De samenstelling van een distributie met een C^∞ submersie: de pullback

Michel de Leeuw

Vakgroep
Wiskunde

RuG

Afstudeerverslag

De samenstelling van een distributie met een C^∞ submersie: de pullback

Michel de Leeuw

Rijksuniversiteit Groningen
Vakgroep Wiskunde
Postbus 800
9700 AV Groningen

Augustus 1996

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Enkele definities en stellingen

In dit hoofdstuk zullen we eerst wat definities en stellingen bekijken die we later nodig zullen hebben. Als bron gebruiken we hoofdzakelijk Hörmander [1].

1.1 De inverse funktiestelling

Zij U en V open in $\mathbb{R}^n$, of meer algemeen open deelverzamelingen van een Banachruimte.

Stelling 1.1.1 (De inverse funktiestelling.) *Zij X open in U en $f \in C^1(X, V)$ en zij $x_0 \in X$, $f(x_0) = y_0$. Voor het bestaan van een $g \in C^1(Y, U)$, waar Y een omgeving van y_0 is, zodanig dat a) $f \circ g = id$ rond y_0 of b) $g \circ f = id$ rond x_0 of c) $f \circ g = id$ rond y_0 en $g \circ f = id$ rond x_0 is het nodig en voldoende dat er een lineaire afbeelding $A \in L(V, U)$ bestaat, zodanig dat respectievelijk*

a)' $f'(x_0)A = id_V$ b)' $Af'(x_0) = id_U$ c)' $f'(x_0)A = id_V$, $Af'(x_0) = id_U$

De voorwaarde c)' is equivalent met de bijectiviteit van $f'(x_0)$ en het impliceert dat g uniek bepaald is rond y_0. Als V (resp. U) eindig dimensionaal is dan is a)' (resp. b)') equivalent met de surjectiviteit (resp. injectiviteit) van $f'(x_0)$.

1.2 Distributies

Zij X een open deelvezameling van $\mathbb{R}^n$ We definiëren $\mathcal{D}(X)$ zoals gewoonlijk als de ruimte van toetsfunkties op X en $\mathcal{D}'(X)$ als de ruimte van continue lineaire vormen op $\mathcal{D}(X)$, de distributies.

Stelling 1.2.1 *Zij X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$, dan bestaat er voor alle $u \in \mathcal{D}'(X)$ een rij $u_j \in \mathcal{D}(X)$ zodat $u_j \to u$ in $\mathcal{D}'(X)$.*

Deze stelling vertelt ons dus, dat elke distributie in $\mathcal{D}'(X)$ benaderd kan worden met toetsfunkties op X.

Stelling 1.2.2 (Schwartz) *Een distributie $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ met drager in 0 is een eindige lineaire combinatie van δ en afgeleiden van δ.*

Stelling 1.2.3 *Stel $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ en stel dat u homogeen van de graad a is, dan geldt:*

$$(a+n)\langle u,\phi\rangle + \langle u,\lambda\phi\rangle = 0$$

waarbij

(1.1) $$\lambda = \sum_{j\leq n} x_j \frac{\partial}{\partial x_j}$$

het radiale vectorveld is.

Bewijs stelling 1.2.3: Omdat u homogeen van de graad a is geldt:

(1.2) $$\langle u,\phi\rangle = t^a\langle u,\phi_t\rangle, \qquad \phi_t(x) = t^n\phi(tx),\ t>0$$

We kunnen deze vergelijking differentiëren naar t, voor $t>0$ en vervolgens $t=1$ invullen. Dit levert het gevraagde.

Gevolg 1.2.4 (Euler's vergelijking voor homogene distributies.) *Stel $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ en stel dat u homogeen van de graad a is, dan geldt:*

(1.3) $$\lambda u = au$$

Bewijs:

$$\begin{aligned}
\langle\lambda u,\phi\rangle &= \langle\lambda u,\phi\rangle + \langle u,\lambda\phi\rangle - \langle u,\lambda\phi\rangle \\
&= \langle\lambda u,\phi\rangle + \sum\langle x_j u,\partial_j\phi\rangle - \langle u,\lambda\phi\rangle \\
&= \langle\lambda u,\phi\rangle - \sum\langle \partial_j x_j u,\phi\rangle - \langle u,\lambda\phi\rangle \\
&= \langle\lambda u,\phi\rangle - \langle\lambda u,\phi\rangle - n\langle u,\phi\rangle - \langle u,\lambda\phi\rangle \\
&= a\langle u,\phi\rangle + \langle u,\lambda\phi\rangle - \langle u,\lambda\phi\rangle \\
&= a\langle u,\phi\rangle
\end{aligned}$$

1.3 De distributies x_+^a en χ_+^a.

Als a een complex getal is zodat $\operatorname{Re} a > -1$ dan is de functie,

$$x_+^a = x^a \text{ als } x>0,\ x_+^a = 0 \text{ als } x\leq 0$$

een lokaal integreerbare functie op $\mathbb{R}$ en definiëert daarom een distributie. Het is duidelijk dat geldt:

(1.4) $$xx_+^a = x_+^{a+1} \text{ als } \operatorname{Re} a > -1 \text{ en}$$

(1.5) $$\frac{d}{dx}x_+^a = ax_+^{a-1} \text{ als Re } a > 0.$$

We willen nu de definitie van x_+^a uitbreiden naar alle $a \in \mathbb{C}$ zodat bovenstaande eigenschappen zoveel mogelijk behouden blijven in de zin van distributies.
We definiëren nu voor alle $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ de funktie

$$a \mapsto I_a(\phi) = \langle x_+^a, \phi \rangle = \int_0^\infty x^a \phi(x)dx$$

Deze funktie is analytisch als Re $a > -1$ en er geldt dankzij (1.5) :

(1.6) $$I_a(\phi') = -aI_{a-1}(\phi) \text{ als Re } a > 0$$

en dus hebben we voor alle a, met Re $a > -1$ en elke integer k, met $k > 0$:

(1.7) $$I_a(\phi) = (-1)^k I_{a+k}(\phi^{(k)})/((a+1)\dots(a+k))$$

De rechterzijde is analytisch voor Re $a > -k-1$ met uitzondering van enkelvoudige polen in $a = -1, -2, \dots, -k$. Dit betekent dat we $I_a(\phi)$ kunnen definiëren voor alle a, waarbij a geen negatieve integer is, door de analytische voortzetting van $I_a(\phi)$ of door (1.7) waar $k > -1 -$ Re a. Ook weten we dankzij (1.7) dat I_a een distributie definieert van de orde $\leq k$. We noteren deze distributie met x_+^a.
We bepalen nu het residu van I_a in $a = -k$

(1.8) $$\begin{aligned}\lim_{a\to -k}(a+k)I_a(\phi) &= -1^k I_0(\phi^{(k)})/((1-k)\dots(-1)) \\ &= \phi^{(k-1)}(0)/(k-1)!\end{aligned}$$

ofwel

(1.9) $$(a+k)x_+^a \to (-1)^{k-1}\delta^{(k-1)}/(k-1)! \text{ als } a \to -k.$$

en als $a + k = \epsilon$

$$\begin{aligned} & I_a(\phi) - \phi^{(k-1)}(0)/((k-1)!\ \epsilon) \\ = \ & (-1)^k \int_0^\infty (x^\epsilon - 1)\phi^{(k)}(x)/((\epsilon + 1 - k)\dots\epsilon)dx + \\ & \phi^{(k-1)}(0)(1/((k-1-\epsilon)\dots(1-\epsilon)) - 1/(k-1)!)/\epsilon \\ \to \ & -\int_0^\infty (\log x)\phi^{(k)}(x)dx/(k-1)! + \phi^{(k-1)}(0)(\sum_1^{k-1} 1/j)/(k-1)!. \end{aligned}$$

als $\epsilon \to 0$, en daarom definiëren we

(1.10) $$\begin{aligned} & \langle x_+^{-k}, \phi \rangle = \\ & -\int_0^\infty (\log x)\phi^{(k)}(x)dx/(k-1)! + \phi^{(k-1)}(0)(\sum_1^{k-1} 1/j)/(k-1)! \end{aligned}$$

Vergelijking (1.4), ofwel $\langle x_+^a, x\phi\rangle = \langle x_+^{a+1}, \phi\rangle$ volgt nu voor alle $a \in \mathbb{C}$ uit de definitie d.m.v. analytische voortzetting als a geen negatieve integer is en direct uit (1.10) als a wel een negatieve integer is.
Evenzo volgt (1.5) uit de definitie d.m.v. analytische voortzetting als a geen negatieve integer is. Als $a = -k$ wel een negatieve integer is, kunnen we direct uit (1.10) berekenen dat

$$\frac{d}{dx} x_+^{-k} = -k x_+^{-k-1} + (-1)^k \delta^{(k)}/k!. \tag{1.11}$$

Propositie 1.3.1 *Als a geen negatieve integer is, is x_+^a homogeen van de graad a.*

Bewijs: Stel $t > 0$ en $\operatorname{Re} a > -1$, dan geldt

$$\langle x_+^a, \phi\rangle = \int_0^\infty x^a \phi(x) dx = t^a \int_0^\infty x^a \phi(tx) t dx = t^a \langle x_+^a, \phi_t\rangle$$

waarbij $\phi_t(x) = t\phi(tx)$. Omdat de analytische voortzetting van het linkerlid en rechterlid hetzelfde moeten zijn is de propositie bewezen.

Definitie 1.3.2 *x_-^a is de distributie die voldoet aan:*

$$\langle x_-^a, \phi\rangle = \langle x_+^a, \check{\phi}\rangle, \qquad \check{\phi}(x) = \phi(-x)$$

Definitie 1.3.3

$$\chi_+^a = \frac{x_+^a}{\Gamma(a+1)}, \qquad \operatorname{Re} a > -1 \tag{1.12}$$

We onderzoeken nu of dit een goede definitie is. Omdat

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \quad \operatorname{Re} a > 0, \tag{1.13}$$

kunnen we $\Gamma(a)$ analytisch voortzetten naar een meromorfe funktie in $\mathbb{C}$ met enkelvoudige polen in de negatieve integers zodat (1.13) geldig blijft als a geen negatieve integer is.
Verder volgt uit

$$\Gamma(a)\Gamma(a-1) = \pi/\sin(\pi a)$$

dat de Γ- funktie geen nulpunten heeft, als a geen negatieve integer is.
Dus geldt dat

$$a \mapsto J_a(\phi) = \langle \chi_+^a, \phi\rangle = \int_0^\infty x^a \phi(x)/\Gamma(a+1) dx$$

een analytische funktie is van a, voor $\operatorname{Re} a > 0$. Bovendien geldt dankzij (1.13)

$$\Gamma(a) = \Gamma(a+k)/((a+k)\dots(a+1))$$

voor elke integer k, met $k > 0$, zodat

$$\begin{aligned} J_a(\phi) &= \frac{(-1)^k J_{a+k}(\phi^{(k)})((a+k)\dots(a+1))}{(a+k)\dots(a+1)} \\ &= (-1)^k J_{a+k}(\phi^{(k)}) \end{aligned}$$

We hebben al gezien dat het rechterlid analytisch is als Re $a + k > -1$, zodat het linkerlid analytisch is als Re $a > -1 - k$. Omdat k een willekeurige integer > 0 is, kunnen we $J_a(\phi)$ dus analytisch voortzetten naar $a \in \mathbb{C}$. We noemen deze funktie ook $J_a(\phi)$. Bovendien geldt dan voor alle $a \in \mathbb{C}$

$$J_a(\phi) = (-1)^k J_{a+k}(\phi^{(k)})$$

waarbij $k > 0$ een integer is.
We definieren voor alle $a \in \mathbb{C}$ de distributie χ_+^a dan als

$$\langle \chi_+^a, \phi \rangle = J_a(\phi)$$

zodat

$$\begin{aligned} \langle d\chi_+^a/dx, \phi \rangle &= -\langle \chi_+^a, \phi' \rangle \\ &= -J_a(\phi') \\ &= J_{a-1}(\phi) \\ &= \langle \chi_+^{a-1}, \phi \rangle \end{aligned}$$

en we concluderen

(1.14) $$\frac{d\chi_+^a}{dx} = \chi_+^{a-1}.$$

Bovendien weten we nu

$$\chi_+^0 = \frac{d}{dx}\chi_+^1 = \frac{d}{dx}x_+^1/\Gamma(1) = \frac{d}{dx}x_+^1 = Y,$$

waarbij Y de Heaviside één-staps funktie is. We vinden zo

(1.15) $$\chi_+^{-k} = \delta^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Propositie 1.3.4 *Voor alle $a \in \mathbb{C}$ is χ_+^a homogeen van de graad a.*

Bewijs: Als a een negatieve integer is geldt $\chi_+^a = \delta^{(-a-1)}$ en deze is inderdaad homogeen van de graad a.
Als a geen negatieve integer is geldt

$$\begin{aligned} \langle \chi_+^a, \phi \rangle &= J_a(\phi) \\ &= I_a(\phi)/\Gamma(a+1) \\ &= \langle x_+^a, \phi \rangle/\Gamma(a+1) \end{aligned}$$

en x_+^a is homogeen van de graad a volgens propositie 1.3.1.

1.4 χ_+^a in de convolutie-algebra $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$

We weten dat $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, de ruimte van alle distributies $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ met dr(T)$\subset [0,\infty)$, een convolutie-algebra is. χ_+^a, met Re $a > -1$ heeft z'n drager in $[0,\infty)$ en behoort dus tot $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. Stel nu

$$Y_\alpha(x) = \chi_+^{\alpha-1}(x) = \frac{Y(x)x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \qquad \text{Re } \alpha > 0 \tag{1.16}$$

zodat $Y_1 = \chi_+^0 = Y$. Y en χ_+ verschillen dus in de keuze van de parameter.
Stel nu dat Re $\alpha > 0$ en Re $\beta > 0$, dus Y_α en Y_β behoren beide tot $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$. Dit betekent dat $Y_\alpha * Y_\beta$ een reguliere distributie is en er geldt

$$\begin{aligned}
(Y_\alpha * Y_\beta)(x) &= \int_{\mathbb{R}} Y_\alpha(x-y)\, Y_\beta(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{Y(x-y)\,(x-y)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\, \frac{Y(y)\,(y)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\, dy \\
&= Y(x) \int_0^x \frac{(x-y)^{\alpha-1}\, y^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\, dy \\
&= \frac{Y(x)}{\Gamma(\alpha+\beta)\, B(\alpha,\beta)} \int_0^x (x-y)^{\alpha-1}\, y^{\beta-1}\, dy \\
&= \frac{Y(x)}{\Gamma(\alpha+\beta)\, B(\alpha,\beta)} \int_0^1 (x-xt)^{\alpha-1}\, (xt)^{\beta-1}\, x\, dt \\
&= \frac{Y(x)\, x^{\alpha-1}\, x^{\beta-1} x}{\Gamma(\alpha+\beta)\, B(\alpha,\beta)} \int_0^1 (1-t)^{\alpha-1}\, t^{\beta-1}\, dt \\
&= Y(x) \frac{x^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
&= Y_{\alpha+\beta}(x)
\end{aligned}$$

waarbij

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}\, (1-t)^{\beta-1}\, dt$$

de *beta funktie* is. Voor de beta funktie geldt

$$B(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta) = \Gamma(\alpha)\Gamma(\beta).$$

We mogen nu dus concluderen dat als Re $\alpha > 0$ en Re $\beta > 0$

$$Y_\alpha * Y_\beta = Y_{\alpha+\beta} \tag{1.17}$$

en dus

$$\chi_+^{\alpha-1} * \chi_+^{\beta-1} = \chi_+^{\alpha+\beta-1}.$$

We zien dat de keuze van de parameter in Y zo gekozen is dat het convolutieprodukt de eigenschap (1.17) heeft. Dit is ook de keuze die Schwartz maakte. Wij kiezen voor de definitie χ_+ omdat we de homogeniteits-eigenschap later zullen gebruiken. We kunnen nu ook weer een bekende eigenschap afleiden.

(1.18) $$Y'_{\alpha+1} = (Y_\alpha * Y_1)' = Y_\alpha * Y'_1 = Y_\alpha * \delta = Y_\alpha$$

Wanneer we definiëren

(1.19) $$Y_\alpha = Y'_{\alpha+1}, \qquad \text{als Re } \alpha = 0$$

dan geldt $Y_0 = \delta$ en in het bijzonder is (1.18) ook geldig als Re $\alpha \geq 0$. Stel nu $0 \leq$ Re $\alpha \leq 1$, dan geldt

$$Y_\alpha * Y_{1-\alpha} = Y_{\alpha+1-\alpha} = Y$$

dus heeft Y_α een inverse in de convolutie-algebra $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$, te weten

$$Y'_{1-\alpha}.$$

We breiden nu de definitie van Y_α uit zodat Y_α ook gedefiniëerd als Re $\alpha < 0$ door

$$Y_\alpha = Y^{(k)}_{\alpha+k},$$

als Re $\alpha < 0$ en α is geen negatieve integer en $k \in \mathbb{N}$, zodat $k - 1 \leq |\text{Re } a| < k$, dan geldt $a + k \in (0, 1]$ en

$$\begin{aligned} Y_\alpha * Y_{-\alpha} &= (Y_{\alpha+k})^{(k)} * Y_{-\alpha} = \delta^{(k)} * Y_{\alpha+k} * Y_{-\alpha} \\ &= \delta^{(k)} * Y_{\alpha+k-\alpha} = \delta^{(k)} * Y_k = \delta^{(k)} * Y_k^{(k)} \\ &= \delta. \end{aligned}$$

Dus elke Y_α heeft een inverse in de convolutie-algebra $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

We noemen nog één eigenschap van de beta funktie.

$$B(a, 1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

En er geldt dus:

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

1.5 Uitbreidingen van homogene distributies

Stelling 1.5.1 *Als $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_*)$ homogeen van de graad a is en a is geen integer $\leq -n$, dan heeft u een unieke voortzetting $\dot{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, die homogeen van de graad a is. Bovendien is de afbeelding $u \mapsto \dot{u}$ continu.*

Bewijs: a) Uniciteit. Stel er zijn twee verschillende voortzettingen. Dan is de drager van het verschil van deze twee voortzettingen bevat in 0. Uit de stelling van Schwartz volgt nu dat dit verschil een lineaire combinatie van afgeleiden is van δ. Maar omdat dit verschil ook homogeen is van de graad a, moet a een integer zijn $\leq -n$. Dit bewijst de uniciteit.
b) Existensie. Stel u is een funktie op $\mathbb{R}^n_*$ en dat ϕ een toetsfunktie is op $\mathbb{R}^n_*$, dan kunnen we $\langle u, \phi\rangle$ in poolcoordinaten uitdrukken.

$$
(1.20) \qquad \begin{aligned}
\langle u, \phi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n\backslash 0} u(x)\phi(x)dx \\
&= \int_0^\infty \int_{|\omega|=1} u(\omega) r^{a+n-1}\phi(r\omega)dr d\omega \\
&= \int_{|\omega|=1} u(\omega) \int_0^\infty r^{a+n-1}\phi(r\omega)dr d\omega \\
&= \int_{|\omega|=1} u(\omega)\langle t_+^{a+n-1}, \phi(t\omega)\rangle d\omega \\
&= \int_{|\omega|=1} u(\omega)(R_a\phi)(\omega)d\omega
\end{aligned}
$$

met $(R_a\phi)(x) = \langle t_+^{a+n-1}, \phi(tx)\rangle, \quad 0 \neq x \in \mathbb{R}^n$.
Maar deze $(R_a\phi)(x)$ kunnen we ook definiëren als $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Er geldt dan met het onderstaande lemma dat R_a een continue afbeelding is van $\mathcal{D}(K)$ naar $C^\infty(\mathbb{R}^n_*)$ voor elke compacte verzameling $K \subset \mathbb{R}^n_*$.

We kiezen nu een funktie $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_*)$, zodat

$$
(1.21) \qquad \int_0^\infty \psi(tx)dt/t = 1, \qquad x \neq 0.
$$

Dit kan door $\psi(x)$ als een funktie van $|x|$ te nemen, d.w.z

$$
\psi(x) = \bar{\psi}(|x|), \qquad \bar{\psi} \in \mathcal{D}(0,\infty)
$$

De voorwaarde (1.21) kunnen we dan schrijven als

$$
(1.22) \qquad \int_0^\infty \frac{\bar{\psi}(tx)}{t}dt = \int_0^\infty \frac{\bar{\psi}(s)}{s/|x|}1/|x|ds = \int_0^\infty \frac{\bar{\psi}(s)}{s}ds = 1
$$

en omdat $\bar{\psi} \in \mathcal{D}(0,\infty)$ bestaat er een $\epsilon > 0$ zodat $\bar{\psi}(s) = 0$ voor alle $s < \epsilon$ en heeft de laatste integraal dus betekenis.

We definiëren nu de distributie $\dot{u} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ als

$$\langle \dot{u}, \phi \rangle = \langle u, \psi R_a \phi \rangle, \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \tag{1.23}$$

We onderzoeken nu eerst of dit een goede definitie is.
Er geldt dat $R_a\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n_*)$ en $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ en dus dat $\psi R_a \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_*)$ dus $\dot{u}$ is goed gedefiniëerd op $\mathbb{R}^n$. Verder is $\dot{u}$ onafhankelijk van de keuze van ψ. Er geldt immers

$$\begin{aligned} R_a(\psi R_a \phi)(x) &= \int_0^\infty t^{a+n-1} \psi(tx)(R_a\phi)(tx)dt \\ &= (R_a\phi)(x) \int_0^\infty \psi(tx)dt/t \\ &= (R_a\phi)(x). \end{aligned}$$

Ofwel we hebben dankzij (1.21)

$$\begin{aligned} \langle \dot{u}, \phi \rangle &= \langle u, \psi R_a \phi \rangle \\ &= \int_{|\omega|=1} u(\omega)(R_a(\psi R_a \phi))(\omega) d\omega \\ &= \int_{|\omega|=1} u(\omega)(R_a\phi)(\omega) d\omega \end{aligned}$$

en de laatste term is onafhankelijk van ψ.
Als $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n_*)$ dan geldt

$$\langle \dot{u}, \phi \rangle = \langle u, \psi R_a \phi \rangle = \int_{|\omega|=1} u(\omega)(R_a\phi)(\omega)d\omega = \langle u, \phi \rangle$$

dus is $\dot{u}$ een voortzetting van u. Bovendien volgt meteen uit (1.23) dat de afbeelding $u \mapsto \dot{u}$ continu is.

We moeten nu alleen nog controleren dat $\dot{u}$ homogeen van de graad a is. Daarvoor maken we gebruik van het feit dat r_+^{a+n-1} homogeen van de graad $a+n-1$ is.

$$\begin{aligned} (R_a\phi_t)(x) &= \langle r_+^{a+n-1}, \phi_t(rx) \rangle = \langle r_+^{a+n-1}, t^n \phi(trx) \rangle \\ &= t^{n-1} \langle r_+^{a+n-1}, t\phi(trx) \rangle = t^{n-1-(a+n-1)} \langle r_+^{a+n-1}, \phi(rx) \rangle \\ &= t^{-a} R_a \phi(x) \end{aligned}$$

We kunnen nu aantonen dat $\dot{u}$ homogeen van de graad a is.

$$\langle \dot{u}, \phi_t \rangle = \langle u, \psi R_a \phi_t \rangle = \langle u, \psi t^{-a} R_a \phi \rangle = t^{-a} \langle u, \psi R_a \phi \rangle = t^{-a} \langle \dot{u}, \phi \rangle$$

Hiermee is de stelling bewezen.

Lemma 1.5.2 *Stel $\phi(x,y) \in C^\infty(X \times Y)$, waarbij Y een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ is en er bestaat een compacte verzameling $K \subset X$ zodat $\phi(x,y) = 0$ als $x \notin K$, dan is*

$$y \mapsto \langle u, \phi(\cdot, y)\rangle$$

een C^∞ funktie van y als $u \in \mathcal{D}'(X)$, en

$$D_y^\alpha \langle u, \phi(\cdot, y)\rangle = \langle u, D_y^\alpha \phi(\cdot, y)\rangle$$

waarbij α multi-index is.

Bewijs: Voor vaste $y \in Y$ kunnen we de formule van Taylor gebruiken om ϕ te ontwikkelen rond y.

$$\phi(x, y+h) \quad = \quad \phi(x,y) + \sum h_j \frac{\partial \phi(x,y)}{\partial y_j} + \psi(x,y,h)$$

waarbij

$$\sup_x |D_x^\alpha \psi(x,y,h)| = O(|h|^2), \qquad \text{als } h \to 0,\ \forall \alpha$$

Ofwel

$$\langle u, \phi(\cdot, y+h)\rangle = \langle u, \phi(\cdot, y)\rangle + \sum h_j \langle u, \frac{\partial \phi(\cdot, y)}{\partial y_j}\rangle + O(|h|^2)$$

We mogen nu concluderen dat $y \mapsto \langle u, \phi(\cdot, y)\rangle$ differentieerbaar is en dat geldt

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\langle u, \phi(\cdot, y)\rangle = \langle u, \frac{\partial \phi(\cdot, y)}{\partial y_j}\rangle \tag{1.24}$$

We krijgen nu het laatste deel van het lemma door het herhaald toepassen van (1.24).

1.6 Integralen en determinanten

In deze paragraaf zullen we gaan kijken naar enige integralen en zullen we wat rekenwerk verrichten aan determinanten.

We bekijken de integraal

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\, dx. \tag{1.25}$$

Als ω_n de oppervlakte is van de eenheidsbol in $\mathbb{R}^n$ en we gebruiken poolcoordinaten in (1.25), dan krijgen we

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt\right)^n \\
&= \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1} \omega_n dr \\
&= \frac{\omega_n}{2} \int_0^{\infty} t^{n/2-1} e^{-t} dt \\
&= \omega_n \Gamma(n/2)/2
\end{aligned}$$

We weten dat $\Gamma(1) = 1$, dus geldt

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt\right)^2 = \frac{\omega_2}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

en dus

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}. \tag{1.26}$$

Bovendien weten we nu met $a\Gamma(a) = \Gamma(a+1)$, dat algemeen geldt

$$\omega_n = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2). \tag{1.27}$$

We kunnen nu op (1.26) een transformatie van variabelen toepassen en krijgen dan, met $r = \frac{t}{\sqrt{a}}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ar^2} dr = (\pi/a)^{\frac{1}{2}}, \quad a > 0. \tag{1.28}$$

Met deze wijsheid kunnen we nu determinanten gaan berekenen.

Propositie 1.6.1 *Stel nu dat A een symmetrische, positief definiete, $n \times n$ matrix is, dan geldt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle} dx = \pi^{n/2}(\det A)^{-\frac{1}{2}} \tag{1.29}$$

Bewijs: We kunnen A diagonaal maken door een orthogonale transformatie P. Dan geldt $A = P^T\Lambda\ P$, waarbij Λ diagonaal is en op de diagonaal de eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ staan, dus

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle P^T\Lambda Px,x\rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle \Lambda Px,Px\rangle} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle \Lambda y,y\rangle} dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2}\, dy \\
&= \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_i y_i^2}\, dy_i = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\pi}{\lambda_i}\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\prod_{i=1}^n \lambda_i}} \pi^{n/2} = \pi^{n/2}(\det A)^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

We merken hierbij op dat omdat A positief definiet is, alle eigenwaarden, λ_i, van A positief moeten zijn en dat daarom de integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_i y_i^2} dy_i \qquad i = 1, \ldots, n$$

betekenis hebben en dat $\det A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$.

Stel nu

$$\mathcal{H} = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid A \text{ symmetrisch en Re } A \text{ strikt positief definiet}\}$$

Propositie 1.6.2 *Voor alle* $A \in \mathcal{H}$ *geldt* $\det A \neq 0$ *en (1.29). Als* A *in de afsluiting van* $\mathcal{H}$ *zit, is* $(\det A)^{\frac{1}{2}}$ *uniek gedefiniëerd.*

Bewijs: We bewijzen eerst dat $\det A \neq 0$. Daarvoor constateren we eerst dat met $x_i, x_j, \alpha \in \mathbb{C}$

$$\text{Re}\,\big(\alpha(\bar{x}_i x_j + x_i \bar{x}_j)\big) = (\bar{x}_i x_j + x_i \bar{x}_j)\ \text{Re}\,\alpha$$

omdat $\bar{x}_i x_j + x_i \bar{x}_j = 2\ \text{Re}\,(x_i \bar{x}_j)$.
Hieruit volgt, met $A = (a_{ij})$

$$\begin{aligned}
\text{Re}\,(Ax \mid x) &= \text{Re}\,\Big(\sum_i \bar{x}_i \sum_j a_{ij} x_j\Big) = \text{Re}\,\Big(\sum_{ij} a_{ij} \bar{x}_i x_j\Big) \\
&= \text{Re}\,\Big(\sum_k a_{kk} \bar{x}_k x_k + \sum_{i \neq j} a_{ij} \bar{x}_i x_j\Big) \\
&= \text{Re}\,\Big(\sum_k a_{kk} |x_k|^2 + \sum_{i<j} a_{ij} \bar{x}_i x_j + a_{ji} x_i \bar{x}_j\Big) \\
&= \text{Re}\,\Big(\sum_k a_{kk} |x_k|^2 + \sum_{i<j} a_{ij} (\bar{x}_i x_j + x_i \bar{x}_j)\Big) \\
&= \sum_k (\text{Re}\, a_{kk})\ |x_k|^2 + \sum_{i<j} (\text{Re}\, a_{ij})\ (\bar{x}_i x_j + x_i \bar{x}_j) \\
&= \ldots \\
&= \sum_i \bar{x}_i \sum_j (\text{Re}\, a_{ij})\ x_j = (\ (\text{Re}\, A)\ x \mid x).
\end{aligned}$$

Dus

(1.30) $$\text{Re}\,(Ax \mid x) = (\ (\text{Re}\, A)\ x \mid x) > 0, \quad \text{als } x \neq 0.$$

omdat Re A positief definiet is. Dus

$$x \neq 0 \Rightarrow (Ax \mid x) \neq 0 \Rightarrow Ax \neq 0$$

ofwel 0 is geen eigenwaarde van A en dus geldt det $A \neq 0$.

Om te bewijzen dat (1.29) geldt maken we gebruik van het volgende lemma, zie Rudin [4].

Lemma 1.6.3 *Als f analytisch (d.w.z. holomorf) is op een enkelvoudig samenhangend gebied $\Omega \subset \mathbb{C}^N$ en f heeft geen nulpunten in Ω, dan bestaat er een analytische funktie φ op Ω, zodat $f = \varphi^2$ en $\varphi(x) > 0$ als $f(x) > 0$.*

We tonen eerst aan dat $\mathcal{H}$ convex en dus enkelvoudig samenhangend is. Stel daarom $A, B \in \mathcal{H}$ en $c \in (0,1)$. Dan geldt

$$\begin{aligned}
(\text{Re }(cA + (1-c)B)x \mid x) &= \text{Re }((cA + (1-c)B)x \mid x) \\
&= \text{Re }(c(Ax \mid x) + (1-c)(Bx \mid x)) \\
&= c\text{Re }(Ax \mid x) + (1-c)\text{Re }(Bx \mid x) \\
&= c(\text{Re }(Ax) \mid x) + (1-c)(\text{Re }(Bx) \mid x) \\
&> 0
\end{aligned}$$

omdat Re A en Re B positief definiet zijn. Dus Re $(cA + (1-c)B)$ is positief definiet en er geldt $(cA + (1-c)B) \in \mathcal{H}$.

We kunnen $\mathcal{H}$ zien als een enkelvoudig samenhangende deelruimte van $\mathbb{C}^{n(n+1)/2}$, de ruimte van symmetrische $n \times n$ matrices. Omdat de determinant een analytische funktie zonder nulpunten is op $\mathcal{H}$, bestaat er volgens het lemma een funktie φ in $\mathcal{H}$, zodat det $A = \varphi^2(A)$ en definieren we $(\det A)^{1/2} = \varphi(A)$. Het rechterlid van (1.29) is dus analytisch in $\mathcal{H}$, het linkerlid is dit ook en de gelijkheid geldt dus niet alleen als A reëel is, maar ook als $A \in \mathcal{H}$, omdat de analytische voortzettingen van het linker- en rechterlid gelijk moeten zijn.
Als A in de afsluiting van $\mathcal{H}$ zit is $(\det A)^{1/2}$ uniek gedefiniëerd. Immers als det $A \neq 0$ hebben we twee mogelijkheden om de wortel te nemen. Maar omdat er maar één voldoet in een omgeving van A in $\mathcal{H}$ hebben we dankzij de continuiteit van de determinant dat $(\det A)^{1/2}$ goed gedefiniëerd is.

Propositie 1.6.4 *Stel dat B reëel, symmetrisch en niet-singulier is. Dan geldt*

$$(\det(iB))^{\frac{1}{2}} = |\det B|^{\frac{1}{2}} \exp(\pi i(\text{sgn } B)/4) \tag{1.31}$$

waarbij sgn B *de signatuur van B is, d.w.z. als de eigenwaarden van B gelijk zijn aan λ_i, $i = 1, \ldots, n$, is*

$$\text{sgn } B = \sum_{i=1}^{n} \text{sgn } \lambda_i$$

Bewijs: Omdat B reëel en niet singulier is kunnen we B op diagonaalvorm brengen door een orthogonale transformatie. Hierdoor verandert $\det B$ niet en dus ook $\det iB$ niet. We gaan er dus vanuit dat B diagonaal is en $\langle Bx, x\rangle = \sum \lambda_j x_j^2$, waarbij $\lambda_i \neq 0$, $i = 1, \dots, n$ de eigenwaarden van B zijn. Ze zijn ongelijk aan 0 omdat B niet singulier is. We bepalen nu eerst $\det(iB + \epsilon I)^{1/2}$.

$$\det(iB + \epsilon I) = \prod(\epsilon + i\lambda_j)$$

ofwel

$$\begin{aligned}
\det(iB + \epsilon I)^{1/2} &= \prod(\epsilon + i\lambda_j)^{1/2} \\
&= |\det(iB + \epsilon I)|^{1/2} \exp\{i/2 \arg \prod(\epsilon + i\lambda_j)\} \\
&= |\det(iB + \epsilon I)|^{1/2} \exp\{i/2 \sum \arg(\epsilon + i\lambda_j)\}
\end{aligned}$$

We merken op dat elke term in de som in het rechterlid tussen $-\pi/2$ en $\pi/2$ ligt. We laten ϵ nu naar 0 gaan.

$$\begin{aligned}
\det(iB)^{1/2} &= \lim_{\epsilon \to 0} \det(iB + \epsilon I)^{1/2} \\
&= \lim_{\epsilon \to 0} |\det(iB + \epsilon I)|^{1/2} \exp\{i/2 \sum \arg(\epsilon + i\lambda_j)\} \\
&= |\det iB|^{1/2} \exp\{i/2 \sum \arg \lim_{\epsilon \to 0}(\epsilon + i\lambda_j)\} \\
&= |\det B|^{1/2} \exp\{i/2 \sum \arg(i\lambda_j)\} \\
&= |\det B|^{1/2} \exp\{i/2 \sum \frac{\pi}{2} \text{sgn } \lambda_j)\} \\
&= |\det B|^{1/2} \exp\{i\pi/4 \sum \text{sgn } \lambda_j)\} \\
&= |\det B|^{1/2} \exp\{\pi i(\text{sgn } B)/4\}
\end{aligned}$$

Hoofdstuk 2

Pullbacks

In het algemeen kunnen we als f een afbeelding is van $\mathbb{R}^n$ naar $\mathbb{R}^m$ en u een funktie is op $\mathbb{R}^m$ (d.w.z. u beeldt $\mathbb{R}^m$ af op $\mathbb{C}$), de samenstelling $u \circ f$ definiëren. $u \circ f$ is dan een funktie op $\mathbb{R}^n$. We kunnen f dan zien als een operator $f : u \mapsto u \circ f$, d.w.z. f beeldt u af op $u \circ f$, de samenstelling. We zeggen dat u wordt terug getrokken *(pulled back)* door f en dat $u \circ f$ de *pullback* is van u door f. We zullen zien dat de pullback ook gedefiniëerd kan worden als u een distributie is.

2.1 De pullback op $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$

Zij X_j een open deelverzameling van $\mathbb{R}^{n_j}$, $j = 1, 2$ en zij $f : X_1 \to X_2$ een C^∞ afbeelding. We willen nu de definitie van de samenstelling

$$C^0(X_2) \to C^0(X_1), \; u \mapsto u \circ f$$

uniek voortzetten naar de distributies $u \in \mathcal{D}'(X_2)$ zodat de afbeelding

$$\mathcal{D}'(X_2) \to \mathcal{D}'(X_1), \; u \mapsto u \circ f \text{ als } u \in C^0(X_2)$$

continu is.
Er blijkt dat dit mogelijk is als f een submersie is, d.w.z. als $f'(x)$ surjectief is voor alle $x \in X_1$:

Stelling 2.1.1 *Zij $X_j \subset \mathbb{R}^{n_j}$, $j = 1, 2$, open en zij $f : X_1 \to X_2$ een C^∞ afbeelding zodat $f'(x)$ surjectief is, voor alle $x \in X_1$.*
Dan bestaat er een unieke continue lineaire afbeelding $f^* : \mathcal{D}'(X_2) \to \mathcal{D}'(X_1)$ zodat $f^*u = u \circ f$ als $u \in C^0(X_2)$.
We noemen f^*u de pullback van u door f.

Bewijs: a) Uniciteit. Stel er bestaat nog een continue lineaire afbeelding $\hat{f}^*$ waarvoor geldt $\hat{f}^*u = u \circ f$ als $u \in C^0(X_2)$. Stel nu dat $u \in \mathcal{D}'(X_2)$, dan bestaat er volgens stelling 1.2.1 een rij $u_j \in \mathcal{D}(X_2)$ zodat $u_j \to u$ in $\mathcal{D}'(X_2)$. Er geldt dan

$$\hat{f}^* u = \lim_{j\to\infty} \hat{f}^* u_j = \lim_{j\to\infty} u_j \circ f = \lim_{j\to\infty} f^* u_j = f^* u$$

b) Existentie. We geven nu eerst een locale definitie van f^*u.
Stel $x_0 \in X_1$. We kiezen nu een C^∞ afbeelding $g : X_1 \to \mathbb{R}^{n_1 - n_2}$ zodat de directe som

$$\begin{aligned} f \oplus g : X_1 &\to \mathbb{R}^{n_1} = \mathbb{R}^{n_2} \oplus \mathbb{R}^{n_1-n_2}, \\ x &\mapsto (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

een bijectieve afgeleide heeft in x_0. We kunnen dit doen doordat $f'(x_0) : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$ surjectief is en voor g kunnen we bijvoorbeeld een lineaire afbeelding nemen.
We kunnen nu de inverse funktiestelling op $f \oplus g$ toepassen en vinden dan dat er een open omgeving $Y_1 \subset X_1$ van x_0 bestaat zodat de beperking van $f \oplus g$ op Y_1 een difeomorfisme is.
Ofwel er bestaat een open omgeving Y_2 van $(f(x_0), g(x_0))$ zodat

$$\begin{aligned} f \oplus g|_{Y_1} : Y_1 &\to Y_2, \\ x &\mapsto (f(x), g(x)) \end{aligned}$$

een diffeomorfisme is. In het bijzonder heeft $f \oplus g|_{Y_1}$ een inverse, die we h noemen.

Stel nu $u \in C(X_2)$ en $\phi \in \mathcal{D}(Y_1)$, dan kunnen we de pullback van u door f direct berekenen:

$$\langle f^* u, \phi \rangle = \langle u \circ f, \phi \rangle = \int u(f(x))\phi(x)dx \tag{2.1}$$

We passen nu een transformatie van de variabelen toe, met $y = h^{-1}(x)$ krijgen we

$$\begin{aligned} x &= h(y) \\ y = h^{-1}(x) &= (f(x), g(x)) = (y', y'') \in \mathbb{R}^{n_1} \oplus \mathbb{R}^{n_1-n_2} \\ dx &= |\det h'(y)| dy \end{aligned}$$

en dus geldt

$$\begin{aligned} \langle f^* u, \phi \rangle &= \int u(y')\phi(h(y))|\det h'(y)|dy \\ &= \int u(y')\Big(\int \phi(h(y))|\det h'(y)|dy''\Big)dy' \\ &= \int u(y')\langle 1, \Phi\rangle dy' \\ &= \langle u, \langle 1, \Phi\rangle\rangle \\ &= \langle u \otimes 1, \Phi\rangle \end{aligned} \tag{2.2}$$

waarbij

$$\Phi(y) = \phi(h(y))|\det h'(y)|$$

en 1 de reguliere distributie in $\mathbb{R}^{n_1-n_2}$ is, behorende bij de funktie 1.
De pullback is nu lokaal goed gedefinieerd als $u \in C(X_2)$.

Als $u \in \mathcal{D}'(X_2)$ dan kunnen we stelling 1.2.1 toepassen en definiëren dan als $u_j \in \mathcal{D}(X_2)$ zodat $u_j \to u$ in $\mathcal{D}'(X_2)$, $\phi \in \mathcal{D}(Y_1)$:

$$(2.3) \qquad \langle f^*u, \phi\rangle \equiv \lim_{j\to\infty} \langle f^*u_j, \phi\rangle$$

zodat

$$(2.4) \qquad \langle f^*u, \phi\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle f^*u_j, \phi\rangle = \lim_{j\to\infty} \langle u_j \otimes 1, \Phi\rangle = \langle u \otimes 1, \Phi\rangle$$

en we dus weten dat de limiet bestaat en dat daarmee $\langle f^*u, \phi\rangle$ goed gedefiniëerd is als $u \in \mathcal{D}'(X_2)$ en $\phi \in \mathcal{D}(Y_1)$.
De pullback is nu ook lokaal goed gedefinieerd als $u \in \mathcal{D}'(X_2)$.

Stel nu dat $\phi \in \mathcal{D}(X_1)$. Dan bestaat er een kompakte verzameling $K \subset X_1$ zodat $\mathrm{dr}(\phi) \subset K$. Voor elke $x_i \in X_1$ konden we een $Y_i \subset X_1$, Y_i open, nemen zodat $\langle f^*u, \phi\rangle$ goed gedefinieerd is als $\mathrm{dr}(\phi) \subset Y_i$. $(Y_i)_i$ is nu een open overdekking van X_1 en dus ook van K en omdat K compakt is kunnen we er een eindig aantal nemen die K nog steeds overdekken, d.w.z.

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} Y_{i_k}.$$

We gebruiken nu het decompositie lemma uit het college distributietheorie en weten dan dat er $\phi_i \in \mathcal{D}(Y_{i_k})$ bestaan zodat

$$\phi = \sum_{k=1}^{n} \phi_k$$

Dan definiëren we

$$(2.5) \qquad \langle f^*u, \phi\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle f^*u, \phi_k\rangle$$

Dit is een goede definitie omdat $\mathrm{dr}(\phi_k) \subset Y_{i_k}$ en met (2.4) is $\langle f^*u, \phi_{i_k}\rangle$ dus goed gedefinieerd.

We moeten nu alleen nog aantonen dat de afbeelding $u \mapsto f^*u$ continu is. Stel daarom dat $\phi \in \mathcal{D}(X_2)$ en $u, u_j \in \mathcal{D}'(X_2)$ zodat $u_j \to u$. Dan geldt

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty}\langle f^*u_j, \phi\rangle &= \lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\langle f^*u_j, \phi_k\rangle \\
&= \lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\langle u_j \otimes 1, \Phi_k\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n}\langle u \otimes 1, \Phi_k\rangle \\
&= \sum_{k=1}^{n}\langle f^*u, \phi_k\rangle \\
&= \langle f^*u, \phi\rangle
\end{aligned}$$

We zullen nu wat rekenregels voor de pullback afleiden. Hierbij is steeds $u \in \mathcal{D}'(X_2)$ en $f : X_1 \to X_2$ een C^∞ submersie.

Propositie 2.1.2

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f^*u = \sum_{k=1}^{n_2} \frac{\partial}{\partial x_i} f_k f^* \frac{\partial}{\partial x_k} u. \tag{2.6}$$

Bewijs: Als $u \in \mathcal{D}'(X_2)$ dan kunnen we een rij $u_j \in \mathcal{D}(X_2)$ vinden zodat $u_j \to u$ in $\mathcal{D}'(X_2)$. Er geldt dan

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f^*u = \frac{\partial}{\partial x_i}\lim_{j\to\infty} f^*u_j = \lim_{j\to\infty}\frac{\partial}{\partial x_i} u_j \circ f$$

en we kunnen nu de kettingregel toepassen omdat u_j een funktie is, dus

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f^*u_j = \lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^{n_2}\frac{\partial}{\partial x_i} f_k f^* \frac{\partial}{\partial x_k} u_j = \sum_{k=1}^{n_2}\frac{\partial}{\partial x_i} f_k f^* \frac{\partial}{\partial x_k} u.$$

Propositie 2.1.3 *Stel $a \in C^\infty(X_2)$. Dan geldt*

$$f^*(au) = (f^*a)(f^*u). \tag{2.7}$$

Bewijs: Als $u \in \mathcal{D}'(X_2)$ dan kunnen we een rij $u_j \in \mathcal{D}(X_2)$ vinden zodat $u_j \to u$ in $\mathcal{D}'(X_2)$. Er geldt dan

$$\begin{aligned}
f^*(au) &= \lim_{j\to\infty} f^*(au_j) = \lim_{j\to\infty}(au_j)\circ f \\
&= \lim_{j\to\infty}(a\circ f)(u_j \circ f) = \lim_{j\to\infty}(f^*a)(f^*u_j) \\
&= (f^*a)(f^*u)
\end{aligned}$$

Propositie 2.1.4 *Stel $X_3 \subset \mathbb{R}^{n_3}$, X_3 open en $g : X_2 \to X_3$ is een C^∞ submersie, dan geldt*

$$(g \circ f)^* u = f^* g^* u. \tag{2.8}$$

Bewijs: Als $u \in \mathcal{D}'(X_2)$ dan kunnen we een rij $u_j \in \mathcal{D}(X_2)$ vinden zodat $u_j \to u$ in $\mathcal{D}'(X_2)$. Er geldt dan

$$\begin{aligned}
(g \circ f)^* u &= \lim_{j\to\infty} (g \circ f)^* u_j = \lim_{j\to\infty} u_j \circ (g \circ f) \\
&= \lim_{j\to\infty} u_j \circ g \circ f = \lim_{j\to\infty} f^*(u_j \circ g) \\
&= \lim_{j\to\infty} f^* g^* u_j = f^* g^* u
\end{aligned}$$

Propositie 2.1.5

$$\mathrm{dr}(f^* u) \subset f^{-1}(\mathrm{dr}(u)) \tag{2.9}$$

Bewijs: Stel eerst dat $u \in C^\infty(X_2)$. We definieren dan

$$\mathrm{dr}_\circ(\phi) = \{x : \phi(x) \neq 0\}$$

Omdat $u \in C^\infty$ geldt

$$f^* u(x) = u(f(x))$$

en dus geldt

$$x \in \mathrm{dr}_\circ(f^* u) \Longleftrightarrow f(x) \in \mathrm{dr}_\circ(u)$$

en dus

$$\begin{aligned}
\mathrm{dr}(f^* u) &= \overline{\mathrm{dr}_\circ(f^* u)} \\
&= \overline{\{x : f(x) \in \mathrm{dr}_\circ(u)\}} \\
&= \overline{\{x : x \in f^{-1}(\mathrm{dr}_\circ(u))\}} \\
&= \overline{f^{-1}(\mathrm{dr}_\circ(u))} \\
&\subset f^{-1}(\mathrm{dr}(u))
\end{aligned}$$

Stel nu dat $u \in \mathcal{D}'(X_2)$. Zij nu $\rho \in C^\infty(X_2)$ een integreerbare funktie met $\rho \geq 0$ en

$$\int_{X_2} \rho(x) dx = 1$$

en we definieren $\rho_k(x) = k^{n_2} \rho(kx)$ dan weten we dat ρ_k een approximatie is van δ, $\mathrm{dr}(\rho_k) \subset B(0, 1/k) = B_{1/k}$ en met $u_k = u * \rho_k$ weten we ook

$$\mathrm{dr}(u_k) = \mathrm{dr}(u * \rho_k) \subset \mathrm{dr}(u) + \mathrm{dr}(\rho_k) = \mathrm{dr}(u) + B_{1/k}$$

en omdat $\rho_k \in C^\infty(X_2)$ geldt $u_k = u * \rho_k \in C^\infty(X_2)$ en geldt dus

$$\mathrm{dr}(f^* u_k) \subset f^{-1}(\mathrm{dr}(u) + B_{1/k}) \quad \forall k \geq 1$$

Wanneer nu $k \to \infty$, krijgen we

$$\mathrm{dr}(f^* u) \subset f^{-1}(\mathrm{dr}(u))$$

2.2 Voorbeelden

We zullen nu enige voorbeelden gaan bekijken van pullbacks.

Stel dat f een diffeomorfisme is van X_1 naar X_2, waarbij X_1 en X_2 open deelverzamelingen van $\mathbb{R}^n$ zijn. We kunnen nu stellen dat met $h = f^{-1}$ en $\phi \in \mathcal{D}(X_2)$ de pullback van δ_w, $w \in X_2$, door f direct kunnen berekenen met (2.4). Stel $\phi \in \mathcal{D}(X_2)$ dan geldt

$$\langle f^* \delta_w, \phi \rangle = \langle \delta_w, \Phi \rangle$$

waarbij $\Phi(y) = \phi(f^{-1}(y) | \det f'(y)|$, dus geldt

$$\begin{aligned}
\langle f^* \delta_w, \phi \rangle &= \phi(f^{-1}(w)) | \det f'(w)| \\
&= \phi(f^{-1}(w))(| \det(f^{-1}(w))'|)^{-1} \\
&= \phi(v) | \det f'(v)|^{-1} \\
&= \langle | \det f'(v)|^{-1} \delta_v, \phi \rangle
\end{aligned}$$

waarbij $v = f^{-1}(w)$ en we mogen dus concluderen

$$f^* \delta_w = | \det f'(v)|^{-1} \delta_v, \quad v = f^{-1}(w).$$

Stel nu $M_t x = tx$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. Dan kunnen we de pullback van een willekeurige $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ door M_t direct berekenen uit (2.2), met $h = M_t^{-1}$.
Stel dat $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, dan geldt

$$\langle M_t^* u, \phi \rangle = \langle u, \Phi \rangle$$

met

$$\Phi(y) = \phi(h(y)) \, | \det h'(y)| = \phi(M_t^{-1}(y)) \, | \det (M_t^{-1})'(y)|.$$

Omdat $M_t x = tx$ geldt $M_t^{-1} y = y/t$, dus geldt

$$\Phi(y) = \phi(y/t) \, | \det (y/t)'| = \phi(y/t)/t^n$$

en we concluderen

$$\langle M_t^* u, \phi \rangle = \langle u, \phi(./t)/t^n \rangle$$

Stel nu dat $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ homogeen is van de graad a, ofwel

$$\langle u, \phi \rangle = t^a \langle u, \phi_t \rangle, \qquad \phi_t(x) = t^n \phi(tx), \;\; t > 0$$

en met t vervangen door $1/t$ is dit hetzelfde als

$$t^a \langle u, \phi \rangle = \langle u, \phi(./t)/t^n \rangle, \;\; t > 0$$

en omdat het rechterlid gelijk is aan $\langle M_t^* u, \phi \rangle$ geldt dat $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ homogeen is van de graad a, als

$$M_t^* u = t^a u \tag{2.10}$$

2.3 De pullback door een kwadratische vorm

Stel dat Q een niet singuliere kwadratische vorm is in $\mathbb{R}^n$, dus geldt $\partial Q(x)/\partial x \neq 0$, voor alle $x \neq 0$ en dus is $Q : \mathbb{R}^n_* \to \mathbb{R}$ een C^∞ afbeelding zodat $Q'(x)$ surjectief is voor alle $x \in \mathbb{R}^n_*$. We kunnen dan de pullback $Q^* u$, van u door Q, definieren als $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ en hebben dan $Q^* u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_*)$.
N.B: Met $\partial/\partial x$ bedoelen we de gradiënt.

Propositie 2.3.1 *Als u homogeen is van de graad a is $Q^* u$ homogeen is van de graad $2a$.*

Bewijs: Als $t > 0$, dan geldt volgens propositie 2.1.4

$$\begin{aligned} M_t^*(Q^* u) &= (Q \circ M_t)^* u \\ &= (t^2 Q)^* u \\ &= (m_{t^2} \circ Q)^* u \\ &= Q^*(m_{t^2}^* u) \\ &= Q^*((t^2)^a u) \\ &= Q^*(t^{2a} u) \\ &= t^{2a}(Q^* u). \end{aligned}$$

We hebben hierbij gebruik gemaakt van het feit dat Q een kwadratische vorm is, dus dat er geldt $Q(tx) = t^2 Q(x)$. We hebben hier $m_t x = M_t x = tx$, $x \in \mathbb{R}$ klein geschreven om het verschil tussen M_t op $\mathbb{R}^n$ en M_t op $\mathbb{R}$ aan te geven.
We mogen nu concluderen dat $M_t^*(Q^* u) = t^{2a}(Q^* u)$, dus geldt er volgens (2.10) dat $Q^* u$ homogeen van de graad $2a$ is.

Als nu $2a$ geen integer is met $2a \leq -n$ dan kunnen we volgens stelling 1.5.1 $Q^* u$ uniek uitbreiden tot een distributie op $\mathbb{R}^n$, die ook homogeen is van de graad $2a$.

Deze distributie noemen we $u(Q)$.

Omdat Q een niet ontaarde kwadratische vorm is bestaat er een niet singuliere symmetrische matrix $A = (a_{jk}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zodat

$$Q(x) = \langle Ax, x \rangle = \sum_{j,k \leq n} a_{jk} x_j x_k \tag{2.11}$$

We definieren nu de differentiaal operator $B(\partial)$ in $\mathbb{R}^n$ door

$$B(\partial) \equiv \sum_{j,k \leq n} b_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{2.12}$$

waarbij $B = (b_{jk})$ de inverse is van A.

We berekenen nu $B(\partial) Q^* u$ in $\mathbb{R}^n_*$. Omdat A symmetrisch is hebben we volgens (2.11)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} Q(x) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{l,m \leq n} a_{lm} x_l x_m \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j} \Big(\sum_{l \neq k} a_{lk} x_l + \sum_{m \neq k} a_{km} x_m + 2 a_{kk} x_k \Big) \\
&= \begin{cases} a_{jk} + a_{kj} & \text{als } j \neq k \\ 2 a_{jj} & \text{als } j = k \end{cases} \\
&= 2 a_{jk}
\end{aligned}$$

Bovendien geldt er nu

$$\begin{aligned}
\sum_{k \leq n} b_{jk} \frac{\partial Q}{\partial x_k} &= \sum_{k \leq n} b_{jk} \Big(\sum_{l \neq k} a_{lk} x_l + \sum_{m \neq k} a_{km} x_m + 2 a_{kk} x_k \Big) \\
&= \sum_{k \leq n} b_{jk} \Big(\sum_{l \neq k} a_{kl} x_l + \sum_{m \neq k} a_{km} x_m + 2 a_{kk} x_k \Big) \\
&= \sum_{k \leq n} b_{jk} \sum_{l \leq n} 2 a_{kl} x_l \\
&= 2 \sum_{k \leq n} \sum_{l \leq n} b_{jk} a_{kl} x_l \\
&= 2 \sum_{l \leq n} \sum_{k \leq n} b_{jk} a_{kl} x_l \\
&= 2 \sum_{l \leq n} x_l \sum_{k \leq n} b_{jk} a_{kl} \\
&= 2 \sum_{l \leq n} x_l \delta_{jl} \\
&= 2 x_j
\end{aligned}$$

en

$$
\begin{aligned}
\sum_{j\leq n} \frac{\partial Q}{\partial x_j} x_j &= \sum_{j\leq n} \Big(\sum_{l\neq j} a_{jl}x_l + \sum_{m\neq j} a_{mj}x_m + 2a_{jj}x_j \Big) x_j \\
&= \sum_{j\leq n} x_j \sum_{l\leq n} 2a_{lj}x_l \\
&= 2 \sum_{j,l\leq n} a_{lj}x_l x_j \\
&= 2\, Q(x)
\end{aligned}
$$

We passen nu propositie 2.1.2 toe en krijgen zo

$$
\frac{\partial}{\partial x_k}(Q^*u) = \frac{\partial Q}{\partial x_k} Q^*u'
$$

en

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k}(Q^*u) &= \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial Q}{\partial x_k} Q^*u') \\
&= Q^*u' \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k} Q + \frac{\partial Q}{\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}(Q^*u') \\
&= 2a_{jk}Q^*u' + \frac{\partial Q}{\partial x_k}\frac{\partial Q}{\partial x_j} Q^*u''
\end{aligned}
$$

We kunnen nu $B(\partial)Q^*u$ uitrekenen

$$
\begin{aligned}
B(\partial)Q^*u &= \sum_{j,k\leq n} b_{jk} \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_k} Q^*u \\
&= \sum_{j,k\leq n} b_{jk} \Big(2a_{jk}Q^*u' + \frac{\partial Q}{\partial x_k}\frac{\partial Q}{\partial x_j} Q^*u'' \Big) \\
&= 2\, Q^*u' \sum_{j,k\leq n} b_{jk}a_{jk} + Q^*u'' \sum_{j,k\leq n} b_{jk} \frac{\partial Q}{\partial x_k}\frac{\partial Q}{\partial x_j} \\
&= 2\, Q^*u' \sum_{j\leq n}\sum_{k\leq n} b_{jk}a_{jk} + Q^*u'' \sum_{j\leq n}\sum_{k\leq n} b_{jk} \frac{\partial Q}{\partial x_k}\frac{\partial Q}{\partial x_j} \\
&= 2\, Q^*u' \sum_{j\leq n}\sum_{k\leq n} b_{jk}a_{kj} + Q^*u'' \sum_{j\leq n} \frac{\partial Q}{\partial x_j} \sum_{k\leq n} b_{jk} \frac{\partial Q}{\partial x_k} \\
&= 2\, Q^*u' \sum_{j\leq n} \delta_{jj} + Q^*u'' \sum_{j\leq n} \frac{\partial Q}{\partial x_j} 2x_j \\
&= 2\, Q^*u'\, n + 2\, Q^*u''\, 2Q \\
&= 2n\, Q^*u' + 4Q\, Q^*u''
\end{aligned}
$$

Propositie 2.3.2 *Als u homogeen van de graad $a = (2-n)/2$ is, geldt*

$$B(\partial)u(Q) = c\delta.$$

Bewijs: Omdat we Q^*u uniek hadden uitgebreid naar $\mathbb{R}^n$ en deze uitbreiding $u(Q)$ hadden genoemd geldt

$$\begin{aligned} B(\partial)u(Q) &= 2n\ Q^*u' + 4Q\ Q^*u'' \\ &= 2nu'(Q) + 4Qu''(Q) \ \text{ op } \mathbb{R}^n_* \end{aligned}$$

Wanneer we dit laatste lid $g(Q)$ noemen geldt

$$g = 2nu' + 4tu''$$

We kunnen nu gevolg 1.2.4 toepassen, dat ons vertelt dat als u homogeen is van de graad a (en dus u' homogeen is van de graad $a-1$), er geldt

$$tu'' = (a-1)u'$$

en we mogen dus concluderen

$$\begin{aligned} g &= 2nu' + 4(a-1)u' \\ &= (2n + 4(a-1))u' \\ &= (2n + 4((2-n)/2 - 1))u' \\ &= 0 \end{aligned}$$

en dus geldt

$$B(\partial)u(Q) = 0 \ \text{ op } \mathbb{R}^n_*$$

Verder is u homogeen van de graad a, dus is u' homogeen van de graad $a-1$ en is $u'(Q)$ volgens propositie 2.3.1 homogeen van de graad $2(a-1) = 2((2-n)/2-1) = -n$. En dus is $u(Q)$ een distributie die gelijk is aan 0 op $\mathbb{R}^n_*$ en homogeen is van de graad $-n$ en dus volgens de stelling van Schwartz gelijk is aan constante maal δ.

We willen nu deze constante berekenen.

Stelling 2.3.3 *Stel $n > 2$ en stel dat $n_+ = (n + \operatorname{sgn} A)/2$ en $n_- = (n - \operatorname{sgn} A)/2$, d.w.z.* $\operatorname{sgn} A = n_+ - n_-$ *en $n_+ + n_- = n$, zodat n_+ het aantal positieve eigenwaarden en n_- is het aantal negatieve eigenwaarden van A is, dan geldt*

$$B(\partial)(Q \pm i0)^{(2-n)/2} = (2-n)\omega_n |\det A|^{-1/2} e^{\mp \pi i n_-/2}\delta \tag{2.13}$$

$$B(\partial)Q^*\chi_\pm^{(2-n)/2} = \pm 4\pi^{(n-2)/2} \sin(\pi n_\pm/2) |\det A|^{-1/2}\delta \tag{2.14}$$

Waarbij

$$(Q \pm i0) = \lim_{\epsilon \searrow 0}(Q \pm i\epsilon)$$

Bewijs: We bewijzen eerst

(2.15) $$B(\partial)Q^{(2-n)/2} = (2-n)\omega_n(\det A)^{-1/2}\delta$$

waarbij A positief definiet is.
Omdat A positief definiet is bestaat er orthogonale matrix V zodat

$$V^{-1}AV = \Lambda,$$

waarbij Λ een diagonaalmatrix is met op de diagonaal de eigenwaarden $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ van A en $\lambda_i > 0,\ i = 1, \dots, n$.
We definieren nu de matrix R door

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & & O \\ & \ddots & \\ O & & r_n \end{pmatrix}, \quad r_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}.$$

zodat ${}^tR\Lambda R = I$ en dus met $T = VR$ geldt en

$${}^tTAT = {}^t(VR)AVR = {}^tR\,{}^tVAVR = {}^tR\Lambda R = I$$

dus geldt ook $AT = ({}^tT)^{-1}$, $A = ({}^tT)^{-1}T^{-1} = (T\,{}^tT)^{-1}$ en $B = A^{-1} = T\,{}^tT$ dus

$$b_{ij} = \sum_{k\leq n} t_{ik}t_{jk}$$

Bovendien geldt er $\det A^{-1} = \det(T\,{}^tT) = \det T \det {}^tT = \det T \det T = (\det T)^2$ dus

(2.16) $$\det T = (\det A)^{-1/2}$$

We tonen nu met behulp van propositie 2.1.2 aan dat

(2.17) $$T^*(B(\partial)u) = \Delta(T^*u), \quad u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(T^*u) &= \sum_{k\leq n} \frac{\partial T_k}{\partial x_i} T^* \frac{\partial u}{\partial x_k} \\ &= \sum_{k\leq n} t_{ki} \frac{\partial u}{\partial x_k} \end{aligned}$$

dus

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2 T^*u &= \sum_{k\leq n} t_{ki} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(T^* \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) \\ &= \sum_{k\leq n} t_{ki} \sum_{l\leq n} \frac{\partial T_l}{\partial x_i} T^*\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) \\ &= \sum_{k\leq n}\sum_{l\leq n} t_{ki}t_{li} T^*\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k}u\right) \end{aligned}$$

dus

$$
\begin{aligned}
\Delta(T^*u) &= \sum_{i\leq n}\sum_{k\leq n}\sum_{l\leq n} t_{ki}t_{li}T^*(\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k}u) \\
&= \sum_{k,l\leq n} T^*(\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k}u)\sum_{i\leq n} t_{ki}t_{li} \\
&= \sum_{k,l\leq n} T^*(\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k}u)b_{kl} \\
&= T^*(\sum_{k,l\leq n} b_{kl}\frac{\partial}{\partial x_l}\frac{\partial}{\partial x_k}u) \\
&= T^*(B(\partial)u)
\end{aligned}
$$

We passen nu een truukje toe om (2.15) te bewijzen; we bepalen eerst de pullback van $B(\partial)Q^{(2-n)/2}$ door T en daarna door T^{-1} om zo (2.17) toe te kunnen passen met $u = Q^{(2-n)/2}$.

$$
\begin{aligned}
B(\partial)Q^{(2-n)/2} &= id^*(B(\partial)Q^{(2-n)/2}) \\
&= (T\circ T^{-1})^*(B(\partial)Q^{(2-n)/2}) \\
&= (T^{-1})^*T^*(B(\partial)Q^{(2-n)/2}) \\
&= (T^{-1})^*\Delta(T^*Q^{(2-n)/2})
\end{aligned}
$$

We berekenen nu T^*Q.

$$
\begin{aligned}
T^*Q(x) &= Q(Tx) \\
&= \langle ATx, Tx\rangle \\
&= \langle T^{-1}ATx, x\rangle \\
&= \langle Ix, x\rangle \\
&= |x|^2
\end{aligned}
$$

dus

$$T^*Q^{(2-n)/2} = |x|^{2-n}$$

en

$$
\begin{aligned}
B(\partial)Q^{(2-n)/2} &= (T^{-1})^*\Delta|x|^{2-n} \\
&= (T^{-1})^*(2-n)\omega_n\delta,
\end{aligned}
$$

omdat we voor $n > 2$ de fundamentaal oplossing van de Laplace operator in $\mathbb{R}^n$ kennen als

$$\Delta|x|^{2-n} = (2-n)\omega_n\delta.$$

We gebruiken nu (2.16) en het eerste voorbeeld uit de vorige paragraaf om $B(\partial)Q^{(2-n)/2}$ te berekenen.

$$\begin{aligned}
B(\partial)Q^{(2-n)/2} &= (T^{-1})^*(2-n)\omega_n\delta \\
&= (2-n)\omega_n(\det(T^{-1})'(0))^{-1}\delta \\
&= (2-n)\omega_n(\det T^{-1})^{-1}\delta \\
&= (2-n)\omega_n(\det T)\delta \\
&= (2-n)\omega_n(\det A)^{-1/2}\delta
\end{aligned}$$

Hiermee is (2.15) bewezen als A positief definiet is. Volgens propositie 1.6.2 kunnen we de definitie van de determinant analytisch voortzetten naar het geval dat Re A positief definiet is. Het linkerlid van (2.15) is ook analytisch voortzetbaar naar het geval dat Re A positief definiet is en omdat analytische voortzettingen uniek zijn geldt (2.15) ook als Re A positief definiet is.

Stel nu dat A reëel en niet singulier is. We definieren dan

$$Q_\epsilon(x) = -iQ(x) + \epsilon|x|^2, \quad \epsilon > 0$$

zodat

$$\begin{aligned}
Q_\epsilon(x) &= -i\langle Ax, x\rangle + \epsilon\langle Ix, x\rangle \\
&= \langle(-iA + \epsilon I)x, x\rangle \\
&= \langle A_\epsilon x, x\rangle, \quad A_\epsilon = -iA + \epsilon I
\end{aligned}$$

Volgens propositie 1.6.4 geldt dan

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to0}(\det A_\epsilon)^{-1/2} &= \lim_{\epsilon\to0}(\det(-iA + \epsilon I))^{-1/2} \\
&= (\det(-iA))^{-1/2} \\
&= |\det(-A)|^{-1/2}(e^{\frac{1}{4}\pi i(\mathrm{sgn}\,(-A))})^{-1} \\
&= |\det A|^{-1/2}e^{-\frac{1}{4}\pi i(\mathrm{sgn}\,(-A))} \\
&= |\det A|^{-1/2}e^{\frac{1}{4}\pi i(\mathrm{sgn}\,A)}
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\to0} B_\epsilon &= \lim_{\epsilon\to0} A_\epsilon^{-1} \\
&= \lim_{\epsilon\to0}(-iA + \epsilon I)^{-1} \\
&= (-iA)^{-1} \\
&= iA^{-1} \\
&= iB
\end{aligned}$$

Omdat Re $A_\epsilon = \epsilon I$, geldt dat Re A_ϵ positief definiet is, dus geldt volgens (2.15)

$$B_\epsilon(\partial)Q_\epsilon^{(2-n)/2} = (2-n)\omega_n(\det A_\epsilon)^{-1/2}\delta \tag{2.18}$$

Wanneer nu geldt

$$\lim_{\epsilon\to 0} Q_\epsilon^{(2-n)/2} = i^{-1}e^{\frac{1}{4}\pi in}(Q+i0)^{(2-n)/2} \text{ in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_*) \tag{2.19}$$

dan geldt dit volgens stelling 1.5.1 ook in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ omdat het linker- en rechterlid beide homogene distributies zijn van de graad $(2-n)/2$.

We kunnen $B(\partial)(Q+i0)^{(2-n)/2}$ nu direct uitrekenen door in (2.18) $\epsilon \to 0$ te laten gaan.

$$\lim_{\epsilon\to 0} B_\epsilon(\partial)Q_\epsilon^{(2-n)/2} = \lim_{\epsilon\to 0}(2-n)\omega_n(\det A_\epsilon)^{-1/2}\delta$$

dus

$$iB(\partial)i^{-1}e^{\frac{1}{4}\pi in}(Q+i0)^{(2-n)/2} = (2-n)\omega_n|\det A|^{-1/2}e^{\frac{1}{4}\pi i(\text{sgn } A)}\delta$$

en

$$\begin{aligned}
B(\partial)(Q+i0)^{(2-n)/2} &= (2-n)\omega_n e^{-\frac{1}{4}\pi in}|\det A|^{-1/2}e^{\frac{1}{4}\pi i(\text{sgn } A)}\delta \\
&= (2-n)\omega_n|\det A|^{-1/2}e^{\frac{1}{4}\pi i(\text{sgn } A)-\frac{1}{4}\pi in}\delta \\
&= (2-n)\omega_n|\det A|^{-1/2}e^{\frac{1}{4}\pi i(\text{sgn } A-n)}\delta \\
&= (2-n)\omega_n|\det A|^{-1/2}e^{-\frac{1}{4}\pi i2n_-}\delta \\
&= (2-n)\omega_n|\det A|^{-1/2}e^{-\frac{1}{2}\pi in_-}\delta.
\end{aligned}$$

Hiermee is het eerste geval van (2.13) bewezen.

Het tweede geval van (2.13) is een consequentie van het eerste geval door de complex-geconjugeerden van het linker- en rechterlid te nemen:

$$\begin{aligned}
B(\partial)(Q-i0)^{(2-n)/2} &= B(\partial)(\overline{Q+i0})^{(2-n)/2} \\
&= \overline{B(\partial)(Q+i0)^{(2-n)/2}} \\
&= \overline{(2-n)\omega_n|\det A|^{-1/2}e^{-\frac{1}{2}\pi in_-}\delta} \\
&= (2-n)\omega_n|\det A|^{-1/2}e^{+\frac{1}{2}\pi in_-}\delta.
\end{aligned}$$

We bewijzen nu (2.14). Daartoe willen we eerst het verband tussen $\chi_+^{(2-n)/2}$ en $(x \pm i0)^{(2-n)/2}$ onderzoeken.

Als we de logaritme op $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_-$ definieren als

$$\log(z) = \log|z| + i\arg z,$$

dan kunnen we voor Re $a > 0$, de funktie z^a definieren als

$$z^a = e^{a \log z},$$

zodat, als $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
(x \pm i0)^a &= (\lim_{\epsilon \searrow 0}(x \pm i\epsilon))^a \\
&= \exp(a \lim_{\epsilon \searrow 0} \log(x \pm i\epsilon)) \\
&= \exp(a \lim_{\epsilon \searrow 0}(\log |x \pm i\epsilon| + i \arg(x \pm i\epsilon)) \\
&= |x|^a \exp(\lim_{\epsilon \searrow 0} i \arg(x \pm i\epsilon)) \\
&= \begin{cases} |x|^a & \text{als } x > 0 \\ e^{\pm \pi i a}|x|^a & \text{als } x < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

En dus

$$(x \pm i0)^a = x_+^a + e^{\pm \pi i a} x_-^a$$

Wanneer we beide vergelijkingen vermenigvuldigen met resp. $e^{-\pi i a}$ en $e^{+\pi i a}$ krijgen we

$$\begin{aligned}
e^{-\pi i a}(x + i0)^a &= e^{-\pi i a} x_+^a + x_-^a \\
e^{+\pi i a}(x - i0)^a &= e^{+\pi i a} x_+^a + x_-^a
\end{aligned}$$

We kunnen deze vergelijkingen nu van elkaar aftrekken.

$$x_+^a(e^{\pi i a} - e^{-\pi i a}) = (x - i0)^a e^{\pi i a} - (x + i0)^a e^{-\pi i a}$$

We kunnen nu χ_+^a in $(x + i0)^a$ en $(x - i0)^a$ uitdrukken.

$$\begin{aligned}
\chi_+^a &= \frac{x_+^a}{\Gamma(a+1)} \\
&= \frac{(x - i0)^a e^{\pi i a} - (x + i0)^a e^{-\pi i a}}{\Gamma(a+1)(e^{\pi i a} - e^{-\pi i a})} \\
&= \frac{(x - i0)^a e^{\pi i a} - (x + i0)^a e^{-\pi i a}}{\Gamma(a+1) 2i \sin(\pi a)}
\end{aligned}$$

en omdat $\Gamma(a+1)\Gamma(-a) = -\pi / \sin(\pi a)$, dus $\Gamma(a+1) = -\pi/(\sin(\pi a)\Gamma(-a))$, geldt

$$\chi_+^a = \frac{(x - i0)^a e^{\pi i a} - (x + i0)^a e^{-\pi i a}}{-2i\pi \sin(\pi a)} \sin(\pi a)\Gamma(-a)$$

zodat

$$\chi_+^a = \frac{i\Gamma(-a)}{2\pi}\Big((x - i0)^a e^{\pi i a} - (x + i0)^a e^{-\pi i a}\Big) \tag{2.20}$$

voor alle $a \in \mathbb{C}$, met Re $a > 0$ en a is geen positieve integer. We hebben in paragraaf 1.3 gezien dat we het linker- en rechterlid van (2.20) analytische voort kunnen zetten naar alle $a \in \mathbb{C}$, met a geen positieve integer. Omdat deze analytische voortzettingen gelijk zijn en $(2-n)/2$ geen positieve integer is, voor $n > 0$, geldt dus

$$\chi_+^{(2-n)/2} =$$
$$\frac{i\Gamma(-(2-n)/2)}{2\pi}\left((x-i0)^{(2-n)/2}e^{\pi i(2-n)/2} - (x+i0)^{(2-n)/2}e^{-\pi i(2-n)/2}\right)$$

We merken nu eerst op dat dankzij (1.27) geldt

$$\begin{aligned}
\frac{(2-n)\omega_n\Gamma(-(2-n)/2)}{\pi} &= \frac{(2-n)2\pi^{n/2}\Gamma(n/2-1)}{\Gamma(n/2)\pi} \\
&= \frac{(2-n)2\pi^{(n-2)/2}\Gamma(n/2)}{((n-2)/2)\Gamma(n/2)} \\
&= -4\pi^{(n-2)/2}
\end{aligned}$$

Bovendien geldt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\pi i(2-n+n_-) &= \frac{1}{2}\pi i(2-n_+) \\
&= \pi i(1-n_+/2)
\end{aligned}$$

We kunnen nu $B(\partial)Q^*\chi_+^{(2-n)/2}$ uitrekenen.

$$\begin{aligned}
&B(\partial)Q^*\chi_+^{(2-n)/2} \\
&= B(\partial)Q^*\frac{i\Gamma(-(2-n)/2)}{2\pi}\left((x-i0)^{(2-n)/2}e^{\pi i(2-n)/2} - (x+i0)^{(2-n)/2}e^{-\pi i(2-n)/2}\right) \\
&= B(\partial)\frac{i\Gamma(-(2-n)/2)}{2\pi}\left((Q-i0)^{(2-n)/2}e^{\pi i(2-n)/2} - (Q+i0)^{(2-n)/2}e^{-\pi i(2-n)/2}\right) \\
&= \frac{i\Gamma(-(2-n)/2)}{2\pi}\left(B(\partial)(Q-i0)^{(2-n)/2}e^{\pi i(2-n)/2} - B(\partial)(Q+i0)^{(2-n)/2}e^{-\pi i(2-n)/2}\right) \\
&= \frac{i\Gamma(-(2-n)/2)}{2\pi}\Big(e^{\pi i(2-n)/2}(2-n)\omega_n|\det A|^{-1/2}e^{\pi i n_-/2}\delta \\
&\quad -e^{-\pi i(2-n)/2}(2-n)\omega_n|\det A|^{-1/2}e^{-\pi i n_-/2}\delta\Big) \\
&= \frac{i(2-n)\omega_n\Gamma(-(2-n)/2)|\det A|^{-1/2}}{2\pi}\left(e^{\pi i(2-n)/2}e^{\pi i n_-/2} - e^{-\pi i(2-n)/2}e^{-\pi i n_-/2}\right)\delta
\end{aligned}$$

$$= -2\pi^{(n-2)/2} i |\det A|^{-1/2}\Big(e^{\pi i(2-n)/2+\pi i n_-/2} - e^{-\pi i(2-n)/2-\pi i n_-/2}\Big)\delta$$
$$= -2\pi^{(n-2)/2} i |\det A|^{-1/2}\Big(e^{\frac{1}{2}\pi i(2-n+n_-)} - e^{-\frac{1}{2}\pi i(2-n+n_-)}\Big)\delta$$
$$= \frac{4\pi^{(n-2)/2}|\det A|^{-1/2}}{2i}\Big(e^{\pi i(1-n_+/2)} - e^{-\pi i(1-n_+/2)}\Big)\delta$$
$$= 4\pi^{(n-2)/2}|\det A|^{-1/2}\sin(\pi(1-n_+/2)\delta$$
$$= 4\pi^{(n-2)/2}|\det A|^{-1/2}\sin(\pi - \pi n_+/2)\delta$$
$$= -4\pi^{(n-2)/2}|\det A|^{-1/2}\sin(\pi n_+/2)\delta$$

Hiermee is het eerste geval van (2.14) bewezen.

Het tweede geval is hiervan een consequentie, door het eerste geval toe te passen met $-Q$. $-Q$ heeft namelijk n_- positieve en n_+ negative eigenwaarden zodat

$$\begin{aligned} B(\partial)Q^*\chi_-^{(2-n)/2} &= -B(\partial)Q^*\chi_+^{(2-n)/2} \\ &= B(\partial)(-Q)^*\chi_+^{(2-n)/2} \\ &= +4\pi^{(n-2)/2}|\det A|^{-1/2}\sin(\pi n_-/2)\delta \end{aligned}$$

Rest alleen nog het bewijzen van (2.19).
Hiervoor gebruiken we het volgende lemma.

Lemma 2.3.4 *Stel dat F een C^∞ funktie is op $X \times J$, waarbij X een open deelverzameling van $\mathbb{R}^n$ en J een open omgeving van 0 in $\mathbb{R}$ is. Stel dat I een begrensd, open interval is in $\mathbb{R}$, $\gamma > 0$ en*

$$Z = \{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z \in I,\ 0 < \text{Im } z < \gamma\}.$$

Stel verder dat f een analytische funktie is op Z zodanig dat er een $N > 0$ en een $C > 0$ bestaan zodat

$$|f(z)| \le C(\text{Im } z)^{-N}, \quad z \in Z$$

Als $F(x,0) \in I$ en $\partial F(x,0)/\partial x \neq 0$, $\forall x \in X$ en $F(x,\epsilon) \in Z$ als $x \in X$ en $0 < \epsilon \in J$. Dan geldt

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} f(F(\cdot,\epsilon) = F(\cdot,0)^* f(\cdot + i0) \tag{2.21}$$

Bewijs: Omdat (2.21) locaal geldt en bovendien invariant is onder coördinaattransformaties mogen we aannemen dat

$$F(x,0) = x_1$$

We bewijzen nu eerst dat er een $G \in C(\bar{Z})$ bestaat, zodat G analytisch is in Z en $f = G^{(N+1)}$.
Stel $N > 0$ en $z_0 \in Z$, dan definieren we

$$H(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta) d\zeta, \quad z \in Z$$

waarbij het pad van z_0 naar z willekeurige is gekozen in Z. Omdat f analytisch is in Z is $H(z)$ onafhankelijk van het gekozen pad, is H analytisch in Z en bovendien geldt

$$H'(z) = f(z).$$

Als we nu het pad eerst horizontaal (K_1) en dan vertikaal (K_2) nemen dan kunnen we ook H weer afschatten door

$$\begin{aligned} |H(z)| &\leq \int_{z_0}^{z} |f(\zeta)| d\zeta \\ &\leq \int_{z_0}^{z} C(\mathrm{Im}\ \zeta)^{-N} d\zeta \end{aligned}$$

Stel nu eerst $N = 1$, dan geldt dus

$$\begin{aligned} |H(z)| &\leq \int_{z_0}^{z} C(\mathrm{Im}\ \zeta)^{-1} d\zeta \\ &= \int_{K_1} C(\mathrm{Im}\ \zeta)^{-1} d\zeta + \int_{K_2} C(\mathrm{Im}\ \zeta)^{-1} d\zeta \\ &= C_1 + C \log(\mathrm{Im}\ z) - C_2 \\ &= C_3 + C \log(\mathrm{Im}\ z) \end{aligned}$$

Omdat $\log(t)$ een integreerbare funktie is nabij 0, is voor $N = 1$, $H(z)$ een integreerbare funktie in Z. We kunnen dan dus

$$G(z) = \int_{z_0}^{z} H(\zeta) d\zeta$$

weer uitrekenen *en* deze funktie is analytisch in Z en continu in $\bar{Z}$.

Stel nu $N > 1$. Dan geldt

$$\begin{aligned} |H(z)| &\leq \int_{z_0}^{z} C(\mathrm{Im}\ \zeta)^{-N} d\zeta \\ &\leq C_1(\mathrm{Im}\ z)^{1-N} \end{aligned}$$

Dus als we N keer integreren over het pad van z_0 naar z zijn we terug bij het geval $N = 1$. En we concluderen dus dat we na $N + 1$ keer integreren van z_0 naar z een

G hebben gevonden zodat G analytisch is in Z, continu is in $\bar{Z}$ en zodat $f = G^{(N+1)}$.

Stel nu $\phi \in \mathcal{D}(X)$, dan geldt

$$(2.22) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) G^{(N+1)}(F(x,\epsilon))dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} (D^k\phi)(x) G^{(N-k+1)}(F(x,\epsilon))dx$$

met $k = 0, \ldots, N+1$ en

$$D \;=\; -\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{\frac{\partial}{\partial x_1} F(x,\epsilon)}$$

Om dit te bewijzen stellen we dat dit geldt voor $k = 0, \ldots, N$ en bewijzen dat dit ook geldt voor $l = k+1$.
Met $x' = (x_2, \ldots, x_n)$ geldt

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} (D^l\phi)(x) G^{(N-l+1)}(F(x,\epsilon))dx \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} (D^{k+1}\phi)(x) G^{(N-k)}(F(x,\epsilon))dx \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} -\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{1}{\frac{\partial}{\partial x_1} F(x,\epsilon)} D^k\phi\Big)(x) G^{(N-k)}(F(x,\epsilon))dx \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} -\frac{\partial}{\partial x_1}\Big(\frac{1}{\frac{\partial}{\partial x_1} F(x,\epsilon)} D^k\phi\Big)(x) G^{(N-k)}(F(x,\epsilon))dx_1 dx' \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \Big[\Big(-\frac{1}{\frac{\partial}{\partial x_1} F(x,\epsilon)} D^k\phi\Big)(x) G^{(N-k)}(F(x,\epsilon))\Big|_{\mathbb{R}} \\
&\qquad + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\frac{\partial}{\partial x_1} F(x,\epsilon)} (D^k\phi)(x) G^{(N-k+1)}(F(x,\epsilon)) \frac{\partial}{\partial x_1} F(x,\epsilon) dx_1\Big] dx' \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}} (D^k\phi)(x) G^{(N-k+1)}(F(x,\epsilon))dx_1 dx' \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} (D^k\phi)(x) G^{(N-k+1)}(F(x,\epsilon))dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) G^{(N+1)}(F(x,\epsilon))dx
\end{aligned}$$

Ofwel (2.22) geldt voor $k = 0, \ldots, N+1$, dus in het bijzonder voor $k = N+1$ en dus concluderen we

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) G^{(N+1)}(F(x,\epsilon))dx = \int_{\mathbb{R}^n} (D^{N+1}\phi)(x) G(F(x,\epsilon))dx$$

We kunnen nu het lemma bewijzen.

$$\begin{aligned}
\lim_{\epsilon\searrow 0}\langle f(F(x,\epsilon)),\phi\rangle &= \lim_{\epsilon\searrow 0}\int \phi(x)G^{(N+1)}(F(x,\epsilon))dx \\
&= \lim_{\epsilon\to 0}\int (D^{N+1}\phi)(x)G(F(x,\epsilon))dx \\
&= \lim_{\epsilon\searrow 0}\int \Big(\Big(-\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{\frac{\partial}{\partial x_1}F(x,\epsilon)}\Big)^{N+1}\phi\Big)(x)G(F(x,\epsilon))dx \\
&= \int \Big(\Big(-\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{\frac{\partial}{\partial x_1}F(x,0)}\Big)^{N+1}\phi\Big)(x)G(F(x,0))dx \\
&= \int \Big(\Big(-\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{1}{\frac{\partial}{\partial x_1}x_1}\Big)^{N+1}\phi\Big)(x)G(x_1)dx \\
&= \int (-\frac{\partial}{\partial x_1})^{N+1}\phi(x)G(x_1)dx \\
&= \int \phi(x)G^{(N+1)}(x_1+i0)dx \\
&= \int \phi(x)f(x_1+i0)dx \\
&= \int \phi(x)f(F(x,0)+i0)dx \\
&= \langle F(\cdot,0)^* f(\cdot+i0),\phi\rangle
\end{aligned}$$

En dus concluderen we

$$\lim_{\epsilon\searrow 0} f(F(x,\epsilon)) = F(\cdot,0)^* f(\cdot+i0)$$

Opmerking: Als f analytisch is in het hele bovenhalfvlak $\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z>0\}$ dan is met $I=(-\infty,\infty)$ en $\gamma=\infty$ de conclusie van het lemma nog steeds geldig, omdat I een willekeurig begrensd open interval in $\mathbb{R}$ is en $\gamma>0$ ook willekeurig is.

Wanneer we nu stellen

$$\begin{aligned}
X &= \mathbb{R}^n_* \\
F(x,\epsilon) &= Q(x)+i\epsilon|x|^2 \\
f(z) &= z^{(2-n)/2} \\
I &= (-\infty,\infty) \\
\gamma &= \infty
\end{aligned}$$

dan geldt

$$\begin{aligned}
F(x,0) &= Q(x)\in\mathbb{R} \\
\partial F(x,0)/\partial x &= \partial Q(x)/\partial x \neq 0,\quad \text{als } x\in\mathbb{R}^n_* \\
F(x,\epsilon) &\in \{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Im}\ z>0\},\quad \text{als } x\in\mathbb{R}^n_* \text{ en } 0<\epsilon
\end{aligned}$$

Bovendien is $f(z) = z^{(2-n)/2}$ een analytische funktie in $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ en voor $n > 2$ geldt

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |z^{(2-n)/2}| \\ &= |z|^{(2-n)/2} \\ &\leq (\text{Im } z)^{(2-n)/2} \end{aligned}$$

Als $(2-n)/2 = -N$ dan kunnen we het lemma direct toepassen en als $(2-n)/2 = -N - 1/2$ dan geldt voor $\text{Im } z < 1$

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq (\text{Im } z)^{-N-1/2} \\ &\leq (\text{Im } z)^{-N-1} \end{aligned}$$

en voor $\text{Im } z \geq 1$

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq (\text{Im } z)^{-N-1/2} \\ &\leq (\text{Im } z)^{-N} \end{aligned}$$

en kunnen we het lemma toepassen met resp. $\gamma < 1$ en $\gamma \geq 1$ en concluderen

$$\lim_{\epsilon \searrow 0} (Q + \epsilon i|x|^2)^{(2-n)/2} = (Q + i0)^{(2-n)/2} \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_*)$$

We kunnen nu (2.19) bewijzen:

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \to 0} Q_\epsilon^{(2-n)/2} &= \lim_{\epsilon \to 0} (-iQ + \epsilon|x|^2)^{(2-n)/2} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} (e^{-\pi i/2}(Q + \epsilon i|x|^2))^{(2-n)/2} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} e^{-(2-n)\pi i/4}(Q + \epsilon i|x|^2)^{(2-n)/2} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} e^{-\pi i/2} e^{\pi i n/4}(Q + \epsilon i|x|^2)^{(2-n)/2} \\ &= i^{-1} e^{\pi i n/4} \lim_{\epsilon \to 0} (Q + \epsilon i|x|^2)^{(2-n)/2} \\ &= i^{-1} e^{\frac{1}{4}\pi i n}(Q + i0)^{(2-n)/2} \end{aligned}$$

Hiermee is stelling (2.3.3) bewezen.

Opmerking: Stelling (2.3.3) geeft ons een fundamentaal oplossing van de operator $B(\partial)$ door in (2.14) het linker- en het rechterlid te delen door de constante in het rechterlid. Ofwel

$$B(\partial)E = \delta$$

heeft als oplossing

$$E = \pm \frac{\pi^{(2-n)/2} |\det A|^{1/2}}{4 \sin(\pi n_\pm/2)} Q^* \chi_\pm^{(2-n)/2} \tag{2.23}$$

We zullen hiervan gebruik gaan maken in het volgende hoofdstuk waar we de fundamentaal oplossing van de golfoperator zullen bekijken.

Hoofdstuk 3

De golfoperator

In het vorige hoofdstuk hebben we gezien dat, als we een kwadratische vorm Q beschouwen, we daarbij de differentiaal operator $B(\partial)$ konden bepalen en dat de fundamentaal oplossing van $B(\partial)$ gerelateerd was aan de kwadratische vorm Q.
We zullen het hier andersom doen. Bij de differentiaal operator $B(\partial)$ zullen we de kwadratische vorm Q bepalen om zo een fundamentaal oplossing van $B(\partial)$ te vinden. Hiervoor beschouwen we de golfoperator $\Box$ in $\mathbb{R}^{n+1}$.

3.1 De fundamentaal oplossing van de golfoperator

De golfoperator $\Box$ is $\mathbb{R}^{n+1}$ is gedefinieerd als

$$\Box = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$$

waarbij $t \in \mathbb{R}$, $c > 0$ een constante (de snelheid van het licht) en $\Box$ de Laplaciaan op $x \in \mathbb{R}^n$ is.
We kunnen $\Box$ ook anders schrijven:

$$\Box = B(\partial)$$

met

$$B = \begin{pmatrix} 1/c^2 & & & O \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & -1 \end{pmatrix}$$

Om nu dus een fundamentaal oplossing van de golfoperator te vinden, zoeken we dus een kwadratische vorm Q, zodat $Q(x) = \langle Ax, x \rangle$ en $B = A^{-1}$.

Uiteraard voldoet

$$A = B^{-1} = \begin{pmatrix} c^2 & & & O \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & -1 \end{pmatrix}$$

hieraan, zodat

$$Q(t,x) = c^2t^2 - |x|^2.$$

Stelling 3.1.1 *Een fundamentaal oplossing van de golfvergelijking in $\mathbb{R}^{n+1}$ wordt gegeven door*

$$E = \pi^{(1-n)/2} c/4 Q^* \chi_+^{(1-n)/2}.$$

De drager van E is bevat in de dubbele kegel

$$\Gamma = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : ct \leq -|x|, ct \geq |x|\}$$

Als $n > 1$ oneven is, is de drager van E bevat op de rand $\partial\Gamma$.

Bewijs: (2.23) levert ons meteen een fundamentaal oplossing, als we bedenken, dat het aantal positieve eigenwaarden van A gelijk is aan $n_+ = 1$. Bovendien is $\det A$ gelijk aan $(-1)^n c^2$, zodat

$$\begin{aligned} E &= \frac{\pi^{(2-(n+1))/2} |\det A|^{1/2}}{4\sin(\pi n_+/2)} Q^* \chi_+^{(2-(n+1))/2} \\ &= \frac{\pi^{(2-(n+1))/2} |(-1)^n c^2|^{1/2}}{4\sin(\pi/2)} Q^* \chi_+^{(2-(n+1))/2} \\ &= \pi^{(1-n)/2} c/4 Q^* \chi_+^{(1-n)/2}. \end{aligned}$$

Met propositie 2.1.5 weten we

$$\begin{aligned} \mathrm{dr}(E) &= \mathrm{dr}(Q^* \chi_+^{(1-n)/2}) \\ &\subset Q^{-1}(\mathrm{dr}(\chi_+^{(1-n)/2})) \\ &\subset Q^{-1}([0,\infty)) \\ &= \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : Q(t,x) \in [0,\infty)\} \\ &= \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : c^2t^2 - |x|^2 \geq 0\} \\ &= \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : ct \leq -|x|, ct \geq |x|\} \\ &= \Gamma \end{aligned}$$

Als $n = 2k + 1 > 1$ oneven is geldt volgens (1.15)

$$\begin{aligned}
\mathrm{dr}(E) &= \mathrm{dr}(Q^*\chi_+^{(1-n)/2}) \\
&\subset Q^{-1}(\mathrm{dr}(\chi_+^{(1-n)/2})) \\
&= Q^{-1}(\mathrm{dr}(\chi_+^{(1-(2k+1))/2})) \\
&= Q^{-1}(\mathrm{dr}(\chi_+^{-k})) \\
&= Q^{-1}(\mathrm{dr}(\delta^{(k-1)})) \\
&= Q^{-1}(\{0\}) \\
&= \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : Q(t,x) = 0\} \\
&= \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : c^2t^2 = |x|^2\} \\
&= \partial\Gamma
\end{aligned}$$

We delen nu deze fundamentaal oplossing op in twee delen, E_+ en E_-, zodat de drager van E_+ bevat is in de positieve lichtkegel

$$\Gamma_+ = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : ct \geq |x|\}$$

en de drager van E_- bevat is in de negatieve lichtkegel

$$\Gamma_- = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : ct \leq -|x|\}$$

We definieren daartoe

$$E_+ = \begin{cases} 2E & \text{als } t > 0 \\ 0 & \text{als } ct < |x| \end{cases}$$

en met $s(t,x) = (-t,x)$

$$E_- = s^*E_+$$

We constateren dat de definitie van E_+ ook goed is op de overlap van de twee gebieden $t > 0$ en $ct < |x|$ omdat we al gezien hadden dat de drager van E bevat is in de dubbele lichtkegel.

E_+ en E_- zijn dus distributies in $\mathbb{R}_*^{n+1}$. Bovendien zijn ze volgens propositie 2.3.1 homogeen van de graad $2(2-(n+1))/2 = 1-n$. We kunnen deze distributies volgens steling 1.5.1 uitbreiden naar distributies op $\mathbb{R}^{n+1}$ en we zullen deze ook E_+ en E_- noemen.

Op $\mathbb{R}_*^{n+1}$ geldt

$$\begin{aligned}
(E_+ + E_-)/2 &= (E_+ + s^*E_+)/2 \\
&= \begin{cases} 2E & \text{als } (x,t) \in \Gamma_+ \\ s^*2E & \text{als } (x,t) \in \Gamma_- \end{cases} \\
&= E
\end{aligned}$$

en omdat het linker- en rechterlid homogeen van de graad $1-n$ zijn, zijn de homogene uitbreidingen naar $\mathbb{R}^{n+1}$ volgens propositie 1.5.1 aan elkaar gelijk zodat op $\mathbb{R}^{n+1}$ geldt

$$(E_+ + E_-)/2 = E$$

Bovendien is $\Box E_+$ een homogene distributies van de graad $1-n-2=-(n+1)$, zodat

$$\Box E_+ = 0 \quad \text{op } \mathbb{R}^{n+1}.$$

Er geldt dus

$$\Box E_+ = c\delta$$

en evenzo

$$\Box E_- = \Box(s^* E_+) = cs\delta = c\delta.$$

Omdat

$$\delta = \Box E = \Box(E_+ + E_-)/2 = (\Box E_+ + \Box E_-)/2 = (c\delta + c\delta)/2 = c\delta$$

is c gelijk aan 1, zodat

$$\Box E_+ = \Box E_- = \delta.$$

E_+ is dus een fundamentaal oplossing van de golfoperator met drager in de positieve lichtkegel Γ_+ en E_- is een fundamentaal oplossing met drager in de negatieve lichtkegel Γ_-.

We kunnen E_+, $t>0$, direct uitrekenen met de definitie van de pullback. Wanneer we stellen $g(x)=x$, dan is $Q \oplus g$ een diffeomorfisme van $\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t > 0\}$ naar $\{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t > 0\}$ dus voldoet

$$h^{-1}(t,x) = (Q(t,x),x) = (c^2t^2 - |x|^2, x).$$

zodat

$$h(s,x) = ((s+|x|^2)^{1/2}/c, x),$$

$$J_h(s,x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(s+|x|^2)^{-1/2}/c & 0 & \dots & 0 \\ (s+|x|^2)^{-1/2}x_1/c & 1 & & O \\ \vdots & & \ddots & \\ (s+|x|^2)^{-1/2}x_n/c & O & & 1 \end{pmatrix}$$

en

$$|\det h'| = \frac{1}{2}(s+|x|^2)^{-1/2}/c \; |\det I| = (2c)^{-1}(s+|x|^2)^{-1/2}$$

zodat

$$\begin{aligned} \langle E_+, \phi \rangle &= \langle 2\pi^{(1-n)/2} c/4 Q^* \chi_+^{(1-n)/2}, \phi \rangle \\ &= 2\pi^{(1-n)/2} c/4 \langle \chi_+^{(1-n)/2} \otimes 1, \Phi \rangle \end{aligned}$$

met $\Phi(s,x) = \phi(h(s,x))|\det h'(s,x)| = \phi((s+|x|^2)^{1/2}/c, x)(2c)^{-1}(s+|x|^2)^{-1/2}$. Dus

$$\begin{aligned}
\langle E_+, \phi\rangle &= \pi^{(1-n)/2}/4\langle \chi_+^{(1-n)/2}, \Psi\rangle \\
\Psi(s) &= \int \phi((s+|x|^2)^{1/2}/c, x)(s+|x|^2)^{-1/2}dx
\end{aligned} \tag{3.1}$$

We willen E_+ nu als een vectorwaardige funktie gaan schrijven. Daartoe introduceren we

$$\tilde{\phi}(t,r) = r^{n-2}\int_{|\omega|=1}\phi(t, r\omega)d\omega$$

zodat als we $\Psi(s)$ in poolcoordinaten uitdrukken we krijgen

$$\begin{aligned}
\Psi(s) &= \int \phi((s+|x|^2)^{1/2}/c, x)(s+|x|^2)^{-1/2}dx \\
&= \int_0^\infty \int_{|\omega|=1} \phi((s+r^2)^{1/2}/c, \omega r)(s+r^2)^{-1/2}/r^{n-1}d\omega dr \\
&= c\int_{|\omega|=1}\int_{s<c^2t^2}\phi(t, \omega(c^2t^2-s)^{1/2})/r^{n-2}dtd\omega \\
&= c\int_{s<c^2t^2}\tilde{\phi}(t,(c^2t^2-s)^{1/2})dt
\end{aligned}$$

waarbij we de transformatie $t = (s+r^2)^{1/2}/c$ hebben gedaan zodat $cdt = r(s+r^2)^{-1/2}dr$.
We kunnen (3.1) nu schrijven als

$$\begin{aligned}
\langle E_+, \phi\rangle &= \pi^{(1-n)/2}c/4\ \langle \chi_+^{(1-n)/2}, \int_{s<c^2t^2}\tilde{\phi}(t,(c^2t^2-.)^{1/2})dt\rangle \\
&= \pi^{(1-n)/2}c/4\ \int_0^\infty \langle \chi_+^{(1-n)/2}, \tilde{\phi}(t,(c^2t^2-.)^{1/2})\rangle\ dt
\end{aligned}$$

E_+ is dus te schrijven als een vectorwaardige funktie $E_+(t)$ met waarden in de vectorruimte $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ en er geldt

$$\langle E_+(t), \varphi\rangle = \pi^{(1-n)/2}c/4\langle \chi_+^{(1-n)/2}, \tilde{\varphi}((c^2t^2-\cdot)^{1/2})\rangle,\quad \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\ t>0$$

met

$$\tilde{\varphi}(r) = \int_{|\omega|=1}\varphi(r\omega)d\omega$$

en bovendien geldt

$$\langle E_+, \phi\rangle = \int_0^\infty \langle E_+(t), \phi(t,.)\rangle dt,\quad \phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$$

We zijn nu geinteresseert in de limiet van $E_+(t)$ en $\partial E_+(t)/\partial t$ als t naar 0 gaat.

Lemma 3.1.2 *Zij $X = Y \times I \subset \mathbb{R}^n$, waarbij Y open is in $\mathbb{R}^{n-1}$ en I een open interval is in $\mathbb{R}$. Zij verder $u \in \mathcal{D}'(X)$ een distributie die voldoet aan een differentiaal vergelijking van de vorm*

$$\frac{\partial^m}{\partial x_n^m}u + a_{m-1}\frac{\partial^{m-1}}{\partial x_n^{m-1}}u + \ldots + a_0 u = f \tag{3.2}$$

waarbij a_j een differentiaal operator is in $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ met coëfficienten in $C^\infty(X)$ en f is een continue funktie van $x_n \in I$ met waarden in $\mathcal{D}'(Y)$. Dan is u een C^m funktie van $x_n \in I$ met waarden in $\mathcal{D}'(Y)$.
Als u bovendien voortzetbaar is naar een distributie op $Y \times J$, waarbij J een open omgeving van $\bar{I}$ is en f is continu op $\bar{I}$, met waarden in $\mathcal{D}'(Y)$, dan is u een C^m funktie van $x_n \in \bar{I}$ met waarden in $\mathcal{D}'(Y)$.

We kunnen nu dit lemma toepassen en vinden zo dat $E_+(t)$ en $\partial E_+(t)/\partial t$ een limiet hebben als t naar 0 gaat. We rekenen deze nu uit met behulp van de sprongregel voor vectorwaardige funkties. We noteren $E_+(+0) = \lim_{t\to 0} E_+(t)$ en $E'(+0) = \lim_{t\to 0} E'(t)$.

$$\begin{aligned}
\Box E_+ &= c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_+(t) - \Delta E_+(t) \\
&= c^{-2}\frac{\partial}{\partial t}(E'_+(t) + \delta \otimes E_+(+0)) - \Delta E_+(t) \\
&= c^{-2}(E''_+(t) + \delta \otimes E'_+(+0) + \delta' \otimes E_+(+0)) - \Delta E_+(t) \\
&= c^{-2}E''_+(t) - \Delta E_+(t) + c^{-2}\delta \otimes E'_+(+0) + c^{-2}\delta' \otimes E_+(+0) \\
&= c^{-2}\delta \otimes E'_+(+0) + c^{-2}\delta' \otimes E_+(+0).
\end{aligned}$$

Omdat E_+ een fundamentaal oplossing van de golfoperator is, moet dit gelijk zijn aan δ, ofwel

$$E_+(+0) = 0, \quad E'_+(+0) = c^2\delta.$$

We kunnen het resultaat uit stelling 3.1.1 nu aanscherpen.

Stelling 3.1.3 *Voor $n > 2$ heeft de golfoperator een unieke fundamentaal oplossing E_+ (resp. E_-) geconcentreerd op de halfruimte $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t \geq 0\}$ (resp. in de halfruimte $\mathbb{R}^{n+1}_- = \{(t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : t \leq 0\}$). De drager is bevat in de positieve lichtkegel Γ_+ (resp. de negatieve lichtkegel Γ_-). Als n oneven is, is de drager bevat in de rand van Γ_+ (resp. Γ_-).*

Bewijs: We hoeven alleen nog de uniciteit aan te tonen.
Stel dat er nog een andere fundamentaal oplossing $\bar{E} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ van de golfoperator is. Dan geldt met $u = E_+ - \bar{E}_+$, $\mathrm{dr}(u) \subset \{(t,x) : t \geq 0\}$ en

$$\Box u = \Box(E_+ - \bar{E}_+) = \Box E_+ - \Box \bar{E}_+ = \delta - \delta = 0$$

dus

$$u = \delta * u = (\Box E_+) * u = E_+ * \Box u = E_+ * 0 = 0$$

en we mogen dus concluderen dat $E_+ = \bar{E}_+$.
N.B. We mogen de convoluties uitvoeren omdat $(\Gamma_+, \mathbb{R}^{n+1}_+)$ aan de convolutie voorwaarden voldoet.

3.2 De oplossing van het Cauchy probleem voor de golfoperator

Omdat we nu een fundamentaal oplossing van de golfoperator in de halfruimte $\mathbb{R}^{n+1}_+$ kennen, kunnen we het Cauchy probleem voor de golfoperator direct oplossen.

Stelling 3.2.1 *Stel dat $\phi_0, \phi_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$. Dan heeft het Cauchy probleem*

$$\Box u = f \quad in\ \mathbb{R}^{n+1}_+$$

met

$$u = \phi_0, \quad \partial u/\partial t = \phi_1, \quad als\ t = 0$$

een unieke oplossing $u \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, die wordt gegeven door

$$u(t,.) \doteq c^{-2}E_+(t) * \phi_1 + c^{-2}E'_+(t) * \phi_0 + \int_0^t E_+(t-s) * f(s,.)ds \tag{3.3}$$

Bewijs: Stel er is nog een oplossing $\bar{u}$ van het Cauchyprobleem. Dan geldt met $v = u - \bar{u}$, $v \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, $\mathrm{dr}(v) \subset \{(t,x) : t \geq 0\}$ en

$$\Box v = \Box(u - \bar{u}) = \Box u - \Box \bar{u} = f - f = 0, \quad \text{in } \mathbb{R}^{n+1}_+$$

dus

$$v = \delta * v = (\Box E_+) * v = E_+ * \Box v = E_+ * 0 = 0$$

en we mogen dus concluderen $u = \bar{u}$ en moeten alleen nog aantonen dat (3.3) een oplossing is.
u is een C^∞ funktie omdat $E_+(t)$ en $E'_+(t)$ vectorwaardige funkties zijn en dus voor alle $t > 0$ distributies in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n+1})$ zijn, zodat $E_+(t)*\phi_1$, $E'_+(t)*\phi_0$ en $E_+(t-s)*f(s,.)$ C^∞ funkties zijn.
Verder geldt

$$\begin{aligned} E_+(+0) &= 0 \\ E'_+(+0) &= c^2\delta \end{aligned}$$

en dus

$$\begin{aligned}
\partial/\partial t \int_0^t E_+(t-s) * f(s,.)ds &= \int_0^t E'_+(t-s) * f(s,.)ds \\
\partial^2/\partial t^2 \int_0^t E_+(t-s) * f(s,.)ds &= \int_0^t E''_+(t-s) * f(s,.)ds + c^2\delta * f(t,.)
\end{aligned}$$

zodat voor $t > 0$, omdat $\Box E_+ = 0$, geldt

$$\begin{aligned}
\Box u &= \Box(c^{-2}E_+(t) * \phi_1 + c^{-2}E'_+(t) * \phi_0 + \int_0^t E_+(t-s) * f(s,.)ds) \\
&= c^{-2}(\Box E_+(t)) * \phi_1 + c^{-2}(\Box E'_+(t)) * \phi_0 + \Box \int_0^t E_+(t-s) * f(s,.)ds \\
&= c^{-2}\partial^2/\partial t^2 \int_0^t E_+(t-s) * f(s,.)ds - \Delta \int_0^t E_+(t-s) * f(s,.)ds \\
&= \delta * f(t,.) + \int_0^t E''_+(t-s) * f(s,.)ds - \int_0^t (\Delta E_+(t-s)) * f(s,.)ds \\
&= f + \int_0^t E''_+(t-s) * f(s,.)ds - \int_0^t E''_+(t-s) * f(s,.)ds \\
&= f
\end{aligned}$$

en als $t = 0$ geldt

$$\begin{aligned}
u &= c^{-2}E_+(0) * \phi_1 + c^{-2}E'_+(0) * \phi_0 + \int_0^0 E_+(0-s) * f(s,.)ds \\
&= c^{-2}c^2\delta * \phi_0 \\
&= \phi_0
\end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned}
\partial u/\partial t &= c^{-2}E'_+(0) * \phi_1 + c^{-2}E''_+(0) * \phi_0 + \int_0^0 E'_+(0-s) * f(s,.)ds \\
&= c^{-2}c^2\delta * \phi_1 \\
&= \phi_1
\end{aligned}$$

dus voldoet (3.3) aan de randvoorwaarden.

Literatuur

[1] L. Hörmander, The Analysis of Lineair Partial Differential Operators I, Springer-Verlag, New York, 1983.
[2] E.G.F. Thomas, kollegediktaat Distributietheorie II, Lineaire Partiële Differentiaalvergelijkingen, Groningen, 1992.
[3] E.G.F. Thomas, kollegediktaat Distributietheorie, Groningen, 1991.
[4] W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, New York, 1966.