begin jaren 90 waren

vooral de wielen, wielkasten en onderkant van een auto interessant. Dit heeft geleid tot zeer nauwkeurige modellen, waarin de stroming van de onderkant gemodelleerd wordt.

Als laatste kun je je afvragen of de resultaten die gevonden zijn met CFD methoden wel een goede afspiegeling zijn van de werkelijkheid. In tabel 5.1 zijn de drag- en liftcoëfficiënt van twee verschillende modellen bepaald. Deze zijn aan de ene kant bepaald met een DNS methode en aan de andere kant experimenteel. Zoals te zien is komen de resultaten redelijk overeen. Alleen bij de liftcoëfficiënt van een model zonder wielen is de afwijking zeer groot.

Model	C_D DNS	C_D Exp.	C_L DNS	C_L Exp.
Zonder wielen	0.232	0.214	-0.232	-0.052
Met wielen en onderkant	0.295	0.291	0.255	0.277

Tabel 5.1: Drag- en liftcoëfficiënten experimenteel bepaald en berekend met de DNS methode.

Onderzoek aan de spiegel van een racewagen heeft uitgewezen dat ook hier de resultaten van de CFD methode overeen komen met het experimentele resultaat. In het onderzoek, uitgevoerd aan de Aalburg universiteit (Aalburg, Denemarken, zie [10]), is gebruik gemaakt van een vorm van RANS vergelijkingen.

Hoofdstuk 6

Conclusie en discussie

Als laatste kunnen we nu conclusies trekken en een discussie opstellen.

6.1 Conclusie

De luchtstroming rond een auto is te beschrijven met de Navier-Stokes vergelijkingen. Het is echter moeilijk om concreet iets te zeggen over de stroming rond een auto, daarom wordt er gezocht naar een eenvoudiger model. Met behulp van massa- en impulsbehoud kan een twee dimensionale potentiaalstroming opgesteld worden rond het lichaam van de auto. Hierbij wordt de viscositeit van lucht niet meegenomen. Voor auto's geldt dat ze een groot Reynoldsgetal hebben. De invloed van viskeuze krachten op de auto is dan ook klein. Toch spelen deze krachten nog wel een rol in een dunne laag boven het oppervlak van de auto. Deze dunne laag wordt ook wel grenslaag genoemd. Het is mogelijk om bewegingsvergelijkingen op te stellen, waaruit de stroming in de grenslaag kan worden bepaald. Hieruit volgt dat de stroming in de grenslaag eerst laminair is en vervolgens overgaat in een turbulente stroming. Turbulente stromingen volgen geen vast patroon, waardoor deze moeilijk te beschrijven zijn.

Bij de stroming rond auto's spelen drag en lift een grote rol. Drag kunnen we zien als een weerstand op de auto. Viskeuze krachten geven een weerstand op het oppervlak, waardoor de auto als het ware wordt afgeremd. Drag is ook de oorzaak dat een auto op een bepaald moment niet sneller kan. Lift wordt veroorzaakt door een drukverschil rond de auto. Bij een rijdende auto is de druk aan de bovenzijde lager dan aan de onderzijde. De auto wordt dan als het ware omhoog gedrukt.

Voor een auto is de aerodynamische drag uitgebreid bekeken. Het is mogelijk om de drag per deel van de auto te bekijken en deze te optimaliseren zodat de drag zo laag mogelijk is. Ook is het mogelijk om wijzigingen aan te brengen in de drag door het plaatsen van spoilers. Deze vleugels (spoilers) worden zeer veel gebruikt bij racewagens. Ze creëren downforce, welke er voor zorgt dat de auto's ook bij hogere snelheden op de grond blijft. De downforce werkt de ontstane lift tegen.

Tegenwoordig wordt er ook bij het berekenen van de luchtstroming rondom een auto veel gebruik gemaakt van de computer. Met behulp van methoden uit Computational Fluid Dynamics (CFD) is het mogelijk om numeriek te rekenen aan de aerodynamica en stromingen rond een auto. De basis van deze berekeningen zijn de Navier-Stokes vergelijkingen. Door het uitvoeren van een dicretisatie van het oppervlak van een auto en soms met de omgeving is het mogelijk om numeriek de oplossing te bepalen van de Navier-Stokes vergelijkingen.

6.2 Discussie

Zoals we gezien hebben in deze scriptie is het mogelijk om de stroming rond een auto wiskundig te bekijken. Met behulp van de bekende stromingsleer kunnen we de bewegingsvergelijkingen opstellen voor een stroming. Toch is de stroming daarmee niet concreet uit te rekenen. Het blijft vooral bij het schetsen van stroomlijnen aan de hand van de vergelijkingen. Omdat er in de auto-industrie erg veel onderzoek verricht is naar de aerodynamica is de drag rond een auto wel goed te beschrijven. Helaas is dit wiskundig gezien minder interessant. De meeste resultaten zijn namelijk verkregen met experimenten in windtunnels. Ditzelfde geldt ook voor de stroming rond racewagens. De luchtstroming rond de vleugels, die gemonteerd kunnen worden op een racwagen, is op zichzelf wiskundig te beschrijven met behulp van conforme afbeeldingen. Zodra ze daadwerkelijk op de auto geplaatst worden, valt er vanuit de wiskunde weinig meer aan te rekenen. Ook hier zijn veel resultaten verkregen door experimenten in windtunnels en met behulp van de computer.

Iets wat wiskundig gezien interessanter is, is het gebruik van Computational Fluid Dynamics bij het bepalen van de stroming. Hierbij wordt veelvuldig gebruik gemaakt van numerieke wiskunde methoden om problemen op te lossen. Het was echter voor dit onderzoek niet mogelijk om hier zelf aan te werken. In de scriptie is het dan ook gebleven bij een beschrijving. Doordat er een discretisatierooster wordt gebruikt voor het berekenen van de stroming, is de oplossing niet continu, in tegenstelling tot de werkelijkheid. Daarnaast is ook de grootte van het rooster een discussiepunt. Een grote afstand tussen de roosterpunten kan namelijk onnauwkeurige resultaten geven, terwijl het rekenen met een heel fijn rooster te veel tijd in beslag kan nemen. Ook kunnen numerieke methoden een dermate grote fout maken dat de uitkomst onnauwkeurig is en niet overeenkomt met de werkelijkheid.

Bibliografie

[1] Hucho, W.H. e.a., *Aerodynamics of Road vehicles*, Warrendale: Society of Automotive Engineers Inc., 1998

[2] Katz, J., *Race Car Aerodynamics: Designing for Speed*, Cambridge: Bentley publishers, 2006

[3] Kuethe, A., Schetzer, J.D., *Foundations of Aerodynamics*, New York: John Wiley & Sons Inc., 1959

[4] Panton, R.L., *Incompressible flow*, New York: John Wiley & Sons inc., 1996

[5] Batchelor, G.K., *An introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge: Cambridge University Press, 2000

[6] Moran, J., *An introduction to Theoretival and Computational Aerodynamics*, New York: John Wiley & Sons Inc., 1984

[7] Veldman, A.E.P., Velická, A., *Stromingsleer*, Groningen: Rijksuniversiteit Groningen, 2007

[8] Burden, R.L., Faires, J.D., *Numerical Analysis 8th edition*, Belmont: Thomson Brooks/Cole, 2005

[9] Borg, A., *Status and Trends in Large Scale CFD Applications for Vehicle Design at Volvo Car Corporation*, Zweden: Volvo Car Corp., Fluid Dynamics Center

[10] Comte, C. e.a., *Numerical and experimental study of race car mirror aerodynamics*, Aalburg (Denemarken): Aalburg University

[11] `http://www.audiworld.com/news/99/wind/header.jpg` Webstite bezocht op 25-08-08. Afbeelding voorkant.