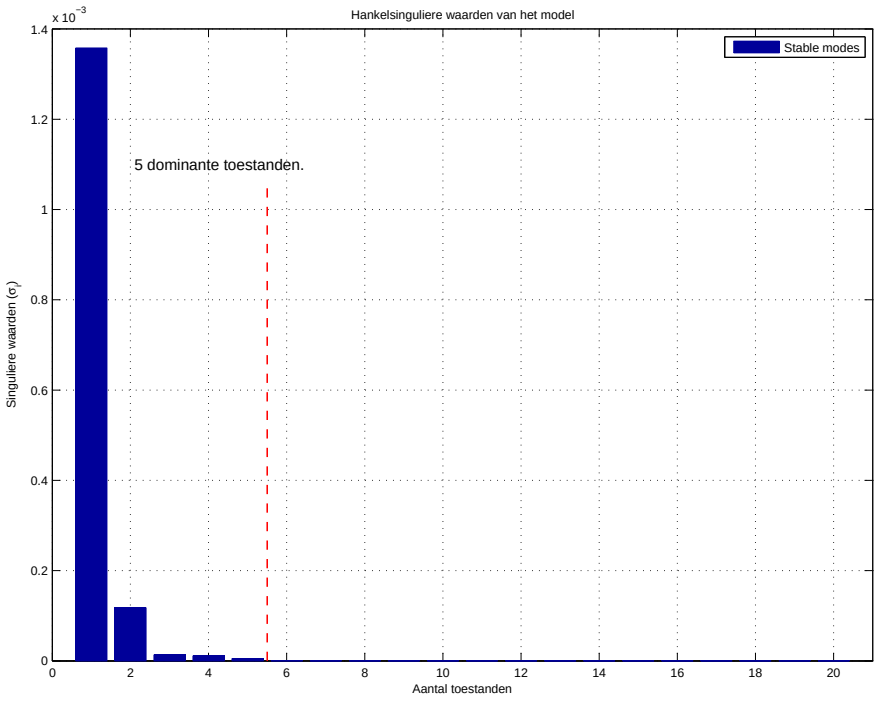
rijksuniversiteit groningen

faculteit wiskunde en natuurwetenschappen

Modelreductie door middel van Balanced Truncation

Ruò Méi Hu



Bachelorscriptie Technische Wiskunde

Augustus 2009

Modelreductie door middel van Balanced Truncation

Ruò Méi Hu

Begeleider: Prof. Dr. H.L. Trentelman

Instituut voor Wiskunde en Informatica
Postbus 407
9700 AK Groningen

Samenvatting

Met behulp van systeemtheorie is het mogelijk een wiskundig model van de werkelijkheid te maken. Een systeem wordt beschouwd als een apart gedacht gedeelte van de werkelijkheid. Dit systeem kan in wiskundige termen worden gemodelleerd, waarbij men hoopt door belangrijke eigenschappen van dit systeem te manipuleren nieuwe kennis te verkrijgen. De wisselwerking tussen het systeem en zijn omgeving gaat via inputs en outputs. Deze wisselwerking kan vaak beschreven worden door functies die afhankelijk zijn van de tijd. Soms is het echter te moeilijk om zo'n model van het systeem te manipuleren. In dat geval willen we graag een minder ingewikkeld model vinden dat in zekere zin nog steeds een goede beschrijving is van het originele systeem. Dit kan door het toepassen van modelreductie. Hieronder wordt verstaan het vinden van een lagere orde model met behoud van de belangrijke eigenschappen van het originele model. Hiervoor zijn meerdere methoden. In deze scriptie zal alleen *balanced truncation* worden besproken. Deze methode beschrijft een transformatie-algoritme naar een gebalanceerde realisatie. In deze realisatie zijn de toestanden geordend naar hun 'invloed' op het toekomstige output van het systeem en de invloed van de verleden inputs op de huidige toestand. Modelreductie vindt dan plaats door de toestanden die minder invloed uitoefenen weg te laten.

Inhoudsopgave

Notatie & Symbolen **1**

1 Inleiding **3**

2 Een wiskundig model **5**

2.1 Lyapunov vergelijkingen 6

2.2 Gebalanceerde realisaties 8

3 Balanced Truncation **13**

4 Toepassing: Binaire kolomdestillatie **19**

4.1 Het model 19

4.2 Het experiment 20

5 Conclusie & discussie **25**

5.1 Conclusie 25

Bijlagen **27**

A Systeemeigenschappen **27**

A.1 Stabiliteit 27

A.2 Regelbaarheid 28

A.3 Waarneembaarheid 29

B Matlab programma's **31**

B.1 model.m 31

B.2 test.m 32

B.3 truncation.m 32

B.4 fout.m 34

B.5 hankel.m 34

Bibliografie **35**

Notatie & Symbolen

$\mathbb{R}$	verzameling van reële getallen
$\mathbb{C}$	verzameling van complexe getallen
$j\mathbb{R}$	imaginaire as
$\in$	behoren tot
$\square$	eind van het bewijs
$\blacksquare$	eind van de stelling of het lemma
$:=$	gedefinieerd als
$<<$	veel kleiner dan
$\overline{\alpha}$	complex geconjugeerde van $\alpha \in \mathbb{C}$
$\mathcal{R}e(\alpha)$	reële deel van $\alpha \in \mathbb{C}$
I_n	$n \times n$ identiteitsmatrix
$\text{diag}(a_1, \ldots, a_n)$	een $n \times n$ diagonaal matrix met a_i het i-de diagonaal element
A^T	getransponeerde A
A^*	complex geconjugeerde en getransponeerde van A
$\det(A)$	determinant van A
$\lambda(A)$	eigenwaarde van A
σ_i	i-de singuliere waarde van A
$\mathcal{RL}_\infty$	alle propere rationale functies zonder polen op de imaginaire as
$\mathcal{RH}_\infty$	deelverzameling van $\mathcal{RL}_\infty$ waarvan alle elementen geen polen hebben in $\mathcal{R}e(s) \geq 0$
$\left[\begin{array}{c\|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$	verkorte vorm van de toestandsruimte realisatie $C(sI - A)^{-1}B + D$

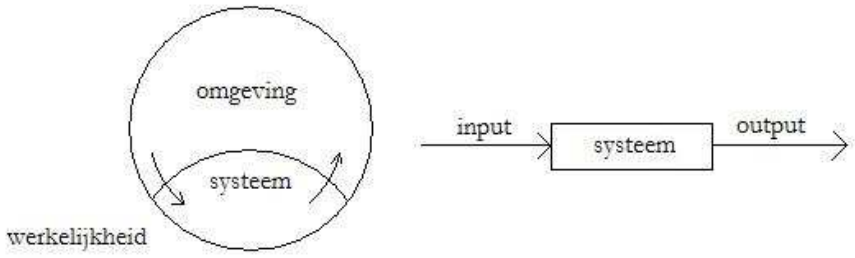
Lijst van afkortingen

d.e.s.d.a.	dan en slechts dan als
MIMO	multi-input multi-output
SISO	single-input single-output

Hoofdstuk 1

Inleiding

Wanneer we om ons heen kijken zien we het niet, maar toch schuilt er achter vele fenomenen wiskunde. In veel vakgebieden in de wiskunde, zoals in de systeemtheorie, wordt een fenomeen indirect bestudeerd door er een wiskundig model van te maken. Een model is een representatie, in wiskundige termen, van wat men belangrijke eigenschappen van het bestudeerde object of systeem vindt. Door de representatie te manipuleren wordt er gehoopt nieuwe kennis te verkrijgen van het gemodelleerde fenomeen zonder de werkelijkheid aan te tasten. Als men dus spreekt over een model wordt er een gemodelleerde versie van het systeem als een apart gedacht deel van de werkelijkheid bedoeld. De wisselwerking tussen het systeem en zijn omgeving wordt tot stand gebracht door middel van de 'input' en de 'output'. Een voorbeeld hiervan is het vallen van regen (de input) die invloed uitoefent op het niveau van het water in de rivier (de output). De inputs en outputs zijn fucties van de tijd. In deze scriptie zullen we alleen modellen beschouwen waarbij de tijd t continu wordt genomen, wat betekent dat $t \in T$ met $T = \mathbb{R}$ of $T = [t_0, \infty)$.



Figuur 1.1: Een systeem in wisselwerking met de omgeving.

Soms is zo'n model van een systeem echter te ingewikkeld om bijvoorbeeld te simuleren op een computer om bepaalde eigenschappen van dit systeem te bestuderen. In dat geval willen we graag een minder ingewikkeld model vinden dat nog steeds een goede beschrijving is van het orginele systeem, in een zekere zin. Dit kan door het toepassen van modelreductie.

Hieronder wordt verstaan het vinden van een lagere orde model met behoud van de belangrijke eigenschappen van het orginele model. Om tot zo'n gereduceerd model te komen wordt er een systematische werkwijze toegepast die in principe toegepast kan worden op een willekeurig lineair model. De modelreductiemethode die verder wordt toegelicht is *balanced truncation*. Deze methode werd voor het eerst in 1976 geïntroduceerd door Mullis en Roberts om afrond ruis in digitale filters te bestuderen [4]. In 1981 stelde Moore balanced truncation voor als een methode voor modelreductie [3].

Voordat deze methode nader wordt toegelicht, zal eerst de klasse wiskundige modellen besproken worden waarmee wordt gewerkt. De klasse van gebalanceerde realisaties wordt dan geïntroduceerd. Hierbij worden de toestanden in de realisatie geordend op de 'invloed' die ze hebben op de toekomstige output van het systeem en de invloed van de verleden inputs op de huidige toestand. De waarden waarop de toestanden beoordeeld worden heten *Hankelsinguliere waarden* en deze kunnen gezien worden als de mate waarin de toestanden regelbaar en waarneembaar zijn. Modelreductie vindt vervolgens plaats door de slecht regelbare en waarneembare toestanden af te kappen.

Tot slot is het ook interessant om te zien hoe deze theoretische aanpak een toepassing heeft in de werkelijkheid om de nauwkeurigheid ervan te verifiëren. Voor de toepassing zullen we kijken naar een destillatieproces. De berekeningen hiervoor zijn uitgevoerd met hulp van MATLAB. De programma's om het destillatieproces te simuleren en het bijbehorende systeem te reduceren zijn terug te vinden in bijlage B.

Hoofdstuk 2

Een wiskundig model

Eindig-dimensionale lineair differentiaal systemen kunnen als volgt wiskundig worden beschreven:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\ x(t_0) = x_0, \tag{2.1}$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \tag{2.2}$$

waarbij $x(t) \in \mathbb{R}^n$ de toestand van het systeem is, $x(t_0)$ de beginconditie van het systeem, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ de input van het systeem en $y(t) \in \mathbb{R}^p$ de output van het systeem, met $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$ en $D \in \mathbb{R}^{p\times n}$ [10]. Zoals in de inleiding besproken, kunnen we $u(t)$ dus zien als de variabele die het systeem beïnvloed vanuit de omgeving, terwijl $y(t)$ beschouwd kan worden als de variabele die de informatie van de toestand van het systeem overbrengt naar de omgeving (zie ook figuur 1.1). Een differentiaal systeem met een enkelvoudige-input ($m = 1$) en enkelvoudige-output ($p = 1$) wordt een SISO-systeem (single-input en single-output) genoemd. Heeft het systeem meerdere inputs en outputs dan heet het een MIMO (multiple-input en multiple-output) systeem.

Het bovenstaande systeem (2.1, 2.2) kan ook op een andere manier beschreven worden. Door bijvoorbeeld de Laplace transformatie te gebruiken worden de lineaire vergelijkingen van dit systeem getranformeerd in nieuwe lineaire vergelijkingen in het Laplace domein. De Laplace transformatie van een stuksgewijs continue functie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, genoteerd als $F = \mathcal{L}(f)$, is gedefinieerd als

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

In de systeemtheorie is bekend dat $x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}Bu(s)\,ds$, waarbij x_0 de nul-beginconditie is ($x(0) = 0$). Het invullen van deze $x(t)$ in 2.2 en door vervolgens een Laplace transformatie hierop uit te voeren, geeft het volgende resultaat

$$Y(s) = C(sI - A)^{-1}BU(s) + DU(s).$$

Het systeem kan dus als volgt geschreven worden

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Soms is het handiger een systeem te beschrijven in termen van zijn overdrachtsmatrix. De reden voor het gebruik van overdrachtmatrices is dat de berekeningen van een toestandsruimte

van een systeem dan het handigst over te brengen zijn naar een computer. Hiervoor zijn er bepaalde toestandsruimte representaties voor de overdrachtsmatrix nodig. Over het algemeen nemen we aan dat $G(s)$ een reëel-rationaal overdrachtsmatrix is, die proper is. De overdrachtsmatrix, die bij een gegeven systeem van u naar y hoort, is gedefinieerd als

$$Y(s) = G(s)U(s),$$

waarbij $U(s)$ en $Y(s)$ Laplace getransformeerden zijn van $u(t)$ en $y(t)$ met de nul-beginconditie.

Merk op dat het systeem van vergelijkingen 2.1 en 2.2 geschreven kan worden in een compactere matrixvorm, waarbij we de afhankelijkheid van de continue tijd t wel in acht nemen, maar niet meer noteren

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}.$$

Een toestandsruimte model (A, B, C, D) zodanig dat

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right] := C(sI - A)^{-1}B + D = G(s)$$

heet een realisatie van $G(s)$. Deze notatie zal in deze scriptie worden aangehouden wanneer het gaat om berekeningen met overdrachtsmatrices.

De orde van het systeem is per definitie gelijk aan dimensie van de toestandsruimte. Het ideale geval is natuurlijk als deze orde minimaal is.

Definitie 2.1. *De minimale dimensie van de toestandsruimte van een systeem $G(s)$ wordt de **McMillan graad** genoemd.*

Stelling 2.2. *Een toestandsruimte realisatie (A, B, C, D) van $G(s)$ is minimaal d.e.s.d.a. (A, B) regelbaar is en (C, A) waarneembaar*[1] *is.* ■

Balanced truncation is een methode om de orde van een lineair dynamisch systeem met meerdere input- en output-variabelen te reduceren. Beschouw hiervoor eerst een systeem $G(s)$ met een McMillan graad n. Vind vervolgens een lager-orde systeem G_r van orde r, zodanig dat G en G_r nog in een zekere zin dicht bij elkaar liggen. We zouden bijvoorbeeld graag willen dat het gereduceerde systeem voldoet aan

$$G = G_r + \Delta_a,$$

waarbij Δ_a klein is in een bepaalde norm.

2.1 Lyapunov vergelijkingen

Beschouw de volgende Lyapunov vergelijking

$$A^T Q + QA + H = 0 \tag{2.3}$$

met gegeven reële matrices A en H. Deze vergelijking heeft een unieke oplossing d.e.s.d.a. geldt dat voor de eigenwaarden van A geldt $\lambda_i(A) + \bar{\lambda}_j(A) \neq 0,\ \forall i, j$. In deze sectie zal de relatie tussen stabiliteit van de matrix A en de oplossing Q worden bestudeerd.

[1] Zie bijlage A.

Lemma 2.3. *Neem aan dat A stabiel[2] is, dan gelden de volgende uitspraken*

(i) Vergelijking 2.3 heeft een unieke oplossing, gegeven door $Q = \int_0^\infty e^{A^T t} H e^{At} dt$.

(ii) $Q > 0$ als $H > 0$,
$Q \geq 0$ als $H \geq 0$.

(iii) Als $H \geq 0$, dan is (H, A) waarneembaar d.e.s.d.a. $Q > 0$.

■

Een onmiddelijk gevolg van (iii) is dat, gegeven een stabiele matrix A, het paar (C, A) waarneembaar is d.e.s.d.a. de oplossing van de volgende Lyapunov vergelijking

$$A^T Q + QA + C^T C = 0$$

positief definiet is. Q heet de *waarneembaarheids Gramiaan* van het systeem. Op soortgelijke wijze is het paar (A, B) regelbaar d.e.s.d.a. de oplossing van

$$AP + PA^T + BB^T = 0$$

positief definiet is. P heet de *regelbaarheids Gramiaan* van het systeem.

Vaak is de oplossing van een Lyapunov vergelijking al gegeven en is het alleen nog maar de vraag of de matrix A stabiel is.

Lemma 2.4. *Stel dat Q een oplossing is van de Lyapunov vergelijking (2.3). Dan geldt*

(i) $\mathcal{R}e\,[\lambda_i(A)] \leq 0$ als $Q > 0$ en $H \geq 0$.

(ii) A is stabiel als $Q > 0$ en $H > 0$.

(iii) A is stabiel als $Q \geq 0$ en (H, A) detecteerbaar[3] is.

Bewijs. Laat λ een eigenwaarde zijn van A en $v \neq 0$ de corresponderende eigenvector. Dan geldt dat $Av = \lambda v$. Voorvermenigvuldig vergelijking 2.3 met v^* en vermenigvuldig dezelfde vergelijking na met v. Dan verkrijgen we

$$2\mathcal{R}e[\lambda] v^* Q v + v^* H v = 0.$$

Als $Q > 0$, dan volgt dat $v^*Qv > 0$. Dus de voorwaarde dat $Q > 0$ en $H \geq 0$ geeft $\mathcal{R}e(\lambda) \leq 0$ en als $H > 0$ dan is $\mathcal{R}e(\lambda) < 0$. Aan (i) en (ii) is dus voldaan. Om (iii) in te zien, nemen we aan dat $\mathcal{R}e(\lambda) \geq 0$. Dan geldt dat $v^*Hv = 0$ (d.w.z. $Hv = 0$). Dit impliceert dat λ een onstabiele en onwaarneembare eigenwaarde is. Dit is echter is tegenstelling met de veronderstelling dat (H, A) detecteerbaar is, dus $\mathcal{R}e(\lambda) < 0$. □

[2] Zie bijlage A.

[3] Het systeem $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Cx(t)$, oftewel het paar (C, A), is detecteerbaar indien er een reële $n \times p$ matrix K bestaat zodanig dat $\mathcal{R}e(\lambda) < 0$ voor alle eigenwaarden λ van $A - KC$.

2.2 Gebalanceerde realisaties

Bij een gegeven overdrachtsmatrix is het mogelijk vele verschillende toestandsruimte realisaties te vinden. In deze sectie zal één klasse van realisaties voor stabiele overdrachtsmatrices worden geïntroduceerd, nameljke gebalanceerde realisaties. Eerst beschouwen we wat feiten om de reden voor het gebruik van deze klasse van realisaties te illustreren.

Lemma 2.5. *Laat* $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$ *een toestandsruimte realisatie zijn van een (niet noodzakelijk stabiele) overdrachtsmatrix* $G(s)$*. Stel dat er een matrix*

$$P = P^T = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bestaat met P_1 *niet-singulier zodanig dat*

$$AP + PA^T + BB^T = 0.$$

Partitioneer nu de realisatie (A, B, C, D) *overeenkomstig met* P *als*

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array}\right].$$

Dan is $\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array}\right]$ *ook een realisatie van* G*. Bovendien is* (A_{11}, B_1) *regelbaar als* A_{11} *stabiel is.*

Bewijs. Gebruik de gepartitioneerde P en (A, B, C) om het volgende te verkrijgen:

$$0 = AP + PA^T + BB^T = \begin{bmatrix} A_{11}P_1 + P_1A_{11}^T + B_1B_1^T & P_1A_{21}^T + B_1B_2^T \\ A_{21}P_1 + B_2B_1^T & B_2B_2^T \end{bmatrix}.$$

Omdat P_1 niet-singulier is, volgt hieruit dat $B_2 = 0$ en $A_{21} = 0$. Een gedeelte van de realisatie is dus niet regelbaar:

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ 0 & A_{22} & 0 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array}\right]$$

Tot slot volgt uit Lemma 2.3 dat (A_{11}, B_1) regelbaar is als A_{11} stabiel is. □

Ook hebben we het volgende:

Lemma 2.6. *Laat* $\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$ *een toestandsruimte realisatie zijn van een (niet noodzakelijk stabiele) overdrachtsmatrix* $G(s)$*. Stel dat er een matrix*

$$Q = Q^T = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

bestaat met Q_1 niet-singulier zodanig dat

$$QA + A^T Q + C^T C = 0.$$

Partitioneer nu de realisatie (A, B, C, D) overeenkomstig met Q als

$$\left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array}\right].$$

Dan is $\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array}\right]$ ook een realisatie van $G(s)$. Bovendien is (C_1, A_{11}) waarneembaar als A_{11} stabiel is. ■

Voorbeeld 1. Beschouw een stabiele overdrachtsfunctie

$$G(s) = \frac{3s + 18}{s^2 + 3s + 18}.$$

Een toestandsruimte realisatie van $G(s)$ kan worden gegeven door

$$G(s) = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & -4/\alpha & 1 \\ 4\alpha & -2 & 2\alpha \\ \hline -1 & 2/\alpha & 0 \end{array}\right],$$

waarbij $\alpha \in \mathbb{R}$ en ongelijk nul is. De regelbaarheids Gramiaan van deze realisatie wordt gegeven door

$$P = \left[\begin{array}{cc} 0.5 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \end{array}\right].$$

Dit is te controleren door de P in te vullen in de Lyapunov vergelijking. De laatste diagonaalterm van P kan willekeurig klein gemaakt worden, door α klein te kiezen. De regelbaarheid van de corresponderende toestand kan dus willekeurig zwak worden. Als de toestand die overeenkomt met de laatste diagonaalterm wordt verwijderd, verkrijgen we de volgende overdrachtsfunctie

$$\hat{G} = \left[\begin{array}{c|c} -1 & 1 \\ \hline -1 & 0 \end{array}\right] = \frac{-1}{s+1},$$

welke in elk geval niet dicht bij de orginele overdrachtsfunctie ligt. Wanneer we naar de waarneembaarheids Gramiaan Q kijken, hadden we hetzelfde probleem kunnen waarnemen. De waarneembaarheids Gramiaan van de orginele realisatie wordt gegeven door

$$Q = \left[\begin{array}{cc} 0.5 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\alpha^2} \end{array}\right].$$

Wanneer α heel klein wordt gekozen, is $\frac{1}{\alpha^2}$ heel groot. Dit laat zien dat de toestand die overeenkomt met de laatste diagonaalterm sterk waarneembaar is.

Dit voorbeeld laat zien dat alleen de regelbaarheids (of waarneembaarheids) Gramiaan niet voldoende is om een nauwkeurige aanwijzinging te geven over de dominantie van het systeem in

de input/output werking. Dit is dan ook de reden voor het introduceren van de gebalanceerde realisatie. Deze geeft gebalanceerde Gramianen voor regelbaarheid en waarneembaarheid.

Stel dat $G = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$ een realisatie is met A stabiel. Laat P en Q de regelbaarheids Gramiaan en waarneembaarheid Gramiaan zijn, respectievelijk. Dan zijn P en Q de unieke oplossingen van de volgende Lyapunov vergelijkingen:

$$AP + PA^T + BB^T = 0,$$

$$A^TQ + QA + C^TC = 0,$$

met $P \geq 0$, $Q \geq 0$. Verder is het paar (A, B) regelbaar d.e.s.d.a. $P > 0$ en (C, A) is waarneembaar d.e.s.d.a. $Q > 0$. Stel dat de toestand getransformeerd wordt door een niet-singuliere T naar $\hat{x} = Tx$. Dan verkrijgen we de volgende realisatie

$$G = \left[\begin{array}{c|c} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & \hat{D} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} TAT^{-1} & TB \\ \hline CT^{-1} & D \end{array}\right].$$

De getransformeerde toestanden voldoen nu aan de volgende Lyapunov vergelijkingen:

$$\hat{A}\hat{P} + \hat{P}\hat{A}^T + \hat{B}\hat{B}^T = 0$$

$$\hat{A}^T\hat{Q} + \hat{Q}\hat{A} + \hat{C}^T\hat{C} = 0,$$

met de unieke oplossingen $\hat{P}$ en $\hat{Q}$. De Gramianen worden dus getranformeerd naar $\hat{P} = TPT^T$ en $\hat{Q} = (T^{-1})^TQT^{-1}$, want deze voldoen aan de nieuwe Lyapunov vergelijkingen. Merk op dat $\hat{P}\hat{Q} = TPQT^{-1}$ en dat dus de eigenwaarden van het product van de Gramianen invariant zijn onder transformatie.

Bij een minimale realisatie willen we graag de transformatie T zodanig kiezen dat

$$\hat{P} = TPT^T = \Sigma,$$

$$\hat{Q} = (T^{-1})^TQT^{-1} = \Sigma,$$

waarbij Σ een diagonaal matrix is, zeg $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1 I_{s_1}, \sigma_2 I_{s_2}, \ldots, \sigma_N I_{s_N})$. Deze nieuwe realisatie met regelbaarheids en waarneembaarheids Gramianen $\hat{P} = \hat{Q} = \Sigma$ heet *gebalanceerde realisatie*. De dalend geordende getallen, $\sigma_1 > \sigma_2 > \ldots > \sigma_N \geq 0$, heten de *Hankel singuliere waarden* van het systeem.

Stelling 2.7. *Laat P en Q twee positieve definiete matrices zijn. Dan bestaat er een niet-singuliere T zodanig dat*

$$TPT^T = \Sigma = (T^{-1})^TQT^{-1}$$

met Σ diagonaal en positief definiet.

Bewijs. Omdat P een positief definiete matrix is, bestaat er een transformatie T_1 zodanig dat

$$T_1PT_1^T = I$$

Laat nu

$$(T_1^T)^{-1}QT_1^{-1} = \tilde{Q}, \quad \tilde{Q} > 0$$

en laat U een unitaire[4] matrix zijn zodanig dat

$$U\tilde{Q}U^T = \Sigma^2, \quad \Sigma > 0.$$

Laat

$$(T_2^T)^{-1} = U$$

dan volgt dat

$$(T_2^T)^{-1}(T_1^T)^{-1}QT_1^{-1}(T_2)^{-1} = \Sigma^2.$$

Definieer

$$(T_3)^{-1} = \Sigma^{-1/2}$$

dan volgt dat

$$(T_3^T)^{-1}(T_2^T)^{-1}(T_1^T)^{-1}QT_1^{-1}(T_2)^{-1}(T_3)^{-1} = \Sigma.$$

Laat vervolgens

$$T = T_3T_2T_1$$

dan geldt dat

$$\begin{aligned} TPT^T &= \Sigma^{1/2}(U^T)^{-1}IU^{-1}\Sigma^{1/2} \\ &= \Sigma \\ &= (T^{-1})^TQT^{-1}. \end{aligned}$$

□

Gevolg 2.8. *Voor elk stabiel systeem* $G = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$ *met* (A, B) *regelbaar en* (C, A) *waarneembaar, bestaat er een niet-singulier transformatie* T *zodanig dat de regelbaarheids Gramiaan* P *en de waarneembaarheids Gramiaan* Q *van* $G = \left[\begin{array}{c|c} TAT^{-1} & TB \\ \hline CT^{-1} & D \end{array}\right]$ *gegeven worden door*

$$P = \Sigma_1 = Q$$

met Σ_1 *diagonaal en positief definiet.* ■

Neem aan dat de Hankel singuliere waarden van het systeem dalend zijn geordend zodanig dat $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1 I_{s_1}, \sigma_2 I_{s_2}, \ldots, \sigma_N I_{s_N})$ met $\sigma_1 > \sigma_2 > \ldots > \sigma_N$. Neem ook aan dat $\sigma_r >> \sigma_{r+1}$ voor een bepaalde r. De gebalanceerde realisatie impliceert dan dat de toestanden die overeenkomen met de singuliere waarden van $\sigma_{r+1}, \ldots, \sigma_N$ minder regelbaar en minder waarneembaar zijn dan de toestanden die overeenkomen met $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$. Daarom vermoeden we dat het afkappen (*truncating*) van de minder regelbare en minder waarneembare toestanden niet leiden tot veel verlies van informatie van het systeem.

[4]Een matrix $U \in M_{n\times n}$ heet unitair als $UU^* = I$, waarbij $U^* = \overline{U^T}$ [2].

Hoofdstuk 3

Balanced Truncation

Beschouw een systeem $G \in \mathcal{RH}_\infty$ en veronderstel dat $G = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right]$ met A stabiel, een gebalanceerde realisatie is, dus dat de regelbaarheids en waarneembaarheids Gramianen gelijk en diagonaal zijn. Noem de gebalanceerde Gramianen Σ, dan gelden de volgende Lyapunov vergelijkingen:

$$A\Sigma + \Sigma A^* + BB^* = 0 \tag{3.1}$$
$$A^*\Sigma + \Sigma A + C^*C = 0. \tag{3.2}$$

Maak nu een partitie van de gebalanceerde Gramiaan als volgt $\Sigma = \left[\begin{array}{cc} \Sigma_1 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 \end{array}\right]$ en partitioneer het systeem als

$$G = \left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array}\right].$$

Stelling 3.1. *Neem aan dat Σ_1 en Σ_2 geen diagonaal-elementen gelijk hebben. Dan geldt dat A_{11} stabiel is.* ■

Het bewijs hiervan is terug te vinden in [10]. Pernebo en Silverman waren de eersten die deze stabiliteitseigenschap van het gereduceerd model lieten zien [6].

Stelling 3.2. *Stel dat $G(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ en*

$$G(s) = \left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array}\right]$$

een gebalanceerde realisatie is met Gramiaan $\Sigma = diag(\Sigma_1, \Sigma_2)$ waarbij

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \mathrm{diag}(\sigma_1 I_{s_1}, \sigma_2 I_{s_2}, \ldots, \sigma_r I_{s_r}), \\ \Sigma_2 &= \mathrm{diag}(\sigma_{r+1} I_{s_{r+1}}, \sigma_{r+2} I_{s_{r+2}}, \ldots, \sigma_N I_{s_N}) \end{aligned}$$

en

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \ldots > \sigma_r > \sigma_{r+1} > \sigma_{r+2} > \ldots > \sigma_N,$$

waarbij σ_i een algebraïsche multipliciteit s_i heeft met $i = 1, 2, \ldots, N$ en $s_1 + s_2 + \ldots + s_N = n$. Dan is het gereduceerde systeem

$$G_r(s) = \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array}\right]$$

gebalanceerd en A_{11} is asymptotisch stabiel. Bovendien geldt er

$$||G - G_r||_\infty \leq 2(\sigma_{r+1} + \sigma_{r+2} + \ldots + \sigma_N).$$

Bewijs. De Lyapunov vergelijkingen (3.1) en (3.2) kunnen geschreven worden in termen van hun gepartitioneerde matrices

$$\begin{aligned} A_{11}\Sigma_1 + \Sigma_1 A_{11}^* + B_1 B_1^* &= 0, \\ A_{11}^*\Sigma_1 + \Sigma_1 A_{11} + C_1^* C_1 &= 0. \end{aligned}$$

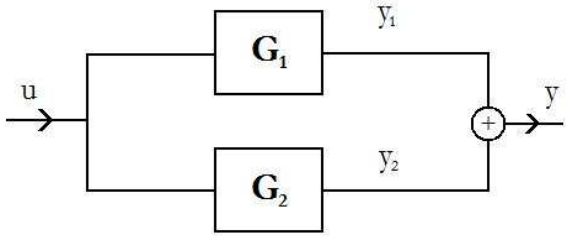
Het gereduceerde systeem voldoet dus aan de Lyapunov vergelijkingen met als unieke oplossing Σ_1 voor zowel de regelbaarheids Gramiaan als de waarneembaarheids Gramiaan, dus is het gereduceerde systeem G_r gebalanceerd. Uit Stelling 3.1 volgt dan dat A_{11} asymptotisch stabiel is.

Vervolgens zullen we bewijzen dat de hierboven genoemde bovengrens geldt door eerst een modelreductie van 1 stap te laten zien. We nemen dus aan dat $\Sigma_2 = \sigma_N I_{s_N}$. Voor het definiëren van de benaderde fout maken we gebruik van het volgende lemma:

Lemma 3.3. *Stel dat G_1 en G_2 twee deelsystemen zijn met de volgende toestandsruimte representatie:*

$$G_1 = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array}\right], \quad G_2 = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array}\right].$$

Dan is de parallelle interconnectie van deze twee deelsystemen een systeem waarvan de input gelijk is aan de oorspronkelijke input van de deelsystemen, maar de output gelijk is aan de som van de outputs van de deelsystemen (Zie fig. 3.1).



Figuur 3.1: Twee parallelle deelsystemen.

Deze operatie in termen van de overdrachtsmatrices van twee deelsystemen is in wezen een

optelling van twee overdrachtsmatrices. Dit kan als volgt worden gerepresenteerd

$$\begin{aligned} G_1 + G_2 &= \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D_1 + D2 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} A_2 & 0 & B_2 \\ 0 & A_1 & B_1 \\ \hline C_2 & C_1 & D_1 + D2 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

■

Het verschil $E_{11}(s) := G(s) - G_r(s)$ wordt gegeven door

$$\begin{aligned} E_{11} &= \left[\begin{array}{cc|c} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline C_1 & C_2 & D \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c|c} A_{11} & B_1 \\ \hline C_1 & D \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{ccc|c} A_{11} & 0 & 0 & B_1 \\ 0 & A_{11} & A_{12} & B_1 \\ 0 & A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline -C_1 & C_1 & C_2 & 0 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

Pas vervolgens een transformatie T toe op de toestandsruimte realisatie van E_{11} met

$$T = \begin{bmatrix} I/2 & I/2 & 0 \\ I/2 & -I/2 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, T^{-1} = \begin{bmatrix} I & I & 0 \\ I & -I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}.$$

Een realisatie van de fout-overdrachtsmatrix E_{11} is dan ook

$$E_{11} = \left[\begin{array}{ccc|c} A_{11} & 0 & A_{12}/2 & B_1 \\ 0 & A_{11} & -A_{12}/2 & 0 \\ A_{21} & -A_{21} & A_{22} & B_2 \\ \hline 0 & -2C_1 & C_2 & 0 \end{array}\right].$$

Beschouw vervolgens de uitbreiding van $E_{11}(s)$:

$$\begin{aligned} E(s) &= \begin{bmatrix} E_{11}(s) & E_{12}(s) \\ E_{21}(s) & E_{22}(s) \end{bmatrix} \\ &= \left[\begin{array}{ccc|cc} A_{11} & 0 & A_{12}/2 & B_1 & 0 \\ 0 & A_{11} & -A_{12}/2 & 0 & \sigma_N \Sigma_1^{-1} C_1^* \\ A_{21} & -A_{21} & A_{22} & B_2 & -C_2^* \\ \hline 0 & -2C_1 & C_2 & 0 & 2\sigma_N I \\ -2\sigma_N B_1^* \Sigma_1^{-1} & 0 & -B_2^* & 2\sigma_N I & 0 \end{array}\right] \\ &=: \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \hline \tilde{C} & \tilde{D} \end{array}\right] \end{aligned}$$

Dan voldoet

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_N^2 \Sigma_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sigma_N I_{s_N} \end{bmatrix}$$

aan de volgende vergelijkingen

$$\begin{aligned} \tilde{A}\tilde{P} + \tilde{P}\tilde{A} + \tilde{B}\tilde{B}^* &= 0, \\ \tilde{P}\tilde{C}^* + \tilde{B}\tilde{D}^* &= 0. \end{aligned}$$

Door gebruik te maken van deze twee vergelijkingen en

$$\begin{aligned} E^*(-s) &= \tilde{B}^*(-sI - \tilde{A}^*)^{-1}\tilde{C}^* + \tilde{D}^* \\ &= -\tilde{B}^*(sI - (-\tilde{A}^*))^{-1}\tilde{C}^* + \tilde{D}^*, \end{aligned}$$

oftewel, als toestands-ruimte realisatie

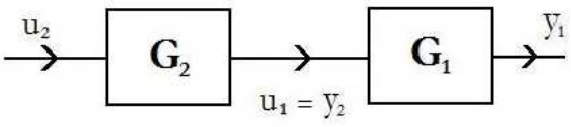
$$E^*(-s) = \left[\begin{array}{c|c} -\tilde{A}^* & \tilde{C}^* \\ \hline -\tilde{B}^* & \tilde{D}^* \end{array}\right],$$

verkrijgen we

$$\begin{aligned} E(s)E^*(-s) &= \left[\begin{array}{cc|c} \tilde{A} & -\tilde{B}\tilde{B}^* & \tilde{B}\tilde{D}^* \\ 0 & -\tilde{A}^* & \tilde{C}^* \\ \hline \tilde{C} & -\tilde{D}\tilde{B}^* & \tilde{D}\tilde{D}^* \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} \tilde{A} & -\tilde{A}\tilde{P} - \tilde{P}\tilde{A}^* - \tilde{B}\tilde{B}^* & \tilde{P}\tilde{C}^* + \tilde{B}\tilde{D}^* \\ 0 & \tilde{A}^* & \tilde{C}^* \\ \hline \tilde{C} & -\tilde{C}\tilde{P} - \tilde{D}\tilde{B}^* & \tilde{D}\tilde{D}^* \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} \tilde{A} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{A}^* & \tilde{C}^* \\ \hline \tilde{C} & 0 & \tilde{D}\tilde{D}^* \end{array}\right] \\ &= \tilde{D}\tilde{D}^* = 4\sigma_N^2 I. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Hierbij maken we gebruik van het volgende lemma:

Lemma 3.4. *Stel dat G_1 en G_2 twee deelsystemen zijn, zoals in Lemma 3.3. Dan is de serie schakeling van deze twee deelsystemen een systeem met de output van het tweede deelsysteem gelijk aan de input van het eerste deelsysteem (zie fig. 3.2).*



Figuur 3.2: Twee deelsystemen in serie.

Deze operatie in termen van overdrachtsmatrices van twee deelsystemen is als het ware het product van twee overdrachtsmatrices. De representatie van dit in serie geschakelde systeem wordt als volgt verkregen

$$\begin{aligned} G_1G_2 &= \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} A_1 & B_1C_2 & B_1D_2 \\ 0 & A_2 & B_2 \\ \hline C_1 & D_1C_2 & D_1D_2 \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{cc|c} A_2 & 0 & B_2 \\ B_1C_2 & A_1 & B_1D_2 \\ \hline D_1C_2 & C_1 & D_1D_2 \end{array}\right]. \end{aligned}$$

■

De tweede realisatie (3.3) kan verkregen worden door de toestandsruimte transformatie

$$T = \left[\begin{array}{cc} I & \tilde{P} \\ 0 & I \end{array}\right].$$

Dus we weten dat voor een reductie van één stap de norm van de fout-overdrachtsmatrix afgeschat kan worden met $||E_{11}||_\infty \leq ||E||_\infty = 2\sigma_N$. Wat nog rest is met behulp hiervan de norm van de fout-overdrachtsmatrix in de r-de reductiestap af te schatten.

Neem $G(s)$ het orginele systeem en $G_N(s)$ het systeem dat met één stap gereduceerd is. Dan volgt dat de fout afgeschat kan worden met

$$||G - G_N||_\infty \leq 2\sigma_N.$$

Wanneer het orginele systeem met 2 stappen wordt gereduceerd dan kan vanwege de driehoeksongelijkheid, de fout afgeschat worden als

$$\begin{aligned} ||G - G_{N-1}||_\infty &= ||G - G_N + G_N - G_{N-1}||_\infty \\ &\leq ||G - G_N||_\infty + ||G_N - G_{N-1}||_\infty \\ &\leq 2\sigma_N + 2\sigma_{N-1}, \end{aligned}$$

waarin G_{N-1} het systeem is dat met 2 stappen is gereduceerd. Dit kan herhaald worden tot de r-de stap met $\Sigma_2 = \mathrm{diag}(\sigma_{r+1}I_{s_{r+1}}, \sigma_{r+2}I_{s_{r+2}}, \ldots, \sigma_N I_{s_N})$, wat de gewenste bovengrens geeft

$$\begin{aligned} ||G - G_r||_\infty &\leq ||G - G_N||_\infty + \ldots + ||G_{r+3} - G_{r+2}||_\infty + ||G_{r+2} - G_{r+1}||_\infty \\ &\leq 2(\sigma_N + \ldots + \sigma_{r+1} + \sigma_{r+2}). \end{aligned}$$

□

Hoofdstuk 4

Toepassing: Binaire kolomdestillatie

De theorie achter de balanced truncation methode kan ook in de praktijk worden toegepast. Een voorbeeld hiervan is het destillatieproces in een kolom. Kolomdestillatie wordt onder andere toegepast in de drankindustrie en de olieraffinage. Destillatie is vaak de meest economische methode om vloeistoffen te scheiden. Deze manier van scheiding is gebaseerd op de verschillende kookpunten of trajecten van de verbindingen die deel uitmaken van een mengsel [1].

De twee klassieke typen van destillatie zijn de continue destillatie en de batchdestilllatie. Bij continue destillatie wordt er continue toevoer opgenomen en gescheiden in twee of meer producten. Batchdestillatie daarentegen neemt een lading (batch) toevoer per eenheid tijd en scheidt deze vervolgens in twee of meerdere producten. Daarnaast kunnen we in het destillatieproces nog een onderscheid maken in een binaire destillatie en een meerdere-componenten destillatie. Binaire destillatie is een scheiding van slechts twee chemicaliën. Meerdere-componenten destillatie is een scheiding van een mengsel in meerdere chemicaliën. De theorie en praktijk van meerdere-compenten destillatie is aanzienlijk ingewikkelder dan binaire destillatie, daarom zullen we in dit hoofdstuk alleen de binaire destillatie beschouwen.

4.1 Het model

Het scheiden van de inputcomponenten, de toevoer, wordt bereikt door de overdracht van de componenten in verscheidene stadia in de kolom te controleren zodanig dat het gewenste product uit de output, de bodem en de top van de kolom, wordt verkregen. In het destillatie systeem worden twee recirculerende stromen teruggebracht naar de kolom. Eén naar de top en één naar de bodem van de kolom. De condensator op de top van de kolom condenseert een fractie van de topdampstroming V in een recirculerende vloeistofvorm L. De recirculerende vloeistof levert de neergaande vloeistofstroom die nodig is in de kolom. De overgebleven fractie van de dampstoming is het destillatie- of topproduct. Een reboiler wordt toegevoegd aan de bodem van de kolom, waar een gedeelte van de bodemvloeistof L_b verdampt en recirculeert in de toren als een dampstroom V_b. Dit levert een opgaande dampstroom die nodig is in de toren, terwijl het overgebeleven gedeelte van L_b het bodemproduct B [kmol/min] vormt.

De kolom bestaat uit n stadia, genummerd van de bodem tot de top. De toevoer komt binnen in de kolom op stadium n_F, met $1 < n_F < n$. De toevoerstroming F [kmol/min]

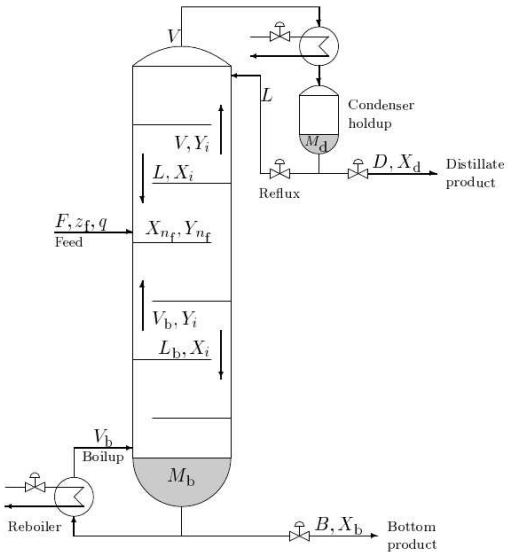
is een verzadigde vloeistof met toevoerssamenstelling z_F [mol fractie]. L [kmol/uur] is de terugvloeiende-stromingsratio van de condensator, V_b [kmol/uur] is de 'boilup'-stromingsratio van de reboiler. De variabele

$$u = \begin{pmatrix} L \\ V_b \\ F \end{pmatrix}$$

wordt genomen als input van de fabriek. Het topproduct bestaat uit een destillatie stroom D [kmol/uur] met samenstelling X_d. Op dezefde manier bestaat het bodemproduct uit een bodemstroom B met samenstelling X_b. De output van het systeem is dan

$$y = \begin{pmatrix} X_d \\ X_b \end{pmatrix},$$

daarbij stellen X_d en X_b de concentraties of de zuiverheid van het gewenste product voor. In figuur 4.1 is een grafische weergaven van het binairy destillatieproces te zien.



Figuur 4.1: Binaire kolomdestillatie.

4.2 Het experiment

Als voorbeeld beschouwen we een middelgrote propaan-butaan destillatiekolom. De evenwichtstoestand x^* wordt gegeven in het bestand `model.m` (zie bijlage B), waar de matrices (A, B, C, D) worden gegenereerd[5]. Voor dit systeem gaan we na of de norm van de fout door het systeem te reduceren tot een van orde r voldoet aan de bovengrens gegeven in Stelling 3.2. Daartoe maken we eerst een gebalanceerde realisatie $G(s)$ van de gegeven matrices (A, B, C, D) en bepalen de Hankelsinguliere waarden. In tabel 4.2 hieronder is te zien dat

[5]Voor specificaties over de afleiding hiervan zie [9].

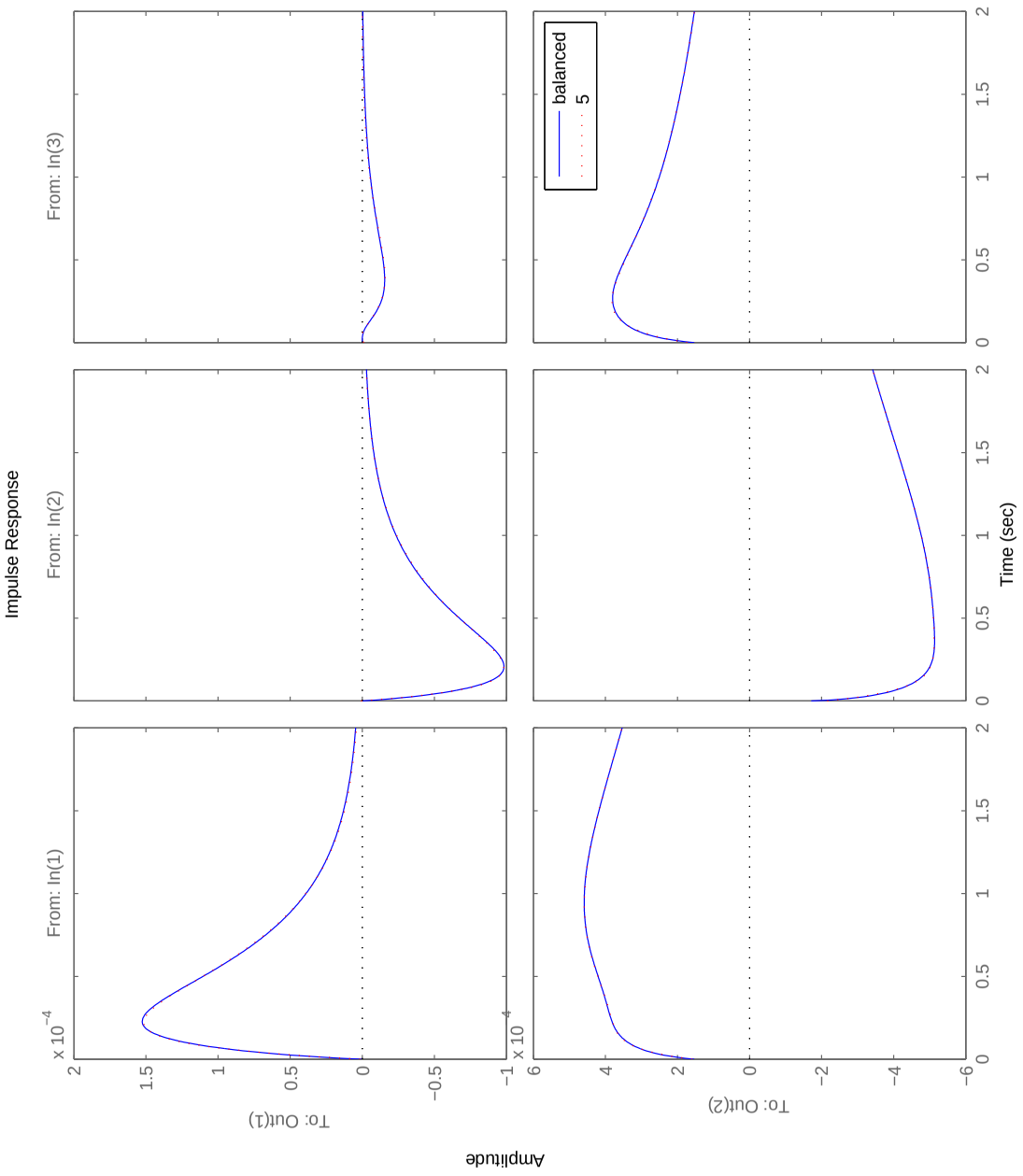
deze als snel zeer klein worden, wat ook te zien is op de illustratie van het titelblad. Slechts de eerste vijf waarden zijn echt dominant te noemen. Hieruit kunnen we al concluderen dat er veel toestanden zijn die minder regelbaar en minder waarneembaar zijn. Het blijkt dan ook dat dit systeem te reduceren is tot zelfs de 5^e orde, zonder dat er te veel informatie verloren gaat. Dit kunnen we zien aan de impulsresponsies in figuren 4.2, 4.3 en 4.4. Pas als het orginele systeem is gereduceerd tot een 3^e orde systeem vertonen de impulsresponsies een aanzienlijk verschil met het orgineel. Merk op dat we hier te maken hebben met een MIMO systeem en dus met meerdere impulsresponsies te maken hebben. De benaderde fouten en de geschatte grenzen staan tabel 4.2 hieronder. In deze tabel zien we duidelijk dat er wordt voldaan aan de bovengrens gegeven in Stelling 3.2. Merk op dat de tabel ook laat zien dat de werkelijke fout voor de r-de orde benadering bijna gelijk is aan $2\sigma_{r+1}$.

0.001357936360923
0.000117601173312
0.000013368349138
0.000011004566692
0.000004994268822
0.000000471251207
0.000000225225286
0.000000079960723
0.000000029656278
0.000000024138306
0.000000004775231
0.000000000299222
0.000000000190890
0.000000000046153
0.000000000006756
0.000000000001786
0.000000000000391
0.000000000000023
0.000000000000001
0.000000000000000

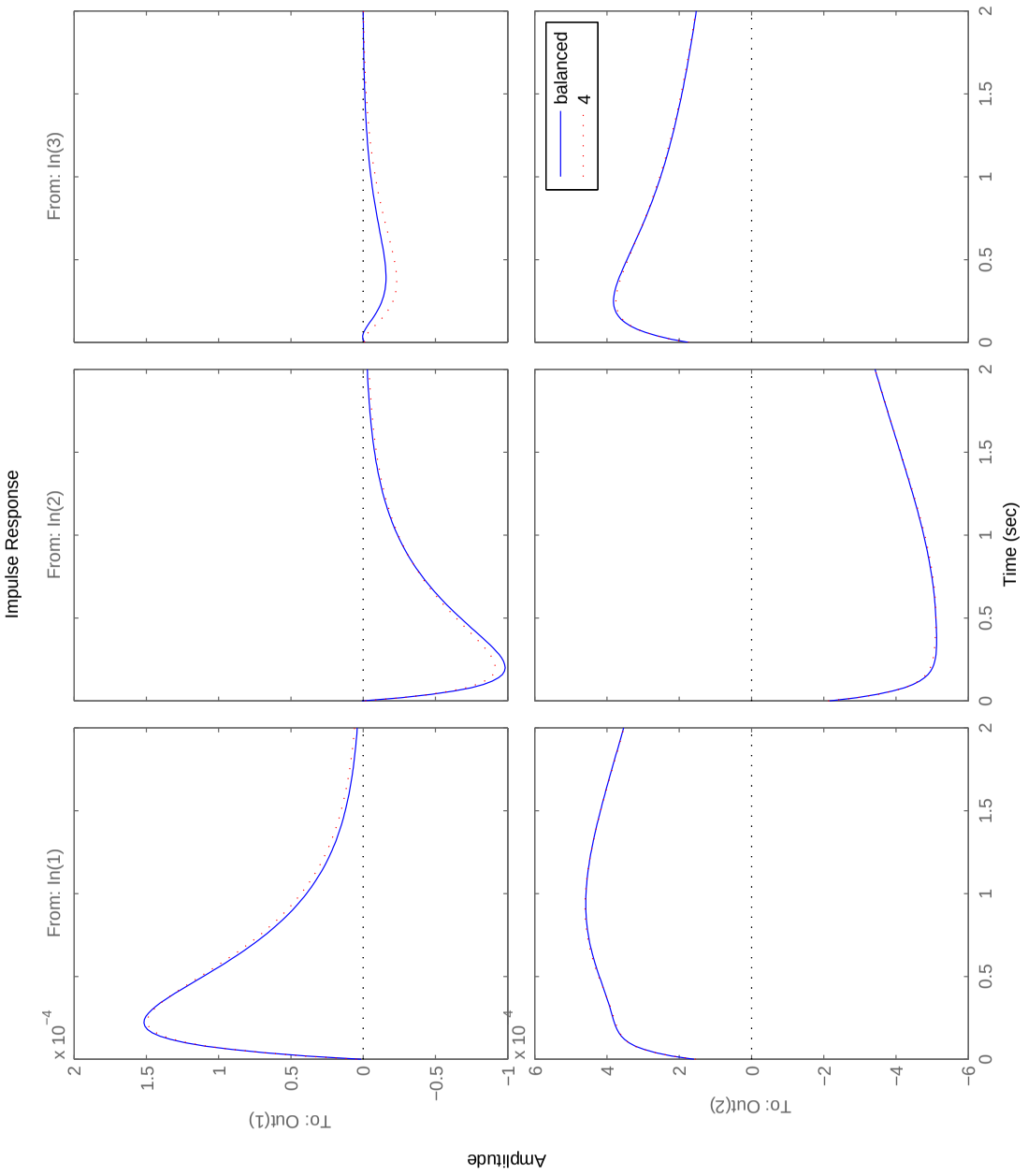
Tabel 4.1: Hankelsinguliere waarden.

r	0	1	2	3	4	5	6
$\|\|G - G_r\|\|_\infty$	0.002560	0.000222	0.000025	0.000021	0.000009	0.000001	0.000000
$2\Sigma_{i=r+1}^{20}\sigma_i$	0.003011	0.000296	0.000060	0.000034	0.000012	0.000002	0.000001
$2\sigma_{r+1}$	0.002716	0.000235	0.000027	0.000022	0.000010	0.000001	0.000000

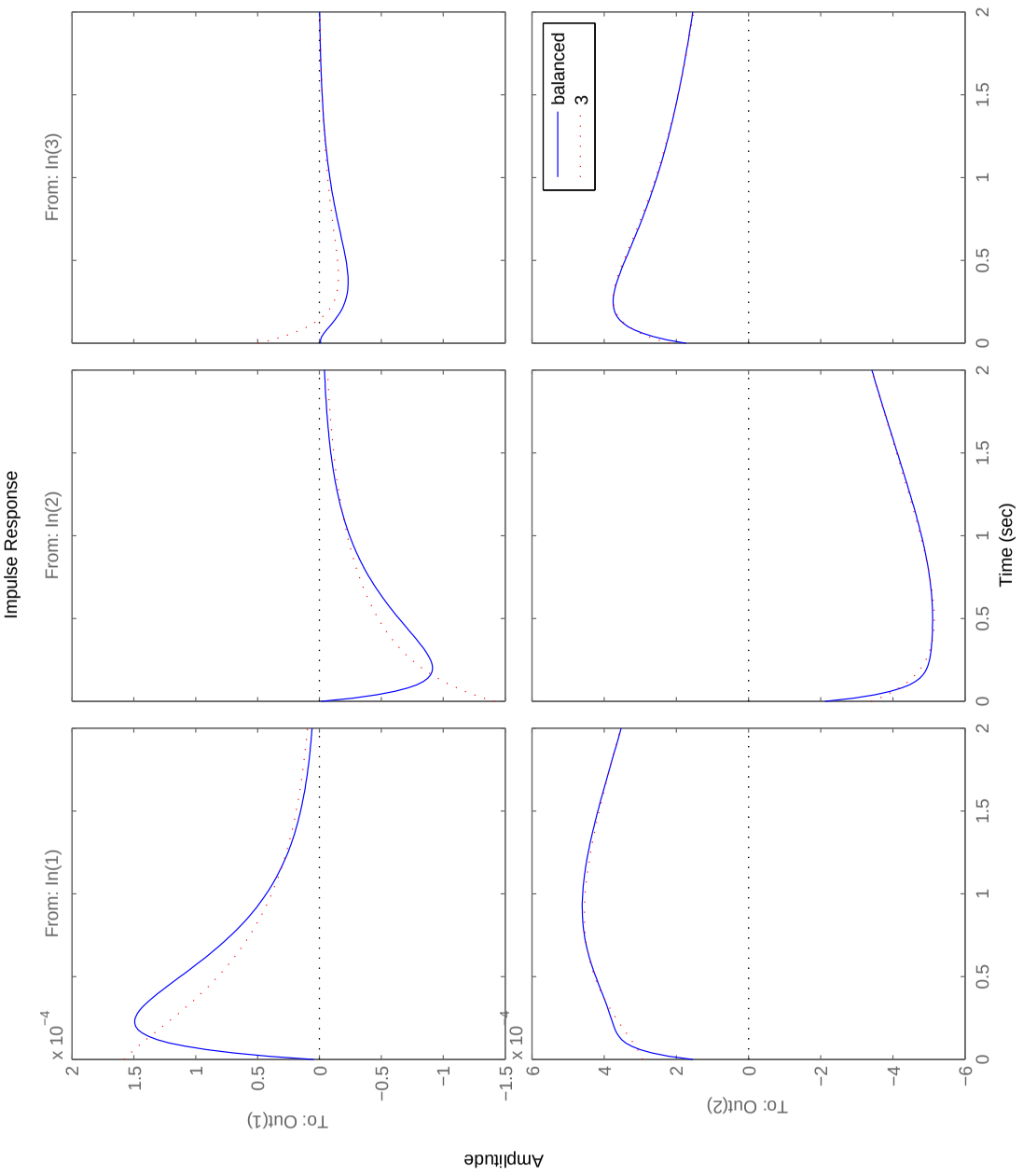
Tabel 4.2: De grenzen.



Figuur 4.2: Het originele systeem en het 5^e orde syteem met 3 inputs en 2 outputs.



Figuur 4.3: Het originele systeem en het 4^e orde syteem met 3 inputs en 2 outputs.



Figuur 4.4: Het originele systeem en het 3^e orde syteem met 3 inputs en 2 outputs.

Hoofdstuk 5

Conclusie & discussie

5.1 Conclusie

Om bepaalde fenomenen te kunnen bestuderen, is het noodzakelijk er een wiskundig model van te maken. Deze modellen kunnen soms echter te ingewikkeld zijn om bijvoorbeeld te simuleren op een computer. Daarom willen we graag zo'n model reduceren, waarbij het van groot belang is dat bepaalde eigenschappen behouden blijven. Zoals eerder genoemd zijn er meerdere methoden. In deze scriptie is er gekozen voor de methode van balanced truncation. Deze methode maakt gebruik van een transformatie-algoritme om een gebalanceerde realisatie te maken. De regelbaarheids en waarneembaarheids Gramiaan worden dan getransformeerd zodanig dat ze gelijk aan elkaar en diagonaal zijn. De waarden op de diagonaal zijn dalend geordend en worden de Hankelsinguliere waarden van het systeem genoemd. De toestanden die overeenkomen met de lagere waarden zijn minder regelbaar en waarneembaar. Modelreductie vindt dan plaats door deze af te kappen. Er gaat dan niet te veel informatie verloren. Dit is gebleken uit Stelling 3.1 waar de bovengrens van de norm van de fout van het gereduceerde systeem ten opzichte van het originele systeem gegeven is als twee maal de som van de kleinste Hankelsinguliere waarden. Deze theoretische grens betekende een geweldige doorbraak voor de systeemtheoretische modelreductie.

Deze theorie kan in de praktijk worden toegepast. Een voorbeeld hiervan was het proces van een binaire destillatiekolom. Het gegeven wiskundige model van dit proces is van orde 20. Door het bepalen van de Hankelsinguliere waarden bleek als snel dat het systeem reduceerbaar is tot de 5^e orde zonder dat er teveel informatie verloren ging. Bovendien bleek ook de theoretische grens te kloppen. Alhoewel we in deze scriptie slechts één toepassing hebben bekeken, blijkt deze methode theoretisch goed onderbouwd te zijn.

Bijlage A

Systeemeigenschappen

Een systeem heeft verschillende belangrijke eigenschappen. In deze appendix zal kort de theorie over stabiliteit, regelbaarheid en waarneemheid opgesteld worden [5, 7]. Voor de stabiliteit van differentiaalvergelijkingen bestaan verschillende concepten. Deze kunnen onderscheidden worden in stabiliteit passend bij autonome systemen (gerelateerd aan de toestandsvector) en stabiliteit passend bij systemen met inputs en outputs (waarbij de stabiliteit gedefinieerd is in termen van deze inputs en outputs). In de volgende sectie zullen we alleen het eerstegenoemde concept behandelen. Verder spelen de concepten regelbaarheid en waarneembaarheid een belangrijke rol in het ontwerpen en regelen van systemen.

A.1 Stabiliteit

Gevoelsmatig betekent stabiliteit dat de oplossingen in de buurt van het evenwichtspunt blijven en asymptotische stabiliteit betekent dat naast stabiliteit de oplossingen convergeren naar het evenwichtspunt, gegeven dat het beginpunt dicht genoeg bij dit evenwichtspunt ligt. Instabiliteit betekent dat hoe dicht we ook bij het evenwichtspunt starten er op z'n minst er één oplossing bestaat die 'wegdivergeert' van dit evenwichtspunt. De definities luiden als volgt, waarbij $||.||$ een willekeurige norm is.

Definitie A.1. *Beschouw de eerste orde differentiaalvergelijking* $\dot{x} = f(x)$ *met* $x \in \mathbb{R}^n$ *en schrijf* $x(t, x_0)$ *als de oplossing op tijdstip* t*, gegeven de beginvoorwaarde* $x(0) = x_0$*.*

- *Een vector* x^* *die voldoet aan* $f(\bar{x}) = 0$ *heet een* ***evenwichtspunt****.*
- *Een evenwichtspunt* x^* *heet* ***stabiel*** *indien voor elke* $\epsilon > 0$ *er een* $\delta > 0$ *bestaat zodanig dat als* $||x_0 - x^*|| < \delta$ *dan* $||x(t, x_0) - x^*|| < \epsilon$ *voor alle* $t \geq 0$*.*
- *Een evenwichtspunt* x^* *heet* ***asymptotisch stabiel*** *indien deze stabiel is en er bovendien een* $\delta_1 > 0$ *bestaat zodanig dat* $\lim_{t\to\infty} ||x(t, x_0) - x^*|| = 0$*, gegeven dat* $||x_0 - x^*|| < \delta_1$*.*
- *Een evenwichtspunt* x^* *is* ***instabiel*** *als deze niet stabiel is.*

Voor de lineaire differentiaalvergelijking $\dot{x} = Ax$ nemen we aan dat het evenwichtspunt de oorsprong $x^* = 0$ is, alhoewel er anderen zullen zijn als $\det(A)$=0. We noemen de lineaire

differentiaalvergelijking $\dot{x} = Ax$ of zelfs de $n \times n$ matrix A stabiel, asymptotisch stabiel of instabiel als het beginpunt $x^* = 0$, gezien als het evenwichtspunt stabiel, asymptotisch stabiel of onstabiel is, respectievelijk.

Stelling A.2. *Gegeven de differentiaalvergelijking $\dot{x} = Ax$ waarbij A een $n \times n$ matrix is met k verschillende eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, implicerend dat $k \leq n$.*

- *De oorsprong $x^* = 0$ is asymptotisch stabiel d.e.s.d.a. $\mathcal{R}e(\lambda_i) < 0$ voor alle $i = 1, \ldots, k$.*
- *De oorsprong $x^* = 0$ is stabiel d.e.s.d.a. $\mathcal{R}e(\lambda_i) \leq 0$ voor alle $i = 1, \ldots, k$ en voor alle eigenwaarden λ_i op de imaginaire as.*
- *De oorsprong $x^* = 0$ is instabiel d.e.s.d.a. $\mathcal{R}e(\lambda_i) > 0$ voor sommige $i = 1, \ldots, k$ of als er een imginaire eigenwaarde λ_i bestaat voor welke de algebraïsche[6] multipliciteit groter is dan de geometrische[7] multipliciteit.*

■

A.2 Regelbaarheid

Beschouw systemen gegeven door de volgende differentiaalvergelijkingen

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & Ax(t) + Bu(t), \\ y(t) & = & Cx(t) + Du(t), \end{array} \tag{A.1}$$

met $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ en $D \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Een systeem is regelebaar als er een willekeurige toestand $x_1 \in \mathbb{R}^n$ bereikt kan worden, startend bij een willekeurige toestand $x_0 \in \mathbb{R}^n$ in een eindige tijd t_1 door het toepassen van een geschikte inputfunctie u. Hieronder volgt de formele definitie.

Definitie A.3. *Het systeem A.1 heet **regelbaar** indien er voor elke twee toestanden $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, er een eindige tijd $t_1 > 0$ bestaat en er een inputfunctie u bestaat zodanig dat de oplossing van A.1 voldoet aan $x(t_1, x_0, u) = x_1$.*

Regelbaarheid betekent dus dat elke toestand naar elke andere toestand gedreven kan worden door gebruik te maken van een geschikte regelaar. De volgende stelling zal wat belangrijke eigenschappen geven van regelbaarheid.

Stelling A.4. *Voor het systeem A.1 zijn de volgende uitspraken equivalent:*

(i) Het systeem is regelbaar.

(ii) De matrix

$$(B, AB, \ldots, A^{n-1}B)$$

heeft volle rang met andere woorden de rang is gelijk aan n.

(iii) Voor elke verzameling $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ van n punten in het complexe vlak, die symmetrisch is ten opzichte van de reële as, bestaat er een matrix F met een passende dimensie zodanig dat de eigenwaarden van $A + BF$ gelijk zijn aan $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$.

■

[6] De multipliciteit van λ_i als de wortel van de karakteristieke polynom $\det(\lambda I - A)$.
[7] De dimensie van de eigenruimte gekarakteriseerd door nulruimte $\ker(\lambda_i I - A)$.

A.3 Waarneembaarheid

Een systeem heet waarneembaar als de begintoestand x_0 eenduidig bepaald worden door de bekende u en y op het interval $[0, t_1]$ voor een eindige tijd $t_1 > 0$. Omdat u gegeven is, als x_0 eenmaal bekend is, kan de toestand x op het hele interval $[0, t_1]$ bepaald worden. Met andere woorden, het uitwendige gedrag van het waarneembare systeem, beperkt tot een bepaald interval met positieve lengte, bepaalt op een unieke manier de toestand op dit interval. De definitie volgt hieronder.

Definitie A.5. *Het systeem A.1 is* ***waarneembaar*** *indien er een eindige tijd $t_1 > 0$ bestaat zodanig dat voor elke inputfunctie u, uit $y(t, x_0, u) = y(t, x_1, u)$ voor alle $t \in [0, t_1]$ volgt dat $x_0 = x_1$.*

Ook voor waarneembaarheid zijn er equivalente eigenschappen.

Stelling A.6. *Voor het systeem A.1 zijn de volgende uitspraken equivalent*

(i) Het systeem is waarneembaar.

(ii) De matrix

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

heeft volle rang met andere woorden de rang is gelijk aan n.

(iii) Voor elke verzameling $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ van n punten in het complexe vlak, die symmetrisch is ten opzichte van de reële as, bestaat er een matrix G met een passende dimensie zodanig dat de eigenwaarden van $A + BG$ gelijk zijn aan $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$.

■

Bijlage B

Matlab programma's

B.1 model.m

```
%%% This is the script file MODEL.M, which defines the state space
%%% parameters (A,B,C,D) of a linear, time-invariant state space
%%% model of a binary distilation column.
%%%
%%% The file contains all physical parameters of the distillation
%%% column, together with the linearization point.
%%%

N=20;           %Number of stages including reboiler and total condenser
Nf=6;           %Location of feed stage (stages are counted from top to bottom)
Md=200;         %Nominal condenser holdup (kmol)
Mb=400;         %Nominal reboiler holdup (kmol)
M=50;           %Nominal stage holdup (kmol)
zF=0.5;         %Nominal feed composition
q=1;            %Nominal feed liquid fraction
a=2.46;         %Relative volatility
L=1090.38;      %Nominal reflux flow in the enriching section (above feed)
Vb=1575;        %Nominal boilup vapor flow in the stripping section (below feed)
F=1000;         %Nominal feed rate (kmol/hr)
V=Vb+(1-q)*F;   %Nominal vapor flow above feed (kmol/hr)
Lb=L+q*F;       %Nominal liquid flow below feed (kmol/hr)
D=V-L;          %Distillate product flow
B=Lb-Vb;        %Bottom product flow

%%% The N components of the state x define the product compositions at
%%% each stage (tray). x(1) and x(N) are the light product components in
%%% the condenser and reboiler/bottom, respectively. The state equilibrium
%%% (or nominal state) is defined as follows:

x=[0.974482 0.93948 0.885902 0.810406 0.715562 0.612204 0.611745 0.610858...
   0.609149 0.60586 0.599613 0.587766 0.566469 0.527815 0.470431 0.376221...
   0.293472 0.167825 0.114861 0.0535342];

for i=1:N
   y(i)=a*x(i)/(1+(a-1)*x(i)); %Vapor-Liquid Equilibrium in x(i)
   yl(i)=a/(1+(a-1)*x(i))^2;   %Vapor-Liquid Equilibrium linearized in x(i)
end;

%%% Now define the linearized system (A,B,C,D)
% first A
A=zeros(N,N);
A(1,1)=-(L+D)/Md; A(1,2)=V*yl(2)/Md;                                    %Condenser
for i=2:Nf-1
```

```
44      A(i,i-1)=L/M; A(i,i)=-(L+V*yl(i))/M; A(i,i+1)=V*yl(i+1)/M;          %Above feed stage
45  end;
46  A(Nf,Nf-1)=L/M; A(Nf,Nf)=-(Lb+V*yl(Nf))/M; A(Nf,Nf+1)=Vb*yl(Nf+1)/M; %At feed stage
47  for i=Nf+1:N-1
48      A(i,i-1)=Lb/M; A(i,i)=-(Lb+Vb*yl(i))/M; A(i,i+1)=Vb*yl(i+1)/M;    %Below feed stage
49  end;
50  A(N,N-1)=Lb/Mb; A(N,N)=-(Vb*yl(N)+B)/Mb;                               %Reboiler
51
52  % then B
53  B=[0 y(2)-x(1) (1-q)*(y(2)-x(1))]/Md;                                  %Condenser
54  for i=2:Nf-1
55      B=[B;[x(i-1)-x(i) y(i+1)-y(i) (1-q)*(y(i+1)-y(i))]/M];             %Above feed stage
56  end;
57  B=[B;[x(Nf-1)-x(Nf) y(Nf+1)-y(Nf) -q*x(Nf)-(1-q)*y(Nf)+zF]/M];         %At feed stage
58  for i=Nf+1:N-1
59      B=[B;[x(i-1)-x(i) y(i+1)-y(i) q*(x(i-1)-x(i))]/M];                 %Below feed stage
60  end;
61  B=[B;[x(N-1)-x(N) -y(N)+x(N) q*(x(N-1)-x(N))]/Mb];                     %Reboiler
62
63  % then C
64  C=zeros(2,N); C(1,1)=1; C(2,N)=1;
65
66  % and finally D
67  D=zeros(2,3);
```

B.2 test.m

```
1   clear all
2   close all
3   clc
4
5   % model.m maakt de matrices A,B,C & D aan die overeenkomen met het systeem
6   % dat de binaire kolomdestillatieproces voorstelt.
7   model
8
9   % pck(A,B,C,D) maakt een realisatie van de gegeven matrices.
10  G=pck(A,B,C,D);
11
12  % truncation(G,n,i) breekt het orginele systeem af van de 5e tot de 0e
13  % orde.
14  n=5;
15  i=3;
16  truncation(G,n,i)
```

B.3 truncation.m

```
1   function [] = truncation2(G,n,i)
2   %TRUNCATION geeft de hankelsinguliere waarden van het gebalanceerde systeem
3   %terug. Daarnaast plot het de impulsresponsies van het gereduceerde systeem
4   %van orde n tot i (n > i) en bepaald daarbij de H-oneindig norm van (G-G_r)
5   %en de sommatie van de hankelsinguliere waarden vanaf indes r+1.
6
7   if i<0
8       error('Het systeem kan niet met een negatieve waarde gereduceerd worden!')
9   end
10
11  %pck(A,B,C,D) maakt een realisatie van de gegeven matrices.
12  %G=pck(A,B,C,D);
13  format long;
14  %sysbal(G) maakt een gebalanceerde realisatie van de gegeven realisatie en
15  %bepaald tevens de hankelsinguliere waarden.
16  [G_b,sig]=sysbal(G,10^-17);
17  fprintf('De hankelsinguliere waarden: \n');
```

```
18  sig
19
20  % disp('de norm van het gebalanceerde systeem:')
21  % hinfnorm(G_b)
22
23  %uppck(G) pakt de realisatie weer uit in de matrices A,B,C & D.
24  [ar,br,cr,dr]=unpck(G);
25  %ss verandert het model in een 'state-space' model.
26  sys=ss(ar,br,cr,dr);
27
28  %Plot de impulseresponsie van het LTI model sys.
29  %Voor multi-input modellen, worden er onafhankelijke impulse commando's
30  %toegepast op ieder input kanaal.
31  %In figuur 1 zien we de impulsresponsie voor het volledige systeem
32  %en het balanceerde systeem t/m tijd t=4.
33  figure(1)
34  impulse(sys,4)
35  hold on
36  [ab,bb,cb,db]=unpck(G_b);
37  sys=ss(ab,bb,cb,db);
38  impulse(sys,'r-.',4)
39  legend('original','balanced')
40  hold off
41
42  %In figuur 2 zijn de impulserepsonsies voor het balanceerde systeem
43  %en de afgebroken systemen geplot.
44  f=1;
45  for j=n:-1:i
46      f = f+1;
47      figure(f)
48      impulse(sys,'r',2)
49      hold on
50
51      fprintf('*************************************************** \n')
52      %strunc(sys,ord) breekt de dimensie van het systeem af t/m de orde
53      %ORD door het weglaten van de rijen en kolommen van de
54      %toestandsmatrices.
55      G_r=strunc(G_b,j);
56      format short
57      fprintf('Het gereduceerde systeem tot de %de orde: \n ',j)
58      seesys(G_r)
59      format long
60
61      [ar,br,cr,dr]=unpck(G_r);
62      sys=ss(ar,br,cr,dr);
63      %Plot de impulseresponsie van het afgebroken systeem.
64      impulse(sys,'b:',2)
65      hold on
66
67      % l is de lengte van de vector met de hankelsinguliere waarden.
68      [l,ignore]=size(sig);
69      % s is de hankelsinguliere waarde op de (j+1)e positie.
70      s=sig(j+1);
71      % Hier tellen we alle hankelsinguliere waarden van de de (j+1)e positie
72      % bij elkaar op t/m het laatste element in de vector.
73      for k=(j+2):l
74          s = s+sig(k);
75      end
76
77      fprintf('twee maal de sommatie van de laatste hankelsinguliere waarden')
78      fprintf(' vanaf r=%d : %f \n',j+1,2*s);
79      fprintf('twee maal de %de hankelsinguliere waarde: %f \n',j+1,2*sig(j+1))
80
81      fprintf('norm G-G_r: ')
82      G_r=pck(ar,br,cr,dr);
83      e = fout(G_b,G_r,2*s*10^-1);
```

```
84      fprintf('%f \n',e(1,2)) %print de bovengrens
85      fprintf('************************************************** \n')
86
87  end
88
89  figure(2)
90  legend('balanced','5');
91  figure(3)
92  legend('balanced','4');
93  figure(4)
94  legend('balanced','3');
```

B.4 fout.m

```
1   function[e] = fout(Gb,Gr,tol)
2   % FOUT berekent Gb-Gr in de zin van overdrachtsmatrices
3   % en geeft vervolgens de bovengrens van de H-norm terug.
4
5   % Inputparameters
6   % Gb het gebalanceerde systeem.
7   % Gr het gereduceerde systeem.
8
9   % Maakt van de realisatie weer de matrices A,B,C en D.
10  [Ab,Bb,Cb,Db] = unpck(Gb);
11  [Ar,Br,Cr,Dr] = unpck(Gr);
12
13  % Bepaalt het aantal nullen waarmee de fout-overdrachtsmatrix gevuld dient
14  % te worden.
15  [Abm Abn] = size(Ab);
16  [Arm Arn] = size(Ar);
17
18  zeros12 = zeros(Arm,Abn);
19  zeros21 = zeros(Abm,Arn);
20
21  % De fout-overdrachtsmatrix
22  Ae = [Ar,zeros12;zeros21,Ab];
23  Be = [Br;Bb];
24  Ce = [-Cr,Cb];
25  De = Db-Dr;
26
27  E11 = pck(Ae,Be,Ce,De);
28
29  %hinfnorm geeft voor 'SYSTEM' matrices als OUT een 1x3 rij vector, met de
30  %ondergrens, bovengrens en de frequency waar de ondergrens optreedt.
31  e = hinfnorm(E11,tol);
```

B.5 hankel.m

Dit programma maakt een plot van de Hankelsinguliere waarden, die op het titelblad te zien is.

```
1   % model.m maakt de matrices A,B,C & D aan die overeenkomen met het systeem
2   % dat de binaire kolomdestillatieproces voorstelt.
3   model;
4   % ss(A,B,C,D) maakt toestands-ruimte model van de gegeven matrices.
5   sys=ss(A,B,C,D);
6   % hsvplot(sys) plot de hankelsinguliere waarden van het LTI systeem sys,
7   % waaarbij de stabiele modes blauw zijn (en de onstabiele modes rood).
8   hsvplot(sys)
9   title('Hankelsinguliere waarden van het model');
10  xlabel('Aantal toestanden')
11  ylabel('Singuliere waarden (\sigma_i)')
12  line([5.5 5.5],[0 1.05e-3],'Color','r','linestyle','--','linewidth',1)
13  text(2.1,1.1e-3,'5 dominante toestanden.')
```

Bibliografie

[1] ECN. Energie encyclopedie. `http://www.energie.nl/index2.html?ency/index.html`, Juni 2009.

[2] S.H. Friedberg, A.J. Insel, and L.E. Spence. *Linear Algebra*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, New Jersey, 2003.

[3] B.C. Moore. Principal component analysis in linear systems: controlability, observability, and model reduction. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 26(2):17–32, 1981.

[4] C.T. Mullis and R.A. Roberts. Synthesis of minimum roundoff noise fixed point digital filter. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, 23:551–562, 1976.

[5] G.J. Olsder and J.W. van der Woude. *Mathematical Systems Theory*. VSSD, Delft, third edition, 2005.

[6] L. Pernebo and L.M. Silverman. Model reduction via balanced state space representation. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-27(2):382–387, 1987.

[7] A.J. van der Schaft. Optimalisering van regelsystemen. Collegedictaat, Rijksuniversiteit Groningen, 2008-2009.

[8] H. van Essen. Een literatuurstudie naar modelreductie methoden. `http://alexandria.tue.nl/repository/books/627536.pdf`, April 1991.

[9] S. Weiland. Course model reduction - 2005 and course model reduction 2009. `http://w3.ele.tue.nl/nl/cs/education/courses/model_reduction/`, Juni 2009.

[10] K. Zhou and J.C. Doyle. *Essentials of robust control*. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, New Jersey, 1998.