955
2003
005

Realistisch Breukenonderwijs

Een kritische beschouwing van een methode op basis van een ACT-R model

Hendria van der Haar

968

Realitisch Breukenonderwijs

Een kritische beschouwing van een methode op basis van een ACT-R model

Hendria van der Haar
0998605
5 februari 2003

begeleider: Niels Taatgen

Kunstmatige Intelligentie
Rijksuniversiteit Groningen

Inhoudsopgave

1 Realistisch rekenonderwijs 9
- 1.1 Het ontstaan van realistisch rekenonderwijs . . . 9
- 1.2 Realistisch rekenonderwijs nader bekeken . . . 10
  - 1.2.1 Begeleide herontdekking en progressieve mathematisatie . 11
  - 1.2.2 Didactische fenomenologie . . . 12
  - 1.2.3 Zelf-ontwikkelde modellen . . . 13
  - 1.2.4 De karakteristieken van realistisch rekenonderwijs . . . 14
- 1.3 Resultaten van realistisch breukenonderwijs. . . . 15

2 Onderzoeksvraag en hypothesen 17

3 De Act-R theorie 21
- 3.1 Korte beschrijving van de ACT-R theorie van leren . . . 21
  - 3.1.1 De belangrijkste kenmerken van ACT* . . . 23
  - 3.1.2 Van ACT* naar ACT-R: de belangrijkste wijzigingen . . . 24
  - 3.1.3 ACT-R in zijn huidige vorm . . . 25
- 3.2 ACT-R 5.0 nader bekeken . . . 26
  - 3.2.1 Expected gain . . . 26
  - 3.2.2 Kenniscompilatie . . . 27
  - 3.2.3 beperkingen van het werkgeheugen . . . 29
- 3.3 ACT-R en onderwijs: intelligente tutors . . . 31
  - 3.3.1 het ontwikkelen van een op ACT-R gebaseerde tutor . . . 32
- 3.4 motivatie van het gebruik van ACT-R in een onderzoek naar realistisch breukenonderwijs . . . 36

4 Onderzoeksopzet 38
- 4.1 Keuze voor een onorthodoxe manier van modelleren . . . 38
- 4.2 Keuze voor het gebruik van de methode *Pluspunt* . . . 39
- 4.3 De afbakening van het onderzoeksdomein . . . 40
  - 4.3.1 De kerndoelen voor het basisonderwijs - breuken . . . 40
  - 4.3.2 De keuze voor het vergelijken en optellen van breuken . . . 41
  - 4.3.3 De keuze voor het modelleren van groep 7 . . . 42
- 4.4 Ontwikkeling van het model . . . 42

5 De realistische onderwijsmethode voor het optellen van breuken 44
- 5.1 De theorie : de Proeve deel 3A - Breuken . . . 44

5.1.1 De algemene didactiek ten aanzien van het breukenonderwijs . . . 44
5.1.2 De didactiek ten aanzien van optellen, aftrekken en vergelijken . . . 46
5.1.3 Samenvatting van de Proeve-didactiek ten aanzien van het optellen van breuken . . . 48
5.2 De interpretatie: *Pluspunt* . . . 48
5.2.1 Algemene didactiek van *Pluspunt* . . . 48
5.2.2 De leerlijn voor breuken . . . 49
5.2.3 Het gebruik van modellen in *Pluspunt* . . . 53
5.2.4 Het optellen van breuken in *Pluspunt* . . . 56
5.2.5 Sommen en modellen . . . 57
5.3 De *Proeve* en *Pluspunt* naast elkaar gelegd . . . 58
5.4 De praktijk: een test met kinderen . . . 59
5.4.1 Het experiment . . . 60
5.4.2 Verwachte resultaten . . . 61
5.4.3 Resultaten . . . 62

6 Het model 68
6.1 de modellen . . . 68
6.2 De strategieën . . . 70
6.2.1 Algemene strategieën . . . 70
6.2.2 Het aanvullen van breuken tot 1 . . . 71
6.2.3 Het optellen van gelijknamige breuken . . . 72
6.2.4 Het vergelijken van breuken . . . 73
6.2.5 optellen van ongelijknamige breuken . . . 75
6.3 De benodigde voorkennis . . . 77

7 Opzet van het experiment en hypothesen 78
7.1 Verschillende versies van het model . . . 78
7.2 De gebruikte sommen . . . 79
7.3 Hypothesen voor het leergedrag van het model . . . 81

8 Resultaten 83
8.1 Resultaten voor het pluspunt-feedback model . . . 83
8.1.1 Het aanvullen van breuken tot 1 . . . 83
8.1.2 Het optellen van gelijknamige breuken . . . 87
8.1.3 Het vergelijken van breuken . . . 90
8.1.4 Optellen van ongelijknamige breuken . . . 93
8.2 Resultaten voor het altijd-feedback model . . . 96
8.2.1 Het aanvullen tot 1 en het vergelijken van breuken . . . 96
8.2.2 Het optellen van gelijknamige breuken . . . 98
8.2.3 Het optellen van ongelijknamige breuken. . . . 102
8.3 Resultaten van het feedback-methode model . . . 107

9 conclusies en discussie 112

Inleiding

Het leren van breuken is een van de grootste struikelblokken in het rekenonderwijs op de basisschool. Breukenonderwijs wordt zelfs zo moeilijk gevonden dat er geregeld stemmen opgaan om het onderwijs ervan op basisscholen maar helemaal af te schaffen.

In de jaren '80 en '90 heeft in Nederland een onderwijshervorming op het gebied van rekenen plaatsgehad. Traditionele methoden werden in die tijd op het overgrote deel van de scholen vervangen door zogenaamde realistische methoden. De realistische benadering heeft als uitgangspunt dat de wiskunde vanuit de werkelijkheid benaderd dient te worden, en dat kinderen door de wiskunde zelf opnieuw te ontdekken en er actief mee bezig te zijn een beter begrip van de materie zouden creëren.

Dit uitgangspunt wordt ondersteund door enkele studies waarvan de conclusies waren dat de realistische benadering inderdaad tot een beter wiskundig begrip leidt, en daarmee tot betere resultaten, ook op het gebied van breuken. Toch blijkt uit de Periodieke Peilingen van het Onderwijsniveau, die eens in de 5 jaar worden gehouden, dat de resultaten op het gebied van breuken, ondanks het enorm gestegen gebruik van realistische methoden, nagenoeg hetzelfde zijn gebleven.

De oorzaak hiervan kan er ofwel in liggen dat realistisch rekenonderwijs, en met name realistisch breukenonderwijs, toch niet zo'n goede methode blijkt te zijn, ofwel dat leraren en tekstboeken de realistische benadering niet goed weten over te brengen. De werkelijke oorzaak is echter moeilijk te achterhalen.

In de cognitieve psychologie, één van de deelgebieden van de kunstmatige intelligentie, wordt het denken van de mens onder andere bestudeerd door het maken van cognitieve modellen in een architectuur voor intelligentie. Een architectuur van intelligentie is een raamwerk waarbinnen cognitieve processen te implementeren zijn (zoals een programmeertaal een architectuur is waarbinnen rekenprocessen geïmplementeerd kunnen worden). Een dergelijke architectuur is gebaseerd op een theorie over hoe cognitieve processen eruit zien, oftewel een theorie over wat er in de hersenen gebeurt tijdens cognitieve processen. Als je een aannemelijke cognitieve theorie hebt, en je hebt een architectuur waarbinnen je cognitieve processen kunt implementeren, dan kun je op grond van je implementatie ook bepaalde cognitieve fenomenen verklaren. Als je een bepaalde cognitieve taak modelleert, bijvoorbeeld het leren van het maken van optelsommen, en je model vertoont hetzelfde leergedrag als een mens en maakt dezelfde fouten, dan kun je het evalueren van het model vergelijken met het 'in het hoofd van een mens kijken'. Je kunt precies achterhalen welke regels er ten grondslag liggen aan bepaalde fouten, en daarmee kun je het maken van die

fouten ook verklaren vanuit je theorie.

Een voorbeeld van zo'n architectuur voor intelligentie is ACT-R. ACT-R heeft niet alleen zijn nut bewezen in het modelleren en verklaren van cognitieve processen, het heeft daarnaast ook zijn bruikbaarheid voor het onderwijs aangetoond, en wel in de ontwikkeling van intelligente tutors.

Een intelligente tutor is een computerondersteund leermiddel. Het houdt bij wat de leerling aan het doen is, en past zijn instructies aan aan de kennis van de individuele leerling. Hierdoor krijgt elke leerling onderwijs "op maat". Een ACT-R tutor is gebaseerd op een cognitief model dat zowel de declaratieve (feiten-) kennis als de procedurele (regel-) kennis bezit die de leerling uiteindelijk ook moet bezitten. Dit model helpt het computerprogramma bij het volgen en begrijpen wat een leerling precies doet om een cognitieve taak (bijvoorbeeld een wiskundig probleem) op te lossen. Het kijkt als het ware met de leerling mee. Hierdoor kan het de leerling op het juiste moment aanwijzingen geven en vertellen waar de eventuele denkfout van de leerling zit. Ook kan het de leerling op tijd de goede richting insturen als deze een verkeerde oplossingsmethode lijkt te gaan volgen.

Aangezien de resultaten van onderzoek naar realistisch breukenonderwijs zoveel verschillen van de resultaten in de praktijk, is het mischien goed om het probleem van realistisch breukenonderwijs eens op een andere manier te benaderen. In mijn onderzoek wil ik dat doen vanuit een cognitief model. Op deze manier hoop ik in staat te zijn iets te kunnen zeggen over de interne leerprocessen die plaatshebben als kinderen leren rekenen met breuken volgens een realistische benadering. Door als het ware te kunnen 'meekijken' in het hoofd van een kind, is het misschien mogelijk een verklaring te geven voor het slechte presteren van kinderen die volgens de realistische methode les hebben gekregen. Daarnaast kan ik op grond van het model een voorspelling doen over het nut dat een eventuele tutor zou kunnen hebben voor het correct leren begrijpen van en rekenen met breuken.

Ik heb hierbij gebruik gemaakt van een specifieke realistische rekenmethode, die op veel basisscholen wordt gebruikt. Dit stelt mij in staat de oorzaak van het falen van realistisch breukenonderwijs niet alleen te zoeken in realistisch breukenonderwijs zelf, maar ook in de manier waarop dit onderwijs in tekstboeken wordt aangeboden. Van deze methode, *Pluspunt*, heb ik ten eerste geanalyseerd in hoeverre de auteurs erin geslaagd zijn een goede interpretatie van realistisch breukenonderwijs te realiseren. Daarnaast heb ik het leerproces van een deel van het breukencurriculum zoals het wordt aangeboden in *Pluspunt* gemodelleerd in de architectuur voor intelligentie ACT-R. Dit model stelt mij in staat iets te zeggen over het interne leerproces dat het gevolg is van deze leermethode. Aan de hand van de resultaten van het model kan ik een (gedeeltelijke) verklaring geven voor het uitblijven van de verwachte resultaten van realistisch breukenonderwijs in het algemeen, en voor de methode *Pluspunt* in het bijzonder, en kan ik een voorspelling doen over het nut dat een eventuele tutor op het gebied van realistisch breukenonderwijs zou kunnen hebben.

Hoofdstuk 1

Realistisch rekenonderwijs

1.1 Het ontstaan van realistisch rekenonderwijs

In zijn boek 'Innumeracy' (ongecijferdheid) heeft John Allen Paulos het over 'het onvermogen om op een gemakkelijke manier om te gaan met de fundamentele begrippen van getallen en kans'. (Paulos, 1988). Deze 'ongecijferdheid' lijkt grote delen van de bevolking in westerse landen te plagen (Dehaene, 1997). Volgens Dehaene zou dit voor een groot deel veroorzaakt worden door het westerse onderwijssysteem. In dit systeem wordt veel te veel nadruk gelegd op het aanleren van wiskundige mechanismen, terwijl er nauwelijks aandacht besteed wordt aan het leggen van verbanden tussen deze mechanismen en hun betekenis. Sterker nog, informeel, intuïtief begrip dat kinderen hebben van wiskunde en getallen (zoals het op de vingers tellen) wordt vaak actief afgeleerd. Volgens Dehaene zou 'ongenummerdheid' bedwongen kunnen worden door de focus in het onderwijs te verleggen van het leren van rekenkundige mechanismen naar het creëren van een wiskundige intuïtie.

In Nederland is begin jaren zeventig een onderwijsmethode ontwikkeld waarin bovengenoemde ideeën een belangrijke rol spelen. Deze methode wordt realistisch rekenonderwijs genoemd en is ontwikkeld door het Instituut ter Ontwikkeling van Wiskunde Onderwijs (IOWO) onder leiding van Hans Freudenthal. (Gravemeijer, 1994). Dit instituut is opgericht om een alternatief te vinden voor de in de jaren zestig in de Verenigde Staten ontwikkelde Nieuwe Wiskunde methode. Deze methode werd in Nederland zeer sceptisch ontvangen.

Deze Nieuwe Wiskunde methode was gericht op structuur, coherentie en begrip in plaats van op 'practice and drill', zoals in vroegere methoden. Het bezwaar hiertegen was dat de wiskunde in deze benadering werd gezien als een gesloten systeem, zodat structuur, coherentie en begrip alleen binnen dit systeem werden geformuleerd en er nergens verbanden werden gelegd met de echte wereld. (Streefland, 1988).

Het realistisch rekenonderwijs probeert de wiskunde op een natuurlijke manier te benaderen met het doel een diepgaander begrip van de stof te creëren. Door het historisch leerproces te doorlopen zullen kinderen een intuïtief, op de werkelijkheid gebaseerd begrip van wiskunde krijgen. Breuken bijvoorbeeld zijn waarschijnlijk historisch niet ontwikkeld als een abstract concept, maar op een realistische manier, door het delen van een brood of het breken van een bord.

Deze benadering komt tot uiting in het stimuleren van kinderen om hun eigen symbolisaties, schema's en modellen te bouwen, begeleid door de leraar. Er ligt dan ook een grote nadruk op interactiviteit. Door hun ideeën over een wiskundig concept uit te leggen aan andere kinderen en aan de leraar en door het beredeneren en bediscussiëren of deze ideeën correct zijn zullen kinderen een dieper inzicht in het concept krijgen.

Ook wordt geprobeerd van wiskunde een coherent geheel te maken, door verschillende leerlijnen te verweven. Voor veel kinderen die op een traditionelen manier les hadden gekregen ontbrak een dergelijke coherentie in de wiskunde. Zo zagen veel kinderen bijvoorbeeld de breuk als verhouding en de breuk als rationeel getal niet als twee aspecten van hetzelfde mathematische concept, maar als twee geheel gescheiden begrippen. Door het verweven van de verschillende leerlijnen wordt er vanaf het begin gewerkt aan een compleet beeld van mathematische concepten en kunnen dergelijke foute denkbeelden voorkomen worden.

In de volgende paragraaf zal ik dieper ingaan op de eigenschappen van realistisch rekenonderwijs en de achterliggende theorieën.

1.2 Realistisch rekenonderwijs nader bekeken

In realistisch rekenonderwijs spelen drie begrippen een belangrijke rol, te weten de 'begeleide herontdekking en progressieve mathematisatie', de 'didactische fenomenologie' en de 'zelf ontwikkelde modellen'. Hiernaast wordt ook de niveautheorie van Van Hiele gebruikt.(Streefland, 1988; Zulkardi, 1999; Gravemeijer, 1994).

In het realistisch rekenonderwijs worden bovenstaande theorieën verweven. De wiskunde moet volgens de theorie van begeleide herontdekking opnieuw 'ontdekt' worden door leerlingen. Het leerproces zal worden begonnen op een heel concreet, basaal niveau dat aansluit bij het denkniveau van de leerlingen op dat moment, zoals Van Hiele op basis van zijn niveau-theorie adviseert. Tijdens dit leerproces zullen kinderen hun eigen modellen voor wiskundige concepten ontwikkelen (zelf ontwikkelde modellen). Dit proces kan gestuurd worden door het kiezen van opgaven die het gebruik en het ontwikkelen van dergelijke methoden stimuleren (didactische fenomenologie). Vanuit een op de realiteit gebaseerd begrip van de wiskunde zal ook een formeler begrip van de wiskunde ontstaan. Dit wordt door Freudenthal verticale mathematisatie genoemd. Via verticale mathematisatie komen kinderen op het tweede denkniveau zoals beschreven door Van Hiele. Dit uit zich ook in abstractere vorm van gebruikte modellen.

Bovenstaande is uiteraard slechts een korte schets van de manier waarop de verschillende theorieën binnen het realistisch rekenonderwijs met elkaar verweven zijn. Er zijn op uiteraard nog meer, subtielere, verbanden te vinden tussen de verschillende theorieën, bijvoorbeeld tussen Van Hieles niveautheorie en progressieve mathematisatie. In de volgende paragrafen zal ik dieper ingaan op de kenmerken van de afzonderlijke theorieën. Ik hoop dat bij het lezen van de volgende paragrafen het hierboven geschetste verband inzicht kan bieden in de manier waarop deze theorieën samenkomen in het realistisch rekenonderwijs.

1.2.1 Begeleide herontdekking en progressieve mathematisatie

Het begrip 'mathematisatie' is geïntroduceerd door Freudenthal en beschrijft een ordende activiteit. Dit kan ofwel het volgens wiskundige patronen ordenen van een zaak uit de realiteit zijn teneinde wiskundige problemen in de werkelijkheid op te kunnen lossen ofwel het ordenen van een mathematisch concept om het aan te passen aan nieuwe ideeën, resultaten, een beter begrip, et cetera. (Freudenthal, 1971).

Treffers maakt in zijn theorie een onderscheid tussen horizontale en verticale mathematisatie (Gravemeijer, 1994). Horizontale mathematisatie beschrijft de eerste soort mathematisatie zoals beschreven door Freudenthal, nl. het organiseren van de realiteit volgens wiskundige patronen. Hierbij wordt de grens tussen wiskunde en werkelijkheid overschreden, hetgeen zal leiden tot wiskundig inzicht in een breed perspectief. Verticale mathematisatie betreft de voortgang die binnen het systeem van de wiskunde zelf wordt gemaakt. Zo zal een verdelingssom waarschijnlijk eerst alleen in een context kunnen worden gemaakt. Bijvoorbeeld: "Moeder heeft 10 snoepjes en geeft ze aan Kees en Miep. Zij verdelen ze eerlijk. Hoeveel krijgt elk?" Later zullen kinderen dit soort contexten niet meer nodig hebben en de som ook op kunnen lossen als deze op een formele manier wordt aangeboden: "$10 : 2 = ..?$".

Het belangrijkste onderscheid tussen realistisch rekenonderwijs en traditionele methoden vindt men in de benadering van de wiskunde. In traditionele methoden wordt wiskunde gezien als een kant-en-klaar systeem met een algemene toepasbaarheid en bestaat het wiskundeonderwijs uit het vertalen van wiskundige begrippen in toepasbare procedures en het leren toepassen van deze mechanismen. In de realistische benadering daarentegen, wordt wiskunde gezien als een menselijke activiteit die resulteert in een wiskundig product. Wiskunde leer je door het te doen, en de beste manier van leren is het zelf opnieuw ontdekken van wiskundige principes. Door dit proces te begeleiden wordt het gegarandeerd en verkort. Dit is het principe van begeleide herontdekking.

Door het herontdekken van de wiskunde wordt voorkomen dat het onderwijs op een te hoog abstractieniveau wordt gestart. In de niveau-theorie van Van Hiele wordt beschreven hoe tijdens een leerproces je niveau van denken en daarmee je referentiekader verandert. Het feit dat leerlingen en leraar niet op hetzelfde denkniveau zitten leidt tot een hoop onbegrip aangezien zij over dezelfde onderwerpen praten zonder dat zij zich bewust zijn van de verschillende referentiekaders waarbinnen zij praten. (Van Hiele, 1973).

Van Hiele onderscheidt drie niveaus van leren, namelijk

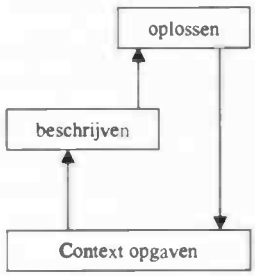
- het grond niveau
- het eerste denkniveau
- het tweede denkniveau.

Op het grondniveau hebben kinderen nog geen relationeel raamwerk. Een dergelijk raamwerk kan echter ontstaan door het verkennen van een onderwerp op het grondniveau. Als dit gebeurt, heeft het kind het eerste denkniveau bereikt. Wanneer een kind gaat nadenken over processen die op het eerste niveau plaatsvinden, is het tweede niveau bereikt.

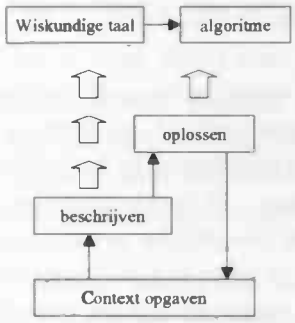
Wat zij hiermee precies bedoelen wordt verduidelijkt aan de hand van een voorbeeld over getalbegrip op verschillende niveaus zoals dat door de Van Hieles zelf wordt gegeven (Van Hiele, 1973, p.182-183)

- Op het grondniveau zijn getallen nog gebonden aan concrete zaken zoals visuele objecten (het getal vier met het aantal hoeken in een vierkant) of een plaats in een woord-reeks ('vier' tussen 'drie' en 'vijf')
- Op het eerste denkniveau is het concept 'vier' verbonden aan abstractere relaties zoals 'twee plus twee' 'twee keer twee' en 'vijf min een'.
- Op het tweede denkniveau worden de relaties tussen getallen onderwerp van reflectie. Een kind weet dan bijvoorbeeld dat het antwoord op drie keer acht gevonden kan worden door acht bij acht en nog een keer acht op te tellen. Er wordt op dit niveau een logisch en betekenisvol systeem gecreëerd.

Het verbinden van een wiskundig concept aan concrete zaken vindt voornamelijk plaats door horizontale mathematisatie. (zie figuur 1.1)



Figuur 1.1: horizontale mathematisatie



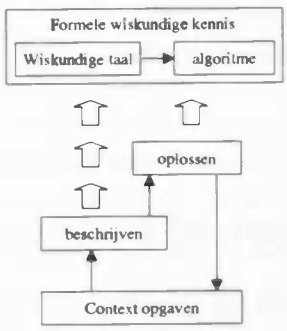
Figuur 1.2: verticale mathematisatie

Door het beschrijven van een contextueel probleem wordt de werkelijkheid zodanig beschreven dat het wiskundige probleem kan worden opgelost, en worden wiskundige begrippen verbonden aan realistische zaken. Door verticale mathematisatie wordt op een gegeven moment het eerste denkniveau bereikt (zie figuur 1.2).

Contextuele problemen worden versimpeld en geformaliseerd, waarbij een formele wiskunde-taal ontstaat. Het voortduren van horizontale en verticale mathematisatie kan uiteindelijk leiden tot het opnieuw ontdekken van wiskundige relaties. Als dit gebeurt, is het derde niveau van denken bereikt (zie figuur 1.3).

1.2.2 Didactische fenomenologie

Didactische fenomenologie is het vinden van probleemsituaties waarvan de oplossingsmethode leidt tot het genereren en generaliseren van specifieke oplossingsstrategieën.



Figuur 1.3: begeleide herontdekking

De gedachte achter deze theorie is dat wiskunde is voortgekomen uit het oplossen van alledaagse praktische problemen. Vanuit de situatie-specifieke oplossingsprocedures die hieruit voortvloeiden is door generalisatie en proceduralisatie waarschijnlijk de formele wiskunde ontstaan. Wiskunde komt voort uit menselijk activiteit en vindt zijn bron zowel als zijn toepassingsgebied dan ook in de realiteit.

Een leermethode moet realistische probleemsituaties bevatten waarvan de situatie-specifieke benadering gegeneraliseerd kan worden, en situaties die paradigmatische oplossingsprocedures kunnen oproepen. Het oplossen van dergelijke problemen helpt bij het vormen van de basis voor verticale mathematisatie.

Volgens didactische fenomenologie worden situaties waarin bepaalde wiskundige kennis wordt toegepast onderzocht op twee aspecten. Ten eerste wordt er gekeken op welk soort toepassingen geanticipeerd moet worden in de instructie, en ten tweede wordt hun invloed op een proces van voortschrijdende mathematisatie bepaald.

1.2.3 Zelf-ontwikkelde modellen

Het laatste belangrijke aspect van realistisch rekenonderwijs is dat er van kinderen verwacht wordt dat zij zelf modellen creëren die helpen bij het probleemoplossen. Hiermee wordt een brug geslagen tussen informele kennis en formele wiskunde.

In traditionele wiskundemethodes werd wiskunde vaak op een top-down manier onderwezen. Kinderen kregen modellen aangereikt die gebaseerd waren op de formele kennis van experts. Hierdoor werd er vaak geen verband gelegd met de informele kennis die leerlingen bezaten, en bleken kinderen grote problemen te hebben met het toepassen van hun kennis.

Dit probleem werd onderkend, en er is geprobeerd het te corrigeren door de modellen te laten optreden als brug tussen situationele kennis en formele wiskunde. Een bezwaar tegen deze methode is dat er nog steeds een top-down element in deze benadering zit. De formele kennis wordt voor kennisgeving aangenomen en de modellen komen voort uit deze kennis. Modellen zijn in deze context altijd diagrammen of manipulatoren.

In het realistisch onderwijs wordt een bredere definitie van het begrip model

gehandhaafd. In het kader van begeleid herontdekken worden kinderen gestimuleerd hun eigen modellen te creëren die de basis vormen voor het ontwikkelen van formele wiskundige kennis.

Op deze manier worden modellen van onderaf ontwikkeld. Ten eerste wordt een context-specifiek model *van* een situatie ontwikkeld. Later wordt het model gegeneraliseerd over een aantal situaties. Het wordt hierdoor een zelfstandige entiteit. In deze vorm kan het een basis vormen voor een model *voor* wiskundige redenatie op een formeel niveau.

Er zijn vier niveaus te onderscheiden in het ontwikkelen van een wiskundig model, nl.

- situaties. Domein specifieke, situationele kennis en strategieën worden gebruikt binnen de context van de situatie.
- model van. Modellen en strategieën refereren aan de situatie die geschetst wordt in het probleem.
- model voor. Een wiskundige kijk op strategieën overheerst de verwijzing naar de context.
- formele wiskunde. Er wordt gebruik gemaakt van conventionele procedures en notaties.

De ontwikkeling van wiskundige modellen hangt samen met verticale mathematisatie en de niveau theorie van Van Hiele. Op het grondniveau zullen kinderen gebruik maken van situatie-modellen. Naarmate er meer verticale mathematisatie plaatsvindt, en kinderen het eerste en tweede denkniveau bereiken, zullen ook steeds formelere modellen gebrukt worden.

Neem bijvoorbeeld het delen van grote getallen. Hierbij wordt het niveau van situaties geassocieerd met werkelijke activiteiten, zoals het verdelen van snoepjes onder een aantal kinderen. Een model van deze situatie is de simulatie van dit probleem op papier waarbij de deling met pen en papier wordt gemodelleerd. Op het derde niveau worden verdeelsituaties vanuit een wiskundig perspectief bekeken. Een moeilijk te delen getal wordt opgedeeld in makkelijker te verdelen porties. Bij het verdelen van 342 snoepjes onder 5 kinderen werden eerst 50 snoepjes verdeeld. Van de 292 overgebleven snoepjes werden vervolgens 250 verdeeld, en daarna 40. Op het formele niveau tenslotte wordt de standaard oplossingsmethode voor grote delingen gebruikt, de 'staartdeling'.

1.2.4 De karakteristieken van realistisch rekenonderwijs

De hierboven beschreven theorieën vormen de basis voor realistisch rekenonderwijs. Zij zijn dan ook terug te vinden in haar belangrijkste kenmerken, nl.(Streefland, 1988)

- De werkelijkheid vormt zowel de bron voor wiskundig inzicht als het toepassingsgebied van de wiskunde.
- Leerlingen spelen een actieve rol in hun eigen leerproces.

- Er wordt veel aandacht besteed aan het creëren van symbolisaties, schema's en (visuele) modellen.
- Leerlijnen worden verweven.
- Het onderwijs is in hoge mate interactief.

In mijn onderzoek zal ik met name kijken naar een onderdeel van realistisch rekenonderwijs, namelijk realistisch breukenonderwijs. De hierboven beschreven karakteristieken zijn uiteraard ook in dit aspect van het rekenonderwijs terug te vinden. Later in mijn scriptie zal ik ingaan op wat de realistisch benadering van het breukenonderwijs inhoudt. Eerst wil ik ingaan op de resultaten van deze realistische benadering voor het breukbegrip van kinderen.

1.3 Resultaten van realistisch breukenonderwijs.

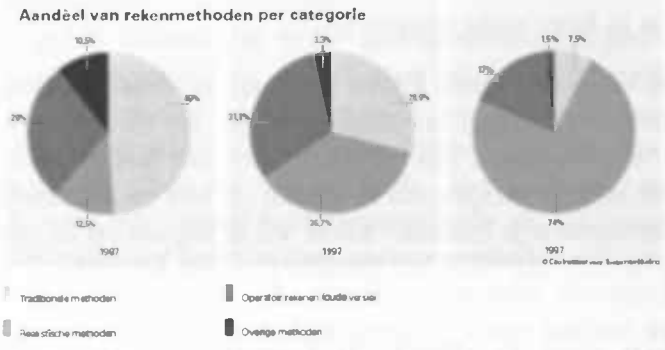
De basis voor een realistische methode voor het leren van breuken is gelegd door Leendert Streefland. Hij heeft een realistische methode voor breukenonderwijs ontwikkeld en deze ook getest. Hiervoor heeft hij twee jaar lang de vorderingen van dertien kinderen bestudeerd die leerden rekenen met breuken volgens de door hem ontwikkelde methode. Aan het eind van deze periode is er een toets afgenomen onder deze groep en onder een controlegroep, kinderen die volgens een traditionele methode breukenonderwijs hadden genoten. Uit deze toets bleek dat de experimentele groep op alle fronten beter scoorde dan de controlegroep. (Streefland, 1988).

Dit onderzoek heeft een belangrijke rol gespeeld bij het samenstellen van de 'Proeve van een nationaal programma voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. Deel 3a breuken' (Treffers, Streefland en De Moor, 1994). Deze '*Proeve*' is ontwikkeld door de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-WiskundeOnderwijs (NVORWO) en dient als basis voor alle moderne rekenmethoden. Het onderzoek van Streefland heeft dus zijn sporen nagelaten in het hedendaagse breukenonderwijs.

Het heeft er alle schijn van dat Streeflands onderzoek ook het enige onderzoek is dat naar realistisch breukenonderwijs is gedaan. Wel is er enig onderzoek gedaan naar andere aspecten van realistisch rekenonderwijs (Klein, 1998) en is de realistische benadering vergeleken met bestaande methoden (Harskamp, 1988; Harskamp & Suhle, 1995). Het is hierbij opvallend dat de gedetailleerde onderzoeken naar de effecten van realistisch rekenonderwijs aantonen dat deze manier van onderwijzen tot *betere* resultaten leidt, terwijl studies waarbij het gebruik van realistische methoden wordt vergeleken met het gebruik van traditionele methoden aantonen dat het gebruik van realistische methoden *geen* merkbaar verschil in resultaten oplevert.

Dit laatste blijkt zowel uit de onderzoeken van Harskamp en Harskamp & Suhle als uit de Periodieke peiling van het Onderwijsniveau (PPON). Vanaf 1987 peilt de nederlandse overheid elke vijf jaar het aanbod en de resultaten van het nederlandse onderwijs. Kinderen uit het hele land worden getest, en de resultaten worden gemeten naar de kerndoelen die zijn vastgesteld voor het basisonderwijs. In de kerndoelen is vastgelegd wat kinderen aan het eind van

de basisschool van elk vakgebied moeten weten, en zijn zodanig bepaald dat ze voor 75 % van de leerlingen haalbaar zouden moeten zijn.



Figuur 1.4: gebruikte methoden in het basisonderwijs

Het laatste PPON rapport, dat dateert van 1997, stelt dat wat betreft het breukenonderwijs geen van de kerndoelen in voldoende mate wordt bereikt. Dat wil zeggen dat veel minder dan de gestelde 75 % van de kinderen het gewenste niveau bereikt heeft. Hetzelfde rapport vermeldt dat in 1997 op 74 % van de basisscholen gebruik werd gemaakt van een realistische rekenmethode, tegen slechts 12,5 % tien jaar daarvoor (zie figuur 1.4). Toch is er in deze tien jaar geen vooruitgang waarneembaar inzake het breukbegrip (Balans van het reken- en wiskunde-onderwijs aan het einde van de basisschool 3, 1997). Het blijkt dat realistisch breukenonderwijs in de praktijk niet dezelfde verbeterde inzichten oplevert als die die Streefland waarneemt tijdens zijn onderzoek.

Hoofdstuk 2

Onderzoeksvraag en hypothesen

Waarom levert het toegenomen gebruik van realistische rekenmethoden in het basisonderwijs niet het toegenomen begrip van breuken op, dat je zou verwachten gezien de uitkomsten van onderzoek naar realistisch rekenonderwijs in het algemeen en Streeflands onderzoek naar realistisch breukenonderwijs in het bijzonder?

Er zijn twee aannemelijke antwoorden op deze vraag

- Realistisch breukenonderwijs blijkt al met al toch geen betere methode te zijn.
- Rekenmethoden en leraren zijn er niet in geslaagd realistisch breukenonderwijs op een goede manier aan te bieden.

Hypothese 1: realistisch breukenonderwijs is toch geen betere methode

Het is mogelijk dat de resultaten die de kinderen in Streeflands onderzoek boekten niet representatief zijn voor het gemiddelde kind in de gemiddelde klas. Hij heeft immers maar een zeer kleine groep kinderen gebruikt voor zijn onderzoek. Een gemiddelde klas zal tegenwoordig eerder uit 30 kinderen bestaan dan uit 13, zoals in Streeflands onderzoek. In een kleinere klas kan er veel meer persoonlijke aandacht worden geschonken aan de leerlingen. En zeker in een methode waarbij interactie zo belangrijk is, kan dit een behoorlijke invloed hebben.

Daarnaast heeft Streefland alleen een controle-groep gebruikt bij de eindtoets van het onderzoek. Hij gebruikt hiervoor leerlingen van andere scholen die les hebben gehad volgens verschillende traditionele methoden. Het zou echter netter zijn geweest als hij tijdens de hele leerperiode een controlegroep had gehad die onder dezelfde omstandigheden als de experimentele groep, dus met evenveel lesuren, in een even grote groep en met een even intensieve begeleiding, volgens een traditionele methode les had gekregen. Hierdoor had hij beter kunnen onderscheiden of de betere resultaten puur te danken zijn geweest aan de methode of dat ze voor een deel voortkomen uit een intensievere begeleiding met veel persoonlijke aandacht.

Naast deze aanmerkingen die specifiek voor Streeflands onderzoek gelden, is er ook een aantal algemene redenen waarom onderwijskundig onderzoek niet altijd betrouwbare resultaten oplevert. Deze redenen gaan denk ik ook op voor Streeflands onderzoek.

Ten eerste is het bekend dat in de gedragswetenschappen veel onderzoeken niet objectief zijn omdat de onderzoeker emotioneel betrokken is bij het onderzoek. Deze betrokkenheid leidt er vaak toe dat de onderzoeker (bewust of onbewust) zijn observaties zodanig interpreteert dat het experiment de uitkomsten heeft die hij graag wil dat hij heeft. Het komt zeer zelden voor dat een onderzoek naar een nieuwe onderwijsmethode als uitkomst heeft dat de onderzochte methode *niet* beter is dan andere methoden.

Daarnaast kan het feit dat een proefpersoon weet dat hij deelneemt aan een experiment invloed hebben op zijn gedrag. Deze invloed kan het experiment zelfs ongeldig maken. Het kan in het geval van Streeflands onderzoek de kinderen moeilijk ontgaan zijn dat ze deelnamen aan een experiment. De nieuwe methode, de personen van buiten de school die toetsen aflegden, lesgaven en gesprekken voerden met de kinderen zijn daar toch duidelijke aanwijzingen voor.

Dat het geven van aandacht aan en het observeren van proefpersonen een positieve invloed heeft op de prestaties van deze verbetering van de prestaties, maar het feit dat het gedrag van de proefpersonen in de gaten werd gehouden. Dit verschijnsel wordt het Hawthorne effect genoemd en zou ook heel goed op kunnen gaan voor Streeflands onderzoek. (Borg & Gall, 1973, hoofdstuk 4)

Al met al lijkt het onderzoek naar realistisch breukenonderzoek genoeg ruimte te laten voor twijfel. Misschien treden er in de praktijk wel problemen op die in een onderzoekssituatie niet zo snel naar voren komen. De resultaten van het PPON-onderzoek zouden een teken kunnen zijn dat realistisch rekenonderwijs toch geen goede onderwijsmethode is. Er kan echter ook een andere oorzaak zijn voor het verschil in de resultaten zoals ze gevonden worden na gedetailleerd onderzoek naar realistisch rekenonderwijs en de resultaten uit de praktijk: misschien zijn uitgeverijen er niet in geslaagd een goede implementatie van de realistische benaderingen te realiseren in hun methoden. En, nog waarschijnlijker, misschien zijn niet alle leraren in staat zich de in realistisch rekenonderwijs omschreven lesmethode eigen te maken.

Hypothese 2: realistisch breukenonderwijs wordt niet op een goede manier aangeboden

Gedurende de jaren '80 en '90 zijn op steeds meer scholen de traditionele rekenmethodes vervangen door realistische (Klein, 1998). Het is daarmee natuurlijk niet gezegd dat er op alle scholen via de realistische benadering wordt lesgegeven.

Ten eerste is het heel goed mogelijk dat uitgeverijen wel hun best hebben gedaan om een goede implementatie te genereren van de realistische benadering, maar hoeven ze daar niet per sé en geslaagd te zijn. Als leraren moeite kunnen hebben met de juiste interpretatie van deze benadering, kunnen uitgeverijen dat natuurlijk ook hebben.

In 1994 is het deel over breuken van de 'Proeve voor een nationaal programma van het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool'(*Proeve*) uitgekomen. De *Proeve* is een uitgave van de Nederlandse Vereniging tot Ontwikkeling van het Reken-WiskundeOnderwijs (NVORWO), die 'het platform wil zijn om de vernieuwende ontwikkelingen in ons land te bundelen en te verspreiden' en de *Proeve* 'willen aanbevelen als een leidraad voor de verdere verbetering van het reken-wiskundeonderwijs' (Proeve, p. 7).

De drie realistische rekenmethodes die in 1997 het meest werden gebruikt, te weten "Rekenen en Wiskunde", "De Wereld in Getallen" en "Pluspunt" zijn echter allemaal voor 1994, het jaar van uitgave van deel 3A (breuken) van de *Proeve* uitgegeven. De daarin uitgewerkte didactiek kan daarom voor het ontwerp van deze methoden niet gebruikt zijn. Uiteraard waren de uitgeverijen wel bekend met de algemene ideeën van de realistische benadering, en hadden ze de delen 1 en 2 van de *Proeve* wel tot hun beschikking. Daarnaast hebben zij ook gebruik kunnen maken van onderzoeken naar realistisch rekenonderwijs, en realistisch breukenonderwijs als onderdeel daarvan. Toch is het heel goed mogelijk dat op het gebied van breuken de moderne methoden afwijken van de didactiek zoals die in de *Proeve* is omschreven.

Een nog grotere kans op het onjuist aanbieden van realistisch onderwijs ligt echter bij de leraren. Uit verschillende onderzoeken is gebleken dat hervorming van het onderwijs weinig effect heeft als leraren niet 'meehervormen' (bijvoorbeeld Spencer, 1996; Elmore, 1995; Grant, Peterson & Shojgreen-Dower, 1996). Wanneer leraren een nieuwe methode vanuit hun oude referentiekader onderwijzen heeft een onderwijshervorming weinig tot geen effect. Het aanbieden van alleen een nieuw tekstboek zal dan weinig zin hebben.

In realistisch rekenonderwijs speelt de leraar een nog belangrijkere rol dan bij in het traditionele onderwijs. Immers, de leraar hoeft nu niet meer alleen de wiskundige mechanieken uit te leggen, maar moet erover met de leerlingen in discussie gaan, informele oplossingsmethoden goedkeuren, en kinderen actief stimuleren om hun eigen wiskundige modellen te creëren. (Klein, 1998). Deze belangrijke rol van leraren wordt wel de Achilleshiel van het realistisch rekenonderwijs genoemd (Gravemeijer et al., 1993).

Doel van het onderzoek

Of het nu aan de intensieve, deskundige begeleiding van de test-klas tijdens de onderzoeken ligt, aan de realistische benadering in het algemeen of aan een combinatie van beide, het is duidelijk dat realistisch rekenonderwijs tot goede resultaten *kán* leiden. Het is dan ook niet mijn bedoeling om Streeflands onderzoek over te doen. Ik zal het falen van realistisch breukenonderwijs niet proberen te verklaren vanuit de theorieën die ten grondslag liggen aan realistisch breukenonderwijs, maar vanuit de tweede hypothese: de manier waarop realistisch breukenonderwijs wordt aangeboden.

Het doel van mijn onderzoek is ten eerste om realistisch breukenonderwijs zoals het wordt aangeboden in een moderne realistische methode nader te beschouwen. Ik hoop hierbij iets te kunnen zeggen over de realisatie van de realistische benadering in deze methode. Daarnaast hoop ik door het modelleren van het leerproces zoals het wordt aangeboden in deze methode meer te kunnen

zeggen over het leerproces volgens de realistische benadering in het algemeen. Tenslotte hoop ik iets te kunnen zeggen over de rol van een leraar bij realistisch breukenonderwijs, en het nut dat een eventuele tutor zou kunnen hebben.

Hiervoor zal ik een deel van het breukenonderwijs zoals het wordt aangeboden in een veelgebruikte moderne methode, *Pluspunt*, nauwkeurig bekijken, en hoop ik antwoord te kunnen geven op de volgende vragen:

1. **Komt de realistische benadering goed tot zijn recht in deze methode?**
   Hiervoor zal ik het leerproces dat wordt aangeboden in de onderwijsmethode vergelijken met het ontwerp voor de implementatie van de realistische benadering zoals die wordt gegeven in de *Proeve*.

2. **Zijn er in de onderwijsmethode verklaringen te vinden voor het uitblijven van de verwachte resultaten?**
   Door het leerproces zoals het wordt aangeboden in *Pluspunt* nauwkeurig te modelleren in de architectuur voor intelligentie ACT-R hoop ik iets te kunnen zeggen over de geschiktheid van de methode om te leren rekenen met breuken. Door het leerproces op een hoger niveau te bekijken komen er misschien dingen naar voren die in een beschrijvend onderzoek met een test-klas niet direct opgemerkt worden.

3. **Als dergelijke verklaringen gevonden worden, gelden die dan ook voor realistisch breukenonderwijs in het algemeen?**
   Als de oorzaak van het beperkte succes van realistisch breukenonderwijs inderdaad (deels) zou liggen aan de manier waarop het wordt aangeboden in een realistische methode, ligt deze oorzaak dan specifiek in de onderzochte methode, of is zij intrinsiek aan realistisch breukenonderwijs in het algemeen?

4. **zou het gebruik van een tutor kunnen leiden tot een groter succes van realistisch breukenonderwijs?**
   In mijn onderzoek wil ik de effecten van het geven van directe feedback proberen te meten. Aan de hand van deze meting, en aan de hand van een analyse van de taken van een leraar en in hoeverre deze overgenomen of ondersteund kunnen worden in een tutor, hoop ik iets te kunnen zeggen over het nut dat een tutor zou kunnen hebben voor het realistische breukenonderwijs.

De kern van het onderzoek zal liggen in het ontwikkelen van een ACT-R model. In het volgende hoofdstuk zal ik een overzicht geven van de belangrijkste kenmerken van de ACT-R theorie, en zal ik ingaan op de manier waarop ACT-R gebruikt wordt voor de ontwikkeling van tutors.

Hoofdstuk 3

De Act-R theorie

In dit hoofdstuk wil ik kort ingaan op de ACT-R theorie. In de eerste paragraaf geef ik een overzicht van wat de ACT-R theorie inhoudt, zonder in te gaan op details. In de volgende paragraaf zal ik de eigenschappen van ACT-R die van extra belang zijn voor mijn onderzoek in gedetailleerdere vorm beschrijven. Tenslotte zal ik ingaan op de rol die ACT-R speelt in het onderwijs, nl. als basis voor intelligente tutors.

3.1 Korte beschrijving van de ACT-R theorie van leren

De Act-R theorie behandelt de realisatie van cognitieve vaardigheden. Het is niet alleen een theorie over hoe mensen leren, maar ook een architectuur van intelligentie, wat het mogelijk maakt om implementaties van de theorie te maken, waarbij het leren van cognitieve vaardigheden ook daadwerkelijk gemodelleerd kan worden.

De ACT-R theorie is ontstaan uit de ACT* theorie. Deze theorie is continu herzien en verbeterd en heeft uiteindelijk geleid tot de huidige versie, ACT-R 5.0. Het is opvallend dat enkele van de recentste veranderingen die in ACT-R 5.0 zijn doorgevoerd voortkomen uit oorspronkelijke ideeën uit ACT*, die indertijd verworpen zijn. Voor een beter begrip van de theorie leek het mij daarom een goede zaak om te beginnen met een beschrijving van de belangrijkste kenmerken van de oorspronkelijke theorie, ACT*. Hierna zal ik globaal de wijzigingen die zijn gemaakt in de eerdere versies van ACT-R bespreken, waarna ik tenslotte de huidige ACT-R theorie zal beschrijven.

Een belangrijk punt in alle versies van de ACT theorie is het onderscheid dat wordt gemaakt tussen declaratieve en procedurele kennis. Declaratieve kennis is feiten-kennis, zoals dat Londen de hoofdstad van Engeland is, en wordt opgeslagen in zogenaamde 'chunks', eenheden van informatie.

Een chunk waarin het antwoord van de som vier plus twee is opgeslagen zou er bijvoorbeeld zo uit kunnen zien:

```
feit4+2
    is een optelling
       getal1     vier
       getal2     twee
       antwoord   zes
```

Deze chunk heeft drie slots, twee met de op te tellen getallen, en één met het antwoord. Er zijn uiteraard een heleboel verschillende soorten chunks met een verschillend aantal slots mogelijk.

Cognitieve vaardigheden, zoals het rekenen met breuken, vallen onder procedurele kennis. Procedurele kennis wordt opgeslagen in de vorm van productieregels.

Een productieregel voor het optellen van twee getallen zou er, simpel gezegd, zou uit kunnen zien:

```
ALS je doel is om getal1 en getal2 op te tellen
DAN zoek je in je geheugen naar het antwoord
```

Deze voorbeeldregel kan alleen worden toegepast als je ook daadwerkelijk het antwoord in je geheugen hebt. Het is ook mogelijk om twee getallen op te tellen via doortellen. Dan zouden de regels er, in simpele vorm, zo uitzien:

```
regel1:
ALS je doel is om getal1 en getal2 op te tellen
EN getal2 is niet nul
DAN zoek je in je geheugen naar het getal dat na
getal1 komt

regel2:
ALS je doel is om getal1 en getal2 op te tellen
EN getal3 is het getal dat na getal1 komt
DAN zoek je naar het getal dat voor getal2 komt

Regel3:
ALS je doel is om getal1 en getal2 op te tellen
EN getal3 is het getal dat na getal1 komt
EN getal4 is het getal dat voor getal2 komt
DAN wordt je doel om getal3 en getal4 op te tellen

regel4:
ALS je doel is om getal1 en getal2 op te tellen
EN getal2 is nul
DAN is het antwoord getal1
```

Als je vier en twee zou willen optellen zou je via regel1, regel2 en regel3 dus eerst zoeken naar het getal dat na vier komt (vijf) en het getal dat voor twee komt (één). Vervolgens pas je regel1 weer toe, maar nu op de som vijf plus één. Toepassing van regel1 tot en met regel3 levert de som zes plus nul op. Nu slaagt regel4. Het doortellen is afgelopen en het antwoord is zes.

Hoe nieuwe productieregels worden geleerd, hoe de keuze wordt gemaakt welke productieregel er gebruikt moet worden, de toenemende snelheid waarmee een vaardigheid wordt uitgevoerd en de oorzaak van fouten worden in verschillende versies van de ACT theorie op verschillende wijze verklaard. Ik zal beginnen met de beschrijving van deze processen volgens de ACT* theorie (Anderson, 1987)

3.1.1 De belangrijkste kenmerken van ACT*

Productieregels zijn de eenheden van procedurele kennis: Productieregels definiëren de stappen waarin een probleem wordt opgelost en zijn de eenheden waarin procedurele kennis wordt vergaard.

Hiërarchische doel-structuur: Het oplossen van problemen is georganiseerd volgens een hiërarchische structuur. Deze hiërarchische structuur van doelen is een weerspiegeling van de structuur van het probleem. Doelen zijn van specifiek belang voor het leren van structuur door kennis-compilatie. Zij geven aan welke delen van de probleemoplossing bij elkaar horen en gecompileerd kunnen worden tot een nieuwe regel.

Initieel gebruik van zwakke methoden: Om problemen op te lossen waarvoor nog geen productieregels bestaan, kan gebruik gemaakt worden van zwakke methoden. Deze methoden worden zwak genoemd omdat ze geen gebruik maken van domein-karakteristieken. Een veelgebruikte zwakke methode is de analogie-methode. Om een oplossing te vinden voor een probleem waarvoor nog geen productieregel bestaat kunnen mensen gebruik maken van een voorbeeld van een succesvolle oplossing van een soortgelijk probleem, en kunnen ze proberen het huidige probleem analoog aan dit voorbeeld op te lossen. Andere zwakke methoden zijn middelen-doel analyse, achteruit werken, hill-climbing en puur voorwaarts zoeken. Het voordeel van zwakke methoden is dat ze zodanig geformuleerd zijn dat ze niet refereren aan één specifiek domein; ze zijn dus algemeen toepasbaar. Zolang de kennis over een domein afdoende gecodeerd is in het declaratief geheugen, kunnen deze regels worden toegepast. Welke methode er kan worden toegepast en hoe is afhankelijk van de kennis die over het probleemgebied besloten ligt in het declaratief geheugen. Dit wordt bepaald door de ervaringen van degene die leert: instructies, het lezen van teksten, bestudeerde voorbeelden, etc.

Kenniscompilatie: Kenniscompilatie is het proces waarbij efficiënte, domein specifieke productieregels gecreëerd worden door het oplossingproces na te lopen. Er spelen twee verschillende processen een rol bij kenniscompilatie, nl. proceduralisatie en compositie. Proceduralisatie is de incorporatie in domein-specifieke productieregels van declaratieve kennis waarop

de zwakke methode toegepast kon worden. Compositie is het samensmelten van verschillende productieregels tot een nieuwe productieregel. Deze beide processen kunnen voor een aanzienlijke versnelling van een oplossingsprocedure zorgen. De zwakke methoden en de kleinere productieregels blijven in dit proces gewoon bestaan en kunnen toegepast worden in situaties waarin de gecompileerde regel dat niet kan.

Sterkte (strength): De sterkte van een productieregel bepaalt hoe snel hij toegepast zal worden, en een succesvolle toepassing van een regel zal zijn sterkte vergroten. Het mechanisme dat de sterkte regelt in ACT* levert een typische exponentiële-functie vorm voor het toenemen van snelheid in het uitvoeren van vaardigheden.

Beperkingen van het werkgeheugen: De ACT* theorie geeft twee redenen waarom fouten worden gemaakt: de productieregels kloppen niet of de informatie in het werkgeheugen waarop een productieregel wordt toegepast klopt niet. De belangrijkste observatie hierbij is dat perfect werkende productieregels toch fouten kunnen vertonen door de beperkingen van het werkgeheugen. Fouten zullen hierbij alleen optreden wanneer kritieke informatie verloren gaat, waardoor de verkeerde productieregels vuren of de goede productieregel vuurt maar het verkeerde resultaat oplevert. Leren beïnvloedt het werkgeheugen zodanig dat de werkgeheugencapaciteit voor een bepaald domein kan toenemen, waardoor het aantal gemaakte fouten daalt.

In de oorspronkelijke ACT* theorie waren naast versterking en compilatie nog twee leermethoden verantwoordelijk voor het creëren van nieuwe productieregels, namelijk generalisatie en discriminatie.

Generalisatie is het proces waarbij verschillende specifieke regels worden samengevoegd tot één algemene regel en discriminatie is het proces waarbij een regel die te algemeen lijkt specifieker wordt gemaakt, om hem te kunnen onderscheiden van regels die toegepast moeten worden in situaties die er erg op lijken, maar toch anders zijn.

3.1.2 Van ACT* naar ACT-R: de belangrijkste wijzigingen

In latere versies van ACT*, die ACT-R genoemd werden, zijn veel veranderingen aangebracht met betrekking tot bovengenoemde regels (Anderson & Lebiere, 1998).

De generalisatie, discriminatie, compositie en proceduralisatie procedures zijn bijvoorbeeld om uiteenlopende redenen verdwenen.

De eerste reden hiervoor is dat, hoewel deze gedragingen bestaan, er geen positief bewijs gevonden is dat de mechanismen zoals ze beschreven worden in de ACT* theorie een goede weergave was van de manier waarop deze algemene principes in de werkelijkheid bestaan.

Daarnaast leverden deze mechanismen, omdat het automatische leermechanismen waren, veelvuldige computationele misdragingen op, door het produceren en gebruiken van ongewenste productieregels.

Een andere verandering betreft de sterkte (strength) van een productieregel. De beslissing welke productieregel wordt gekozen hangt niet langer af van de sterkte van een regel, maar van zijn verwachte opbrengst (expected gain). Deze expected gain hangt af van de kans dat een doel wordt bereikt als een regel wordt gebruikt, de hoeveelheid tijd die het systeem bereid is te besteden aan het bereiken van dit doel en de verwachte tijd die het kost om via deze regel het doel te bereiken. Sterkte van een regel bestaat nog wel, maar wordt in de praktijk niet meer gebruikt.

3.1.3 ACT-R in zijn huidige vorm

Voor mijn onderzoek zal ik gebruik maken van de nieuwste versie van ACT-R, ACT-R 5.0. In deze versie van ACT-R, die nog in ontwikkeling is, zijn veel dingen gewijzigd ten opzichte van eerdere versies van ACT-R. Het is hierbij opvallend dat veel van de oorspronkelijke ideeën uit ACT* weer zijn opgenomen, deze keer echter op een manier waarbij de problemen die zij in eerdere versies opleverden worden vermeden.

Hiërarchische doel structuur: De hiërarchische doel-structuur is niet langer inherent aan het systeem maar moet ontstaan vanuit de aard van het probleem. Dit houdt in dat de goal-stack, zoals die in eerdere versies van ACT bestond, is verdwenen. De goal-stack leverde de onrealistische situatie op dat je nooit je doel kon vergeten. In ACT-R 5.0 is dit probleem verholpen.

Initieel gebruik van zwakke methoden: Zwakke methoden zijn nog steeds zeer waarschijnlijke strategieën voor het oplossen van onbekende problemen. Het blijven echter strategieën en ze maken dus geen deel uit van het ACT-R systeem. Wel kunnen ze geïmplementeerd worden in de vorm van productieregels, aangezien ook strategieën cognitieve vaardigheden zijn, en dus geleerd worden.

Kenniscompilatie: In ACT-R 5.0 wordt declaratieve kennis uit het geheugen gehaald door toepassing van een productieregel. Kenniscompilatie is het samenvoegen van twee productieregels door eliminatie van het ophalen van een feit uit het geheugen. Er is hierdoor niet langer een onderscheid tussen proceduralisatie en compositie. Daarnaast is kenniscompilatie veel robuuster gemaakt, aangezien nieuwe regels pas veelvuldig worden toegepast wanneer ze hun nut hebben bewezen.

Beperkingen van het werkgeheugen: ACT-R heeft geen expliciet werkgeheugen meer. Beperkingen van het werkgeheugen zijn echter impliciet aanwezig in de vorm van het mogelijke falen van het ophalen van feiten uit het geheugen.

Generalisatie en discriminatie: Ook deze methoden zijn niet expliciet geïmplementeerd in ACT-R 5.0. Ze treden echter beide op als een effect van kenniscompilatie en het gebruik van zwakke methoden.

In de volgende paragraaf zal ik wat dieper ingaan op de eigenschappen van ACT-R 5.0 die voor mijn onderzoek van belang zijn.

3.2 ACT-R 5.0 nader bekeken

De eigenschappen van ACT-R die in mijn onderzoek het meest naar voren treden zijn kenniscompilatie, expected gain en beperkingen van het werkgeheugen. Ik wil ik deze paragraaf dan ook ingaan op de mechanismen die aan deze eigenschappen ten grondslag liggen.

3.2.1 Expected gain

De expected gain van een regel wordt bepaald door een eenvoudige formule:

$$EG = P * G - C \tag{3.1}$$

Hierbij staat **P** voor de kans dat het doel met deze regel bereikt wordt, **G** voor de hoeveelheid tijd die het systeem maximaal zal besteden aan het bereiken van het doel, en **C** voor de tijd die het met deze regel kost om het doel te bereiken.

De **G**-waarde is een parameter waarde die je kunt instellen voordat je een model laat draaien. Met deze waarde bepaal je hoelang het model wil zoeken naar een antwoord op een probleem. Hoe hoger deze waarde is, hoe belangrijker de slagingskans van de regel wordt, en hoe minder belangrijk de tijd die een regel kost.

De invloed die de **G**-waarde heeft op het kiezen van de regel wordt duidelijk aan de hand van het volgende voorbeeld:

Stel, je hebt twee regels om een bepaald probleem op te lossen. Eén hele goede, maar tijdrovende regel, en één slechte, maar vrij snelle regel, met de volgende kans van slagen en kosten.

regel1: $P_1 = 1.0$, $C_1 = 35$
regel2: $P_2 = 0.4$, $C_2 = 5$

Als G = 40, dan geldt

$$EG_{regel1} = 1.0 * 40 - 35 = 5$$

$$EG_{regel2} = 0.4 * 40 - 5 = 11$$

In dit geval zal regel2 verkozen worden boven regel1, omdat de verwachte opbrengst van deze regel hoger is dan van regel2, hoewel deze laatste een slagingspercentage van 100 % heeft.

nemen we nu echter G = 80, dan geldt

$$EG_{regel1} = 1.0 * 80 - 35 = 45$$

$$EG_{regel2} = 0.4 * 80 - 5 = 27$$

Nu zal regel1 wel gekozen worden. Het veranderen van de G-waarde is één van de manieren om persoonlijke verschillen te creëren in een ACT-R model. Met een versie van het model met een hoge G-waarde kun je een persoon simuleren

die veel moeite wil doen om een goed antwoord te vinden en die bereid is lang na te denken. Een model met een hele lage G-waarde is een simulatie van een persoon die zo snel mogelijk klaar wil zijn en die het minder belangrijk vindt dat een antwoord goed is.

3.2.2 Kenniscompilatie

In ACT-R 5.0 is het verzoek om informatie uit het geheugen te halen een onderdeel van een productieregel. Voor het opzoeken van het antwoord op een optelsom zouden de regels er zo uit kunnen zien:

```
(p vind-som-in-geheugen
    =goal>
       isa       optelling          als je doel het optellen van twee
       getal1    =getal1            getallen is
       getal2    =getal2
       antwoord  nil                en je weet het antwoord niet
       toestand  zoek-antwoord      en de toestand van het doel is
==>                                 zoek-antwoord
    +retrieval>
       isa       optelling          zoek dan naar een optellingsfeit
       getal1    =getal1            met dezelfde getallen
       getal2    =getal2
       antwoord  =antwoord          waarvan het antwoord wél be-
    =goal>                          kend is
       toestand  vul-antwoord-in    en verander de toestand van het
)                                   doel.


(p vul-antwoord-in
    =goal>
       isa       optelling          als je doel het optellen van twee
       getal1    =getal1            getallen is
       getal2    =getal2
       antwoord  nil                en je weet het antwoord niet
       toestand  vul-antwoord-in

    =retrieval>
       isa       optelling          en je hebt een optellingsfeit met
       getal1    =getal1            dezelfde getallen gevonden
       getal2    =getal2
       antwoord  =antwoord          waarvan het antwoord wél be-
==>                                 kend is
    =goal>
       antwoord  =antwoord          dan vul je dit antwoord ook in
       toestand  antwoord-gevonden  in je doel
)
```

Bij productiecompilatie wordt één nieuwe regel gevormd uit twee bestaande regels die na elkaar vuren. Hierin worden de test-voorwaarden van beide regels gecombineerd, zodat de regel alleen toegepast kan worden wanneer beide bestaande regels ook toegepast hadden kunnen worden. De acties die worden uitgevoerd worden ook gecombineerd tot een aantal acties met hetzelfde resultaat. Als bovengenoemde regels na elkaar zouden vuren om de som 3 + 5 op te lossen zouden er door productiecompilatie de volgende regel kunnen ontstaan:

```
(p vind-3+5-in-geheugen
    =goal>
       isa        optelling          als je doel het optellen van de
       getal1     drie               getallen drie en vijf is
       getal2     vijf
       antwoord   nil                en je weet het antwoord niet
       toestand   zoek-antwoord      en de toestand van het doel is
==>                                  zoek-antwoord
    =goal>
       antwoord   acht               dan is het antwoord acht
       toestand   antwoord-gevonden  en de toestand van het doel wordt
                                     'antwoord-gevonden'
)
```

In de nieuwe regel hoeft het feit niet meer worden opgezocht in het geheugen. Hierdoor zal het antwoord sneller gevonden worden. Iets ophalen uit het geheugen kost namelijk tijd. De gecompileerde regel in bovengenoemd voorbeeld levert een vorm op van wat in ACT* proceduralisatie wordt genoemd. Ook is de gecompileerde regel specifieker dan de twee regels waaruit hij voortkomt. Dit is een vorm van discriminatie. Hoewel deze methoden dus niet meer expliciet aanwezig zijn in ACT-R 5.0 zijn de effecten er nog wel. Ditzelfde geldt voor compositie en generalisatie.

In ACT* ontstonden veel problemen door kenniscompilatie. Dit kwam voornamelijk omdat er soms foute regels werden gecompileerd, die vervolgens steeds gebruikt werden. Eenmaal geleerd werd zo'n foute regel dus niet meer afgeleerd. In ACT-R 5.0 is daar wat op gevonden.

Ten eerste worden er in ACT-R 5.0 geen regels meer geleerd kunnen worden die dingen doen die het syteem eerder niet kon. Met het generalisatie mechanisme zoals dat in ACT* bestond kon dit wel. Dit zorgde er soms voor dat het systeem in een oneidige lus terecht kwam. Zo werden er soms regels gegenereert waarbij er na uitvoering niets veranderd was aan het doel. Zo'n regel kan oneindig blijven vuren, omdat het doel aan de condities voor de regel blijft voldoen.

Daarnaast kan een nieuwe regel in ACT-R 5.0 alleen ontstaan wanneer hij zijn nut voldoende heeft bewezen. Dit wordt bewerkstelligd door de expected gain van de nieuwe regel te baseren op die van zijn ouders, waarbij de kosten van de regel iets verhoogd worden. Hierdoor zal de expected gain van de nieuwe regel iets lager zijn dan die van zijn ouders. Door ruis wordt de nieuwe regel toch af en toe gekozen, en als het inderdaad een betere regel is dan zijn ouders, zal de expected gain van de nieuwe regel langzaam stijgen en eventueel zelfs

groter worden dan die van zijn ouders.

In ACT-R 5.0 wordt de expected gain van een nieuwe regel bepaald door de volgende formule:

$$EG = \frac{n * (EG_{ouders} - extrakosten) + m * ervarenEG}{n + m} \tag{3.2}$$

Ook hier bestaat de expected gain uiteraard uit een $P * G$ en een C component, maar bovenstaande verkorte schrijfwijze is inzichtelijker voor onderstaande uitleg.

In regel 3.2 is$n$ een constante die wordt bepaald door de :ie (initial experience) parameter,m het aantal keer dat de regel is gebruikt, en $ervarenEG$ de gemiddelde expected gain van de regel.

Deze methode levert echter niet helemaal de gewenste resultaten op. Ten eerste speelt de ruis van de expected gain een te grote rol. Staat deze waarde te laag, dan zal de nieuwe regel nooit gekozen worden. Staat deze te hoog dan zal de nieuwe regel vanaf het begin vaak gekozen worden, wat tegenstrijdig is met het idee dat nieuwe regels langzamerhand in gebruik worden genomen.

Daarnaast blijft de nieuwe regel altijd verbonden met zijn ouders. Hierdoor worden zijn ouders nog af en toe gekozen als de nieuwe regel beter is dan zijn ouders, en zal de nieuwe regel nog af en toe gekozen worden als deze veel slechter is dan zijn ouders.

Een oplossing hiervoor is aangedragen door Taatgen (2002). Zijn voorstel is het eerste deel van (3.2) (het a-priori deel van de regel) te vervangen door een nieuwe regel:

$$aprioriEG_{nieuw} = aprioriEG_{oud} + \alpha(EG_{ouders} - aprioriEG_{oud}) \tag{3.3}$$

De nieuwe a-priori expected gain wordt elke keer dat een regel opnieuw wordt aangemaakt opnieuw berekend. Aangezien de a-priori waarde begint op 0, zal de nieuwe regel verschillende malen moeten zijn aangemaakt voordat hij een kans heeft om te vuren. Regels die vaker worden gecreëerd, en dus waarschijnlijk relevanter zijn voor het systeem, worden hierdoor sneller geïntroduceerd dan regels die maar af en toe worden aangemaakt. Verder speelt de expected gain ruis geen kritieke rol meer, de a-priori expected gain blijft toenemen totdat het de waarde van de ouder-regels benadert. Wel wordt er voor deze nieuwe regel een nieuwe parameter, α, gecreëerd, maar deze vervangt de kosten-parameter, :cp (cost parameter).

Voor mijn onderzoek heb ik gebruik gemaakt van een versie van ACT-R waarin het voorstel van Taatgen geïmplementeerd is. De expected gain van nieuw aangemaakte regels in mijn model wordt hierdoor bepaald door de volgende formule (uit vergelijking 3.2 en 3.3:

$$EG = \frac{n * aprioriEG + m * ervarenEG}{n + m} \tag{3.4}$$

3.2.3 beperkingen van het werkgeheugen

Chunks in het declaratief geheugen hebben een basis-activatiewaarde. Deze basis-activatiewaarde wordt bepaald door het aantal keer dat een feit aange-

maakt wordt, en hoe lang geleden het feit voor de laatste keer is gebruikt. De formule die hiervoor gebruikt wordt is:

$$B_\iota = \ln(\sum_{j=1}^{n} t_j^{-d}) \tag{3.5}$$

B_ι zal toenemen op elk tijdstip t dat de chunk opnieuw voorkomt, en die ook weer afneemt in de tijd. De mate van afname wordt bepaald door de factor -d.

Er zijn verschillende manieren waarop een chunk kan voorkomen:

1. op het moment dat hij voor de eerste keer wordt aangemaakt omdat een doel een succes heeft opgeleverd
2. op het moment dat een ander doel precies dezelfde chunk oplevert
3. op het moment dat hij uit het geheugen wordt opgehaald.

Op het moment dat een chunk uit het geheugen moet worden opgehaald moet er tussen alle chunks van het goede type de juiste chunk gevonden worden. In het eerder genoemde optel-voorbeeld zou dat betekenen dat tussen alle chunks van het type optelling precies die chunk gevonden moet worden waarbij **getal1** drie is, en **getal2** vijf. Om het zoeken naar de juiste chunks makkelijker te maken, hangt de totale activatie van de chunks niet alleen af van hun basis-activatie, maar ook van de mate waarin ze lijken op de gezochte chunk. Daarvoor is de volgende formule:

$$A_\iota = B_\iota + \sum_j W_j S_{ji} \tag{3.6}$$

De elementen j zijn de ingevulde waarden van slots van het huidige doel. In het geval dat het doel het optellen van drie en vijf is, zijn deze elementen de waarden 'drie' en 'vijf'.De factor W_j geeft de gewichtswaarde van elk element in het doel aan. Deze gewichtswaarde is 1 gedeeld door het aantal ingevulde slots. In dit voorbeeld zijn er twee slots ingevuld, dus krijgen zowel element 'drie' als element 'vijf' een gewichtswaarde van 0,5. De S_{ji}-waarde wordt bepaald door het aantal keer dat chunk *iota* nodig was om het doel te bereiken, als j een element van het doel was.

Een chunk krijgt dus een hogere activatiewaarde naarmate hij meer elementen bevat die ook in het doel terug te vinden zijn, en naarmate hij vaker gebruikt wordt in situaties die lijken op die van het huidige doel.

Als alle elementen een activatiewaarde hebben gekregen gaat het systeem zoeken naar de juiste chunk. Hij begint daarvoor bij het element met de hoogste activatiewaarde. Het kan natuurlijk best zijn dat de gezochte chunk helemaal niet bestaat, dat je niet uit je hoofd weet hoeveel drie plus vijf is. Of dat de juiste chunk er wel is, maar een hele lage activatiewaarde heeft. Het is niet realistisch dat mensen, en dus ook het systeem, heel erg lang in hun geheugen blijven zoeken naar het goede antwoord. Daarom wordt de tijd die het systeem zoekt beperkt. Dit gaat volgens de volgende formule:

$$Time_\iota = Fe^{-A_\iota} \tag{3.7}$$

De tijd om element ι te vinden wordt dus bepaald door de activatiewaarde van de chunk en de factor F, de latency factor. Hoe hoger deze factor, hoe langer het systeem zal blijven zoeken naar het element.

De beperkingen van het werkgeheugen zijn in ACT-R 5.0 impliciet aanwezig door het mogelijke mislukken van het ophalen van een feit in het geheugen.

Dit kan gebeuren doordat het juiste feit nog niet gevonden is als de tijd die het systeem heeft om het te zoeken voorbij is. Andere chunks kunnen een hogere activatiewaarde hebben doordat hun basis-activatie bijvoorbeeld hoger is. Als de som 'zes plus twee' net tien keer is gemaakt, zal de chunk met deze som erin een veel hogere basisactivatiewaarde hebben, en daardoor misschien ook een hogere totale activatie hebben. Voor chunks die ook nog lijken op de gezochte chunk, zoals bijvoorbeeld 'drie plus vier', zal dit effect nog sterker zijn. Het tweede deel van de activatie-formule zal in dit soort gevallen ook een hogere waarde opleveren. Hoe vaak een gezocht feit niet wordt gevonden doordat de zoektijd voorbij was voordat de juiste chunk is gevonden hangt voor een groot deel af van de latency-factor F.

Het kan ook zijn dat het gezochte feit niet wordt gevonden omdat zijn activatie onder de 'retrieval threshold' is gezakt. Is dit het geval, dan is het systeem de chunk 'vergeten'. Hij kan niet meer uit het geheugen worden opgehaald. Door ruis is het soms toch mogelijk dat een chunk die onder de retrieval threshold is gezakt wordt gevonden. Een chunk kan altijd weer boven de retrieval threshold komen doordat zijn basis-activatie wordt verhoogd door het opnieuw voorkomen van de chunk. Hoe snel een chunk onder de retrieval threshold zakt hangt voor een groot deel af van de factor d.

3.3 ACT-R en onderwijs: intelligente tutors

ACT-R heeft zijn nut voor het onderwijs inmiddels bewezen door middel van zijn cognitieve tutors. Dit zijn instructionele computerprogramma's gebaseerd op een cognitief model. Het systeem heeft dus een computationeel model dat precies dezelfde problemen op kan lossen als de leerlingen moeten kunnen, en dit op precies dezelfde manier doet als zij. Door de acties van de leerling te vergelijken met dit model, krijgt de tutor een goed beeld van wat de leerling begrijpt en wat nog niet. Hierdoor kan het gerichte instructie geven aan de leerling.

Het is hierbij niet de bedoeling een menselijke tutor te simuleren. Het computerprogramma moet gezien worden als een mechanisch hulpmiddel voor het aanleren van een bepaalde vaardigheid.

De op de ACT-R gebaseerde tutor-programma's zijn zeer succesvol gebleken. (e.g. Anderson, 1993; Corbett & Anderson, 1995; Anderson, Corbett, Koedinger & Pelletier, 2002) Ook voor het leren van breuken zou een dergelijke tutor interessant kunnen zijn. Ik wilde daarom ingaan op de ideeën die ten grondslag liggen aan deze cognitieve tutors.

3.3.1 het ontwikkelen van een op ACT-R gebaseerde tutor

In de loop der tijd is er niet alleen aan de ACT-R theorie een hoop veranderd en verbeterd. Ook voor wat betreft de ontwikkeling van intelligente tutors is er een dergelijk evolutieproces geweest. Daarbij speelde niet alleen het cognitieve model een belangrijke rol. Ook zaken die weinig met cognitief modelleren te maken hebben, maar des te meer met het praktisch gebruik van tutors in een klaslokaal hebben een rol gespeeld bij de totstandkoming van de ideeën aangaande de ontwikkeling van cognitieve tutors zoals ze op dit moment gedefinieerd zijn.

De belangrijkste fasen die te onderscheiden zijn bij het ontwikkelen van cognitieve tutors zijn het ontwikkelen van een interface, de bepaling van het curriculum, het modelleren van het productiesysteem, de declaratieve instructie en het gebruik van de tutor in een klaslokaal. In de volgende paragrafen worden deze verschillende fasen nader besproken.

het ontwikkelen van een interface

De eerste stap bij het ontwikkelen van een intelligente tutor is het bepalen van de omgeving waarin problemen moeten worden opgelost. Dit vormt de interface tussen de leerling en de computer.De huidige visie van de ontwikkelaars van de ACT-R tutors is dat een vaardigheid die wordt aangeleerd het kunnen oplossen van problemen *binnen* een bepaalde context is. De context, of interface, is daarom van groot belang voor de mate waarin de opgedane kennis kan worden overgebracht naar andere gebieden. Bij het ontwikkelen van de interface moet je je daarom goed realiseren welke mate van overdraagbaarheid, oftewel *transfer*, je wilt bereiken

Er zijn drie niveaus waarop transfer kan plaatshebben:

Identieke producties Wanneer de productieregels voor de tutor identiek zijn aan die voor het doel-domein valt er een totale transfer te verwachten. Dit is bijvoorbeeld het geval wanneer het doel-domein een computersysteem zou zijn en de tutor leert hoe je dit systeem moet gebruiken. In de meeste gevallen overlapt echter slechts een deel van de productieregels. De transfer is dan afhankelijk van de mate waarin de productieregels overlappen.

het vertalen van acties Zelfs als de productieregels in de tutor en in het doel-domein verschillen kan het duidelijk zijn voor een leerling hoe hij de acties die hij in de tutor geleerd heeft moet omzetten naar passend gedrag in het doel-gebied. Een voorbeeld hiervan is een tutor voor programmeren in LISP, waarbij de leerlingen programma-elementen uit een lijst konden kiezen. In het doel-domein bestond zo'n keuzemogelijkheid niet en moesten de elementen die eerder uit een lijst gekozen werden nu getypt worden. De meeste leerlingen vonden het overduidelijk dat ze, op plaatsen waar ze vroeger 'writeln' uit de lijst kozen, ze nu 'writeln' moesten typen.

declaratieve transfer Zelfs als acties in het ene domein niet direct vertaald kunnen worden naar het andere domein, kan er declaratieve transfer plaatshebben van onderliggende competentie. Zo zijn de meeste leerlingen

die gewerkt hebben aan het construeren van LISP code met behulp van een tutor redelijk goed in staat LISP functies te evalueren, terwijl er zeker geen sprake is van totale transfer tussen beide taken. Dit komt doordat beide vaardigheden gebaseerd zijn op hetzelfde declaratieve begrip van LISP, en leerlingen moeten deze declaratieve kennis bezitten voordat ze succesvol kunnen leren programmeren.

De belangrijkste oorzaak van de mate van transfer ligt dus in de mate van overlap in de productieregels die binnen de tutor en binnen het doel-domein gebruikt moeten worden. Als de acties in beide domeinen verschillen moet het de leerling duidelijk zijn waarom en hoe. Als er met deze twee dingen rekening wordt gehouden zal transfer nagenoeg altijd plaatsvinden.

De interface moet dus geschikt zijn om de beoogde vaardigheid op zo'n manier te leren dat het ook in de doelomgeving gebruikt kan worden. Maar naast de interface zelf is ook de interactie van de leerling en de tutor die via deze interface plaatsheeft van belang. Deze interactie moet op z'n minst aan de volgende voorwaarden voldoen:

1. Acties die binnen de interface worden genomen, moeten via de tutor gaan. De tutor moet weten welke acties de leerling heeft ondernomen om zijn denkstappen te kunnen volgen en hem toepasselijke begeleiding te geven.

2. De tutor moet op de hoogte zijn van de gevolgen die elke actie binnen de interface heeft voor de toestand van de interface. Dit komt erop neer dat het cognitieve model een representatie van de interface die de leerling ziet in zijn werkgeheugen moet hebben.

3. De tutor moet zelf interface-acties kunnen uitvoeren.

Kortom, de tutor moet kunnen volgen wat de leerling doet, weten wat de gevolgen zijn van de acties van de leerling, en zelf acties kunnen uitvoeren binnen de interface

het vaststellen van het curriculum

Nadat de omgeving waarbinnen de leerlingen hun vaardigheid moeten laten zien is vastgesteld, moet er bepaald worden wat ze precies moeten leren binnen dat domein. Het gaat hierbij om het identificeren van het soort problemen dat de leerling op moet kunnen lossen binnen het domein en het vaststellen van de beperkingen op hun oplossingsmethoden. De beste situatie ontstaat wanneer er met een school overlegd wordt over deze zaken. Het is de bedoeling dat een tutor uiteindelijk net zo flexibel gebruikt kan worden als een tekstboek. Het precieze uiterlijk kan niet door de school bepaald worden, wel kunnen er aanpassingen in het gebruik worden gemaakt.

Omdat het onmogelijk is voor elke school een aparte versie van de tutor te maken, is het het beste om de tutor zo flexibel mogelijk te maken, zodat zo veel mogelijk mensen er naar tevredenheid mee kunnen werken. Dit kan worden bereikt door zo veel mogelijk opties aan en uit te kunnen schakelen. Het gaat hierbij om zaken als de manier van feedback geven, of het totaal uitzetten van feedback, het wel of niet in de gaten houden van de vorderingen van de leerling,

en het stimuleren van de leerling om door te gaan naar een volgend leer-niveau als het de productieregels op een bepaald niveau volkomen beheerst.

het modelleren van een productiesysteem

Om het cognitieve model te ontwikkelen dat ten grondslag ligt aan de tutor moeten de productieregels bepaald worden die nodig zijn om de gevraagde problemen op een cognitief geloofwaardige manier op te lossen. Het leerling-model dat hieruit ontstaat kan acties naar de interface sturen en de gevraagde problemen oplossen. Vaak zijn er meerdere oplossingsmethoden mogelijk. Het model moet in dat geval alle mogelijke oplossingen kunnen genereren.

Productieregels interacteren met informatie in het werkgeheugen. De typische informatie die in het werkgeheugen te vinden is, is informatie over de huidige toestand van het doel en een representatie van wat het doel is. Als een doel in natuurlijke taal gesteld is, kan de representatie een probleem vormen. Het is niet de bedoeling dat het model natuurlijke taal interpreteert. Daarom moeten de ontwikkelaars het product van de interpretatie van natuurlijke taal representeren. Hierbij moet worden opgepast dat er in deze representatie niet een deel van de oplossing wordt ingebouwd. Dit kan veroorzaken dat het probleem dat de leerling gepresenteerd krijgt, of de vaardigheid die geleerd moet worden niet adequaat gerepresenteerd zijn.

Als de productieregels gespecificeerd zijn moeten deze regels nog gerelateerd worden aan het gedrag van de leerling. Dit betekent dat de regels moeten worden uitgebreid met testen die overeenkomen met het gedrag van een leerling zodat de tutor kan bepalen welke productieregels gevuurd hebben in het hoofd van de leerling. Er moet daarbij rekening worden gehouden met het oplossen van eventuele ambiguïteiten.

Als een dergelijk model gecreëerd is, is er een 'instructieloze tutor' ontstaan. Een dergelijke tutor kan identificeren waar er fouten worden gemaakt en correcte acties aangeven. Het zegt echter nog niets over waarom een bepaalde actie fout is en een andere goed. Daarvoor is declaratieve instructie nodig.

declaratieve instructie

Een deel van de competentie binnen een domein is te danken aan instructies die buiten de tutor worden gegeven. Deze instructies kunnen door middel van een les of een leerboek worden verstrekt. Ook bij de tutors wordt vaak een begeleidende tekst geschreven. Hierin worden voorbeelden gegeven die de te leren stof illustreren met commentaar dat de belangrijkste aspecten van de regels benadrukt. Een algemene strategie hierbij is om zo min mogelijk te zeggen. Lange stukken uitleg worden vaak niet nauwkeurig gelezen, en de leerlingen raken gauw verveeld.

Van een veel groter belang dan deze externe instructie is de declaratieve instructie binnen de tutor. Dergelijke instructie komt in twee vormen voor:

1. **Foutmeldingen.** Als de leerling een fout maakt kan er een bericht gepresenteerd worden dat de leerling iets nuttigs vertelt over de fout. Hiervoor

moeten ook productieregels voor foute strategieën worden geïmplementeerd. In de melding wordt meestal geen diepgaande diagnose van de fout gegeven, maar wordt simpelweg uitgelegd waarom iets fout is.

2. **Hulpberichten** Hulpberichten kunnen gegenereerd worden als de leerling daarom vraagt of als het systeem heeft beoordeeld dat de leerling hulp nodig heeft. Deze hulpberichten worden gegenereerd vanuit templates die geassocieerd zijn met de correcte productieregels die gevuurd zouden moeten hebben op het moment dat de hulp wordt gegeven.

Hulpberichten moeten zo kort en bondig mogelijk zijn, zelfs als ze daardoor een niet-menselijk karakter krijgen. Ook moet er gekeken worden of de hulpberichten niet auditief gepresenteerd kunnen worden. Een visuele presentatie interfereert met het oplossen van het probleem, hetgeen eveneens visueel is.

Het kan zijn dat leerlingen misbruik maken van hints, en daardoor weinig leren. Sommige kinderen zullen zonder eerst zelf na te denken een hint gebruiken, zodat ze sneller klaar zijn. Een manier om dat te verhelpen is door het traceren van kennis te koppelen aan het zoeken van hulp. Als het simpelweg beantwoorden van de vragen niet voldoende is, maar er alleen voortgang wordt gemaakt in de tutor als de leerling de problemen zonder hulp op kan lossen, zullen leerlingen alleen hulp zoeken als ze het nodig hebben.

Er zijn nu nog twee vragen over hulpberichten onopgelost. Moeten leerlingen hulp aangeboden krijgen als ze het nodig lijken te hebben en moet de hulp in één bericht worden gepresenteerd of in meerdere, explicietere berichten.

Aangezien leerlingen dingen beter onthouden als ze actief hebben meegewerkt aan het ontstaan ervan, worden leerlingen in ACT-R tutors gestimuleerd om zo veel mogelijk zelf te doen. Ze krijgen dan ook alleen hulp als ze er om vragen. Ook krijgen ze als eerste hint slechts een vage aanwijzing van wat ze moeten doen, en wordt in daaropvolgende hints steeds explicieter gemaakt wat ze moeten doen.

Het kan zijn dat dit niet de beste keuzen zijn. Sommige leerlingen weigeren hulp te zoeken, ook als ze iets niet begrijpen. Ook kunnen leerlingen geïrriteerd raken door de vage hint in het eerste hulpbericht en besluiten dat het geen zin heeft hulp te vragen.

De manier waarop hulp aangeboden moet worden hangt ook af van de manier waarop de tutor wordt gebruikt. Als een leerling zelfstandig met de tutor werkt, is het noodzakelijk om de leerling precies te vertellen wat hij moet doen als hij vastloopt. Wordt de tutor echter in een klassesituatie gebruikt, kan het de voorkeur verdienen dat de leerling de leerkracht om hulp vraagt als hij iets niet begrijpt.

Naast foutmeldingen en hulpberichten is tenslotte ook de keuze van de opgaven van groot belang. Omdat de tutor bijhoudt wat het niveau van de leerling is en wat zijn zwakke punten zijn, zal hij vrij nauwkeurig het niveau en de aard van de opgaven kunnen kiezen die de leerling nodig heeft. De tutor kan hierdoor "onderwijs op maat" aanbieden.

gebruik van een tutor in een klas-situatie

In tutors, ook in oude ACT-R tutors, wordt vaak ten onrechte uitgegaan van een aantal zaken. Ten eerste wordt er vaak vanuit gegaan dat in de tutor precies dat materiaal wordt aangeleverd dat onderwezen dient te worden. In de praktijk blijkt echter dat er grote verschillen zijn tussen verschillende scholen en verschillende leraren. Hierdoor zal de tutor altijd slechts een deel van het door de leraar bepaalde curriculum onderwijzen, en zal de tutor geïntegreerd worden met andere klasse-activiteiten.

Verder wordt er vaak vanuit gegaan dat leerlingen in een één op één situatie werken met de tutor. In de praktijk zijn ze echter zelden op een geïsoleerde manier aan het werk. Er wordt continu gepraat, en leerlingen helpen elkaar of vergelijken elkaars resultaten. Het helpen van een medeleerling gebeurt voornamelijk als een nieuwe eigenschap van de interface moet worden geleerd. Dergelijke informatie wordt op dezelfde manier gedeeld als een nieuwe truck op de Nintendo. Tutors worden succesvoller als dit soort hulp beschikbaar is. Ook de leerling die de hulp geeft, kan hierdoor de stof beter gaan begrijpen. Een effectieve leerkracht is ook actief in een dergelijke situatie. Hij geeft hulp waar een medeleerling of de tutor dat niet kan. Hierdoor wordt de tutor een soort assistent die de routinematige problemen oplost, terwijl de leerkracht de moeilijker problemen voor zijn rekening neemt. Ook kan het model voor de leerkracht per leerling de precieze vorderingen bijhouden. Het kost echter vaak wat tijd voordat de meeste leerkrachten een tutor optimaal kunnen gebruiken in hun klaslokaal. Voorwaarde is wel dat de tutor geen fouten vertoont, makkelijk te gebruiken is en niet crasht. Leerkrachten raken erg gefrustreerd als ze veel aandacht moeten besteden aan problemen met het programma in plaats van aan de te leren vaardigheid, en terecht.

Ook leerlingen lijken het werken met een ACT-R tutor erg plezierig te vinden. Dit komt waarschijnlijk omdat ze precies doen waar ze voor zijn, ze zijn een hulpmiddel voor het aanleren van een bepaalde vaardigheid in een bepaald domein, waarbij ze gedetailleerde hulp kunnen bieden op een manier die aansluit bij de manier van denken van de leerling.

3.4 motivatie van het gebruik van ACT-R in een onderzoek naar realistisch breukenonderwijs

Om een antwoord te vinden op de vraag waarom een realistische rekenmethode niet het verbeterde breukbegrip oplevert dat men zou verwachten, heb ik gebruik gemaakt van de ACT-R theorie. Ik heb daarbij geprobeerd een accurate weergave te creëren van de leerprocessen van kinderen die volgens de methode *Plusplunt* les krijgen. De motivatie om in mijn onderzoek gebruik te maken van een ACT-R model is drievoudig.

Ten eerste kun je met een ACT-R model het interne leerproces observeren dat gekoppeld is aan het waarneembare leerproces. Door op een dieper niveau te kijken naar wat er gebeurt tijdens een leerproces kunnen er verklaringen gevonden worden voor slechte resultaten die door het observeren van kinderen niet naar voren komen. Dit kan geheel nieuwe inzichten op de uitvoer van

realistisch breukenonderwijs opleveren.

Ten tweede is het, als een model eenmaal gecreëerd is, vrij eenvoudig te meten welk effect bepaalde veranderingen hebben op het leerproces. Het gaat hierbij om dingen als het belang van feedback, de invloed van bepaalde parameters op het leren (hoe snel nieuwe regels geleerd worden, hoe snel dingen vergeten worden) en de aangeboden sommen.

Tenslotte zou een model voor het leren van breuken naast een eventueel antwoord op de vraag waarom realistisch breukenonderwijs in de praktijk niet zo goed werkt ook een aanzet kunnen vormen voor een tutor voor breukenonderwijs. Hiermee zou niet alleen een analyse van het probleem worden gemaakt, maar kan er ook een realistische suggestie voor een (gedeeltelijke) oplossing voor het probleem gemaakt worden.

Hoofdstuk 4

Onderzoeksopzet

In dit hoofdstuk zal ik de opzet van mijn onderzoek behandelen. Ik zal hierbij de gemaakte keuzes en aannamen die ik heb gedaan toelichten en motiveren. Ten eerste zal ik uitleggen waarom ik heb gekozen voor een ietwat onorthodoxe manier van modelleren. Daarna zal ik de afbakening van mijn onderzoeksdomein behandelen. Vervolgens zal ik een overzicht geven van realistisch breukenonderwijs binnen mijn onderzoeksdomein zoals het beschreven is in de *Proeve*, hoe deze methoden zijn geïnterpreteerd binnen de realistische methode die ik heb geëvalueerd, en hoe kinderen die met deze methode hebben gewerkt met breuken rekenen. Op grond van deze informatie heb ik de strategieën bepaald die kinderen leren om problemen binnen het domein op te lossen. Ook heb ik geëxtraheerd op welke manieren het fout kan gaan. Deze goede en slechte strategieën, die ik in mijn model heb geïmplementeerd, zal ik in de laatste paragraaf van dit hoofdstuk bespreken.

4.1 Keuze voor een onorthodoxe manier van modelleren

In de meeste gevallen waarin het leren van een cognitieve vaardigheid gemodelleerd is in ACT-R, worden de resultaten van het model vergeleken met die van mensen die dezelfde taak uitvoeren. In mijn geval bleek dit onmogelijk, doordat er geen exacte data bekend zijn van kinderen die volgens een realistische methode leren rekenen met breuken. Er is uiteraard het onderzoek van Streefland, maar dit leent zich niet bijzonder goed voor modelleren. Hoewel er verschillende sommen uitgebreid besproken worden, wordt er in zijn onderzoek geen compleet beeld gegeven van welke sommen er wanneer gemaakt zijn en wat de gemiddelde resultaten waren.

Daarnaast waren de resultaten van Streeflands onderzoek positief. Het modelleren van dit onderzoek zou, als het al mogelijk zou zijn, dus ook positieve resultaten moeten opleveren. Het doel van mijn onderzoek is juist om te proberen een verklaring te geven waarom de resultaten *niet* zo goed zijn als men op grond van o.a. Streeflands onderzoek zou verwachten.

Een andere optie zou zijn om zelf data te verzamelen. Dit bleek echter niet haalbaar binnen de tijd van mijn onderzoek. Het leerproces dat ik gemodelleerd heb beslaat ongeveer een jaar. Het zou dus ook minstens zo veel tijd hebben

gekost om de benodigde data te verzamelen.

Daarom heb ik ervoor gekozen de strategieën die in een realistische methode worden aangeleerd te extraheren uit de methode en te implementeren in een model. Ondanks het feit dat ik de resultaten van mijn model niet kan vergelijken met in werkelijkheid behaalde resultaten, hoop ik toch in zijn algemeenheid iets te kunnen zeggen over de zwakke punten in realistisch breukenonderwijs.

Naast bovengenoemd nadeel aan mijn manier van modelleren, kleeft er ook een voordeel aan. Eén van de zwakke punten van realistisch rekenonderwijs is al naar voren gekomen in eerder onderzoek (zie Klein, p26), nl. die van de kritieke rol van de leraar. Wanneer er data wordt verzameld van één specifieke groep kinderen worden de resultaten van deze groep voor een groot deel bepaald door de rol die de leraar heeft gespeeld binnen dit onderzoek. Door het modelleren van de strategieën die in een rekenmethode worden aangeleerd wordt er waarschijnlijk een objectiever beeld verkregen van de werking van deze strategieën dan wanneer dergelijke data zou worden gebruikt.

4.2 Keuze voor het gebruik van de methode *Pluspunt*

De rekenmethode die ik heb gebruikt voor mijn onderzoek is de methode *Pluspunt*. Dit is een van de meest gebruikte realistische methoden.

Methodecategorie/methode	Jaargroep			
	6	7	8	8 ('92)
Traditionele reken-wiskundemethoden				
• Naar aanleg en tempo	0,0	0,0	0,4	2,6
• Naar zelfstandig rekenen	3,8	5,3	6,3	15,4
• Nieuw rekenen	0,0	0,4	0,4	6,1
• Niveaucursus rekenen	0,4	0,4	0,4	4,8
Realistische reken-wiskundemethoden				
• Rekenwerk	4,2	4,5	4,3	2,7
• Rekenen en wiskunde	21,3	21,3	22,1	10,3
• De wereld in getallen (oude versie)	19,2	20,9	20,6	20,5
• De wereld in getallen (nieuwe versie)	14,2	12,7	11,1	0,0
• Pluspunt	20,4	15,2	11,9	0,0
• Operatoir rekenen (nieuwe versie)	2,1	2,5	2,8	0,0
• Taltaal	1,3	1,2	1,2	3,2
Operatoir rekenen (oude versie)	11,7	14,3	17,0	31,1
Overige methoden	1,7	1,2	1,6	3,3

Figuur 4.1: gebruikte methoden op basisscholen in Nederland, 1997 (% scholen per methode). Overgenomen uit "Balans van het reken-wiskundeonderwijs aan het einde van de basisschool 3"

In 1997 werd deze methode op 12 % van de scholen in groep 8 gebruikt. (Balans van het reken-wiskundeonderwijs, 1997). Op dit moment zal dat echter

meer zijn, want zoals in figuur 4.1 te zien is, was de methode in 1997 erg in opkomst. In groep 6 werd het op dat moment al door 20 % van de scholen gebruikt. Het is hiermee dan wel niet de meest gebruikte, maar zeker één van de meest gebruikte rekenmethoden in het basisonderwijs op dit moment.

Pluspunt is dus een veelgebruikte, realistische rekenmethode. Deze methode wordt onder andere gebruik op c.b.s. "de Loopplank", een basisschool in Blijham. Deze school was bereid haar lesboeken en handleidingen aan mij uit te lenen voor dit onderzoek, en werkte tevens mee aan een test onder kinderen van groep 7 en 8. Dit maakte het mogelijk om ook een beeld te krijgen van hoe kinderen die les krijgen volgens deze methode met breuken rekenen.

4.3 De afbakening van het onderzoeksdomein

Het domein waarbinnen mijn onderzoek zou plaatsvinden moest zorgvuldig afgebakend worden. Het moest aan een aantal belangrijke voorwaarden voldoen.

Ten eerste zou kennis van de wereld niet een te grote rol moeten spelen bij de te modelleren vaardigheid. Het implementeren van te veel 'common sense' in een ACT-R model is een grote, zo niet onmogelijke opgave.

Ook moest de gekozen vaardigheid vrij goed te isoleren zijn van andere vaardigheden binnen het rekenen met breuken, om het model beperkt genoeg te houden. Aangezien het één van de belangrijke doelen binnen realistisch rekenonderwijs is om leerlijnen zo veel mogelijk te verstrengelen, moest er zorgvuldig gezocht worden naar een vaardigheid waarvan de isolatie zo min mogelijk ten koste zou gaan van een breed begrip van breuken.

Om tot de uiteindelijke domeinafbakening te komen heb ik ten eerste de kerndoelen voor het basisonderwijs voor het onderdeel breuken bekeken. Vervolgens heb ik zowel in de *Proeve* als in de realistische methode die ik heb gebruikt gekeken naar de methoden die gebruikt worden om deze doelen te bereiken. Op grond van deze beschouwingen heb ik een keuze gemaakt voor het onderwerp van mijn model.

4.3.1 De kerndoelen voor het basisonderwijs - breuken

De huidige kerndoelen voor het basisonderwijs stellen dat aan het eind van het basisonderwijs 75 % van de kinderen de volgende onderdelen goed dient te beheersen: (kerndoelen basisonderwijs, 1998)

1. De leerlingen begrijpen het verband tussen verhoudingen, breuken en decimale breuken.

2. De leerlingen weten dat aan een breuk en een decimale breuk op verschillende manieren betekenis kan worden gegeven.

3. De leerlingen kunnen breuken en decimale breuken op een getallenlijn plaatsen en breuken in decimale breuken omzetten, ook met een rekenmachine.

4. De leerlingen kunnen in eenvoudige toepassingssituaties, met gebruikmaking van modellen eenvoudige breuken en decimale breuken vergelijken, optellen, aftrekken, delen en vermenigvuldigen.

In deze kerndoelen worden breuken en decimale breuken in één adem genoemd. De eerste afbakening van mijn onderzoeksterrein bestaat erin dat ik me alleen heb geconcentreerd op 'echte' breuken. Decimale breuken laat ik buiten beschouwing. Ik heb me geconcentreerd op het laatstgenoemde kerndoel, en wel met name op het vergelijken en optellen van breuken.

4.3.2 De keuze voor het vergelijken en optellen van breuken

Er zijn verschillende redenen voor mijn keuze om het vergelijken en optellen van breuken te gaan modelleren. In deze paragraaf zal ik met deze redenen mijn keuze globaal proberen te motiveren. Later zal ik dieper ingaan op de leerlijnen die ik heb gevonden voor het optellen van breuken.

- In het optellen van breuken is een geleidelijke opbouw zichtbaar, waarin duidelijke fasen te onderscheiden zijn. Deze opbouw wordt ruwweg verspreid over drie jaar, maar het zwaartepunt ligt binnen één jaar. Een dergelijke duidelijke opbouw wordt bij de andere leerlijnen niet gevonden. De structuur in het leerproces maakt het makkelijker de kennis te structureren in een model.

- Voor het optellen van breuken wordt gebruik gemaakt van een op een redelijk manier te abstraheren en te beperken kennis van de realiteit voor zijn oplossingsmethoden. Dit is van belang gezien de beperkingen van ACT-R op het gebied van een goede interpretatie van de wereld. Hoe minder kennis van de wereld het model nodig heeft, hoe beter. Bij de breuk als verhouding wordt bijvoorbeeld gebruik gemaakt van een tafelschikkingsmodel, waarbij beredeneerd wordt dat als 8 mensen samen vier pizza's eten, en je verdeelt de mensen en pizza's over twee vierpersoons tafels in plaats van één achtpersoons tafel, ze nog steeds evenveel pizza krijgen. Om dergelijke sommen te kunnen modelleren in ACT-R moet een heleboel wereldkennis over pizzeria's, de hoeveelheid plaats aan een tafel, eerlijk delen, etc. geïmplementeerd worden. Op dat moment wordt het risico dat je een deel van de oplossing onterecht in je representatie stopt ook groter. De beperkte kennis van de wereld die nodig is voor het optellen van breuken is daarom een groot voordeel.

- Het vergelijken en optellen van breuken is vrij goed te isoleren van andere rekenkundige toepassingen. Zou je bijvoorbeeld het plaatsen van een breuk op een getallenlijn modelleren, zou het model ook te maken krijgen met verdelen, groter of kleiner zijn van breuken, het optellen van breuken, etc. Hierdoor wordt zou het model te groot en te gecompliceerd worden mijn onderzoek.

- De vereiste rekenkundige voorkennis voor het optellen van breuken is vrij eenvoudig te implementeren. Het bleek alleen noodzakelijk te zijn om de tafels van vermenigvuldiging, het optellen van natuurlijke getallen en het vergelijken van natuurlijke getallen te implementeren. Hierbij was het minder van belang op welke wijze het model deze vaardigheden beheerst. Ze zijn slechts hulpmiddelen, of afleidingen, bij het oplossen van sommen

met breuken. Daardoor konden deze vaardigheden voor het overgrote deel als declaratieve feiten worden opgenomen.

4.3.3 De keuze voor het modelleren van groep 7

Er zijn twee redenen waarom ik heb gekozen voor het modelleren van groep 7. Deze hangen nauw samen met de in de vorige paragraaf genoemde redenen voor mijn keuze voor het optellen van breuken.

- Ten eerste ligt het zwaartepunt van het leren optellen met breuken in groep 7. In groep 6 wordt het optellen van breuken wel geïntroduceerd maar ligt er weinig nadruk op. In groep 7 vinden we echter eigenlijk alle fasen van het optellen met breuken terug. Aan het einde van groep 7 wordt het optellen met ongelijknamige breuken geïntroduceerd. Hierop wordt in groep 8 nog doorgegaan. Het optellen van breuken hoeft aan het eind van groep 7 dan ook nog niet volledig beheerst te worden, maar wel zijn alle aspecten van het optellen van breuken aan bod geweest.

- Daarnaast zijn de modellen die kinderen nodig hebben voor het optellen met breuken als het goed is inmiddels aangeleerd. Veel van de activiteiten met breuken in de groepen 5 en 6 zijn direct of indirect gericht op het creëren van dergelijke modellen. In deze groepen wordt gewerkt met fysieke objecten waaronder bijvoorbeeld stroken, wordt veel gekleurd of gemeten en wordt gebruik gemaakt van realistische situaties, zowel in contexten als in de realiteit. Dit zorgt er als het goed is onder andere voor dat kinderen modellen voor breuken hebben ontwikkeld en weten hoe ze daarmee kunnen werken. Het breukbegrip is hierdoor in groep 7 op een hoger niveau van abstractie gekomen, wat het mogelijk maakt om het optellen met breuken zoals het in deze groep geleerd wordt te kunnen modelleren zonder al te veel kennis van de wereld nodig te hebben.

4.4 Ontwikkeling van het model

Nadat de manier van modelleren bepaald is en het onderzoeksdomein is afgebakend kon het echte werk beginnen: het ontwikkelen van het model. Om het model te kunnen implementeren moesten eerst de te implementeren oplossingsstrategieën bekend zijn.

Deze strategieën heb ik geëxtraheerd uit de rekenmethode *Pluspunt*. De leermethode zoals die in deze methode wordt gevonden heb ik vergeleken met de methode zoals die wordt omschreven in de *Proeve*. De resultaten hiervan zal ik in de volgende paragraaf behandelen.

Ook heb ik gekeken naar de resultaten op het gebied van het optellen van breuken van kinderen die volgens deze methode les hebben gekregen. Dit levert inzicht op in de methoden die kinderen gebruiken om tot het goede antwoord op een vraag te komen, en welke foute methoden ze hebben gevolgd om op een fout antwoord te komen.

Op basis van de methoden die worden aangeleerd in *Pluspunt* en de strategieën en fouten van kinderen heb ik een model gemaakt van de verschillende

paden die kinderen kunnen volgen om een bepaalde som op te lossen. Dit model heb ik vervolgens geïmplementeerd in ACT-R.

In de volgende hoofdstukken zal ik de resultaten van mijn vergelijkend onderzoek tussen *Pluspunt* en de *Proeve* weergeven, en deze vergelijken met de praktijk zoals ik die gevonden heb op c.b.s. "de Loopplank". Ook zal ik het model met oplossingsstrategieën voor sommen uit elke fase van het leren optellen met breuken weergeven en uitleggen.

Hoofdstuk 5

De realistische onderwijsmethode voor het optellen van breuken

In dit hoofdstuk zal ik de realistische benadering voor het leren optellen van breuken proberen te beschrijven. Ik zal dit doen in 3 fasen. Ten eerste zal ik de methode zoals die wordt aangeraden in de *Proeve* uiteenzetten. Vervolgens zal ik beschrijven hoe deze methode is uitgewerkt in *Pluspunt*. Daarna zal ik de resultaten weergeven van een breukentoets die ik heb gehouden onder kinderen die via de methode *Pluspunt* les hebben gekregen. In de laatste paragraaf zal ik deze drie omschrijvingen naast elkaar leggen.

5.1 De theorie : de Proeve deel 3A - Breuken

De eerste onderwijsmethode die ik zal bespreken is die van de *Proeve*. Ik wil hierbij eerst ingaan op hun algemene didactiek ten aanzien van breuken, en vervolgens dieper ingaan op de didactiek ten aanzien van het optellen, aftrekken en vergelijken van breuken.

5.1.1 De algemene didactiek ten aanzien van het breukenonderwijs

Het centrale punt in de *Proeve*-didactiek voor breuken wordt gevormd door het *context-strook-model*. Dit model beslaat zowel het gebruik van de strook als visualisering van breuken, als het gebruik van contexten als model voor het rekenen met breuken, met name in situaties die betrekking hebben op (ver)delen en meten.

De kern van de proevedidactiek is als volgt samen te vatten

1. **Breuken worden geïntroduceerd via meten en eerlijk verdelen.** Door middel van eerlijk delen kun je breuken op een intuïtieve manier benaderen. Door het benoemen van de stukken van een verdeeld object wordt een breukentaal ontwikkeld. Er wordt een relatie gelegd tussen een breuk en een deling. Ook worden door de verschillende manieren

waarop je eerlijk kunt verdelen verbanden gelegd tussen de verschillende mogelijkheden. Zo kan door het verdelen van 3 repen onder 4 personen duidelijk worden dat $\frac{3}{4}$ gelijk is aan $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ en $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ en ook aan 3 x $\frac{1}{4}$. Ook het meten van objecten met een standaardstrook is een goede voorstelbare introductie van breuken. Een standaardstrook kan in een verschillend aantal stukken verdeeld zijn en helpt bij de ontwikkeling van een breukentaal. De strook die in drie stukken is verdeeld wordt de $\frac{1}{3}$-strook genoemd, degene die in vieren is verdeeld de $\frac{1}{4}$-strook, etc. Ook wordt er via meten betekenis gegeven aan de breuk als meetgetal. Iets kan bijvoorbeeld $\frac{2}{3}$ strook lang zijn.

2. **Breuken worden benoemd genoteerd.** Door het gebruiken van de strook als visualisatie kan er een objectgebonden voorstelling van een breuk worden gecreëerd. Deze verbinding wordt bevestigd door het benoemen van breuken ($\frac{3}{4}$ strook, $\frac{1}{3}$ reep). Pas later zal de breuk als rationeel getal gebruikt gaan worden.

3. **Breuken worden (globaal) gepositioneerd op een strook of een getallenlijn.** Het plaatsen van breuken op de getallenlijn wordt geïntroduceerd door het meten met een standaardstrook. Het globaal kunnen plaatsen van breuken op een getallenlijn levert inzicht op in hoe basisoperaties met breuken zullen uitpakken.

4. **Het rekenen met breuken, nl. het vergelijken, ordenen, situeren, verschil bepalen en optellen wordt ingebed in modelcontexten van meten met stroken en verdelen van repen en ondersteund door de (dubbelschalige) getallenlijn of strook.** In plaats van formele bewerkingen met breuken worden er informele bewerkingen gedaan op een strook of een reep. Een som als $\frac{3}{4}$ van 20 wordt bijvoorbeeld vertaald in het eerlijk verdelen van een reep van 20 stukjes onder 4 personen en het drie keer nemen van één zo'n portie. Ook wordt er gebruik gemaakt van bemiddelende grootheden voor het optellen, aftrekken en vergelijken van breuken.

5. **Equivalentie speelt hierbij een kernfunctie.** Het inzicht in het feit dat verschillende breuken even groot zijn is van groot belang en wordt onder andere uitgelegd met behulp van stroken. Met de standaardstroken kan bijvoorbeeld gemeten worden dat $\frac{1}{3}$ even groot is als $\frac{2}{6}$. Verder wordt er gebruik gemaakt van 'schuilnamen' of 'wikkelnamen' om breuken gelijknamig te maken. Het bepalen van $\frac{1}{3}$ deel van een niet-onderverdeelde reep is voor kinderen vaak makkelijker dan het verdelen van een reep met onderverdeling. $\frac{1}{3}$ wordt door sommige kinderen geïnterpreteerd als '1 van de 3' inplaats van '1 van elke 3'. Deze kinderen representeren $\frac{1}{3}$ dan als 1 van de eerste drie blokjes van de reep. Met behulp van 'wikkelnamen' en 'eigennamen' kan duidelijk worden laten zien dat $\frac{1}{3}$ hetzelfde is als $\frac{4}{12}$. Wat met de wikkel nog om de reep $\frac{1}{3}$ deel lijkt te zijn, blijkt ineens $\frac{4}{12}$ reep te zijn als de wikkel van de reep af is en de 12 blokjes waaruit de reep bestaat zichtbaar worden. $\frac{1}{3}$ is dus een wikkelnaam of schuilnaam van $\frac{4}{12}$.

5.1.2 De didactiek ten aanzien van optellen, aftrekken en vergelijken

De basisoperaties van vergelijken, optellen en aftrekken moeten volgens de *Proeve* geïntroduceerd worden via het deel-geheel aspect van breuken, in de context van het verdelen van chocoladerepen.

Voor het kunnen optellen, aftrekken en vergelijken van breuken is het ten eerste van belang dat je deze breuken 'gelijknamig' krijgt. In de context van het verdelen van chocoladerepen wordt dit gedaan door het aantal stukjes te vinden dat een reep moet hebben, bijvoorbeeld om hem zowel door 2 als door 3 te kunnen delen. Is het aantal stukjes van de reep eenmaal bepaald, dan kunnen er sommen mee gemaakt worden. Bijvoorbeeld:

Jan heeft $\frac{1}{3}$ reep gegeten.
Piet heeft $\frac{1}{4}$ reep gegeten.
Hoeveel stukjes zou een reep hebben waarvan je zowel $\frac{1}{3}$ deel als $\frac{1}{4}$ deel kunt afnemen?

Ook de sommen zelf vinden binnen de context van het verdelen van chocoladerepen plaats. Bijvoorbeeld:

Wie heeft er het meest gegeten, Jan of Piet?
Hoeveel meer heeft de één op dan de ander?
Hoeveel hebben ze samen opgegeten?
Hoeveel is er nu nog over?

Deze vragen mogen beantwoord worden in blokjes (Jan heeft 1 blokje meer gegeten dan Piet), oftewel in gehele getallen, maar ook in de vorm van een breuk (Jan heeft $\frac{1}{12}$ reep meer gegeten dan Piet).

De breuk wordt in dit soort vragen altijd benoemd. Dit voorkomt verwarring over de eenheid. Als zowel Jan als Piet een reep van 12 blokjes hebben, zouden kinderen ten onrechte kunnen denken dat ze samen 7 van de 24 blokjes, dus $\frac{7}{24}$ deel hebben gegeten. Door het benoemen van de eenheid, zullen de kinderen deze fout minder snel maken. Ze weten dat het om een reep van 12 stukjes gaat, dus zullen ze bij het antwoord ook uitgaan van een totaal van 12 stukjes.

Om de relatie met eerlijk delen zo goed mogelijk te laten zien, worden er in het begin alleen stambreuken voor de sommen gebruikt. Een stambreuk wordt door kinderen makkelijker geassocieerd met delen. Zo wordt $\frac{1}{2}$ geassocieerd met delen door 2.

Met samengestelde breuken wordt deze verbinding vaak niet gelegd. Daarom moeten bewerkingen met samengestelde breuken behoedzaam geïntroduceerd worden. Dit kan bijvoorbeeld gedaan worden door eerst een opgave met stambreuken te geven, en vervolgens het complementaire vraagstuk.

Het ene kind heeft $\frac{1}{3}$ reep, het andere kind $\frac{1}{4}$ reep.
Hoeveel stukjes heeft de hele reep?
Hoeveel is het verschil?

Het complementaire vraagstuk hierbij kan dan zijn:

> Het ene kind heeft $\frac{2}{3}$ reep opgegeten, het andere $\frac{3}{4}$ reep.
> Hoeveel stukjes heeft een hele reep?

De bedoeling is dat kinderen uiteindelijk vanuit het indirecte rekenen met een bemiddelende grootheid overgaan naar direct rekenen. In deze ontwikkeling zijn de volgende fasen te onderscheiden:

indirect rekenen Er wordt gerekend met gehele getallen. Een reep wordt opgedeeld in blokjes, en de bewerkingen worden op deze blokjes uitgevoerd. Het antwoord wordt ook in gehele getallen (blokjes) gegeven. Het antwoord op de som $\frac{1}{4} + \frac{2}{3}$ zal bij indirect rekenen als volgt worden gevonden:

1. vind een reep die zowel in drieën als in vieren kan worden verdeeld.
2. een reep van 12 blokjes kan zowel in drieën als in vieren worden verdeeld.
3. $\frac{1}{4}$ is 3 blokjes, $\frac{2}{3}$ is 8 blokjes.
4. het antwoord is $3 + 8 = 11$ blokjes

semi-direct rekenen Omdat een antwoord in stukjes weinig zegt (je weet niet hoe groot de stukjes zijn, stukjes van een $\frac{}{4}$ -reep zijn groter dan bijvoorbeeld stukjes van een $\frac{}{12}$ -reep) moet er van het indirecte rekenen een overgang plaatsvinden naar het directe rekenen. Dit gebeurt via de introductie van de 'wikkelnaam' en de 'eigennaam'. De wikkelnaam van een breuk is de naam die hij heeft als de wikkel nog om de reep zit, bijvoorbeeld $\frac{1}{4}$. Haal je de wikkel eraf, en wordt het aantal stukjes dat de reep heeft zichtbaar, dan kun je de 'eigennaam' van de breuk bepalen. In dit geval $\frac{3}{12}$. Het optellen van breuken via de semi-directe methode gaat als volgt:

1. de wikkelnamen moeten worden vervangen door eigennamen, want het gaat altijd over dezelfde soort repen, en dat is in de som nog niet terug te zien.
2. een $\frac{}{12}$ -reep kan zowel in drieën als in vieren worden verdeeld.
3. dus wordt $\frac{1}{4}$ reep vervangen door $\frac{3}{12}$ reep en $\frac{2}{3}$ reep door $\frac{8}{12}$ reep.
4. de uitkomst wordt dan $\frac{3}{12}$ reep + $\frac{8}{12}$ reep = $\frac{11}{12}$ reep.

direct rekenen Bij direct rekenen wordt alleen nog maar met de breuken gerekend, hoewel ze nog wel benoemd worden. Je weet dat de breuken dezelfde noemer moeten hebben om ze op te kunnen tellen, dus wordt de optelling gedaan via $\frac{1}{4}$ reep = $\frac{2}{8}$ reep = $\frac{3}{12}$ reep en $\frac{2}{3}$ reep = $\frac{4}{6}$ reep = $\frac{6}{9}$ reep = $\frac{8}{12}$ reep.

Er is ook nog een informele weg die het directe rekenen met breuken kan stimuleren; via het globale, schattende rekenen, waarbij bekende breuken, zoals $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ en $\frac{3}{4}$, dienst doen als ankerpunten. Bij vragen als 'is $\frac{3}{4}$ groter dan $\frac{1}{2}$?' kan het antwoord direct gevonden worden door $\frac{1}{2}$ om te zetten in $\frac{2}{4}$ (waarvan bekend is dat ze hetzelfde zijn).

5.1.3 Samenvatting van de Proeve-didactiek ten aanzien van het optellen van breuken

De belangrijkste punten in de Proeve-didactiek op het gebied van optellen met breuken zijn

- bewerkingen vinden plaats in de context van het verdelen van chocoladerepen of plakken.
- breuken worden benoemd genoteerd
- bewerkingen vinden eerst met stambreuken plaats en vervolgens pas met samengestelde breuken
- antwoorden mogen eerst in gehele getallen (blokjes) worden gegeven, maar er wordt gewerkt naar een directe vorm van rekenen waarbij er gewerkt wordt met gelijknamig gemaakte breuken.
- er wordt gebruik gemaakt van de strook (als reep of als plak) en de dubbelschalige getallenlijn als model.

5.2 De interpretatie: *Pluspunt*

5.2.1 Algemene didactiek van *Pluspunt*

De methode *Pluspunt* voor de groepen 7 en 8 is in 1993 verschenen. Dat is 1 jaar voordat deel 3A over breuken van de *Proeve* uitkwam. De methode kan dus wat breuken betreft niet op de *Proeve* gebaseerd zijn. Uiteraard kan de methode wel op de algemene beginselen van realistisch rekenonderwijs gebaseerd zijn, en hebben ze wel gebruik kunnen maken van deel 1 en 2 van de *Proeve* die respectievelijk in 1989 en 1990 zijn uitgekomen, en al het andere onderzoeksmateriaal over realistisch rekenonderwijs dat beschikbaar was.

Dit hebben ze ook gedaan. In de inleiding van de handleiding van *Pluspunt* staat hierover het volgende te lezen:

"Pluspunt sluit inhoudelijk aan bij ontwikkelingen binnen het vakgebied rekenen-wiskunde. Zo is er onder meer rekening gehouden met: de resultaten van de P.P.O.N. (periodieke Peiling van het Onderwijsniveau) en de 'Proeve van een Nationaal Programma' voor het reken-wiskundeonderwijs op de basisschool. De ontwikkeling van de methode is mede tot stand gekomen door deskundige kanttekeningen en verbeteringen door leerkrachten en leerlingen van de diverse experimenteerscholen. Pluspunt rekent zich tot de realistische methoden, mede op grond van de hieronder volgende vakinhoudelijke opsomming."

In de volgende vakinhoudelijke opsomming vinden we inderdaad een groot aantal elementen uit het realistisch rekenonderwijs terug.

contexten Er wordt in *Pluspunt* gewerkt met herkenbare contexten, die fungeren als een natuurlijke toegang tot de wiskunde, houvast vormen bij 'kale' rekensommen (kinderen kunnen zich een reële situatie voorstellen) en als toepassingsgebied voor de wiskunde.

modellen Modellen hebben binnen *Pluspunt* de functie van hulpmiddellen om een brug te slaan tussen de realiteit en de wiskunde. De modellen vormen hierbij een hulpmiddel, het werken met modellen is geen doel op zich. Er is een bewuste selectie gemaakt uit het grote aanbod van modellen.

interactief werken Met name in de leerkrachtgebonden lessen komt er interactie voor tussen leraren en leerlingen en tussen leerlingen onderling. Verschillende oplossingsmethoden voor sommen worden hierbij vergelijkenderwijs besproken. Ook tijdens het zelfstandig werken worden er mogelijkheden gecreëerd waarbij kinderen kunnen samenwerken. De leraar beschikt hierbij over een beperkt aantal momenten waarop hij ondersteuning kan verlenen, zodat langdurig zelfstandig werken wordt vermeden.

progressief schematiseren Schematiseren wordt binnen *Pluspunt* binnen het leerstofdomein cijferen toegepast. Hierbij zijn kinderen actief betrokken bij de tot standkoming van het eindalgoritme.

verwevenheid van leerstofdomeinen De verschillende leerstofonderdelen worden zoveel mogelijk in onderlinge samenhang met elkaar gebracht. Er ontstaat hierdoor geen verzameling van losse kenniseenheden, leerinhouden worden ingepast in de aanwezige kennis.

Deze omschrijving wekt de indruk dat *Pluspunt* wel degelijk gebruik maakt van elementen uit de realistische benadering. Het zwakste punt lijkt de toepassing van progressief schematiseren te zijn, hetwelk wordt toegepast binnen het domein cijferen. De omschrijving suggereert dat progressieve schematisatie in andere domeinen, zoals breuken, niet wordt toegepast.

5.2.2 De leerlijn voor breuken

In de handleidingen van *Pluspunt* wordt heel duidelijk omschreven wat er elk jaar binnen elk leerdomein wordt geleerd. Aan de hand van deze handleidingen wil ik een kort overzicht geven van de opbouw van het breukenonderwijs in *Pluspunt*. De breuken worden geïntroduceerd in groep 5, als de gemiddelde leerling 8 á 9 jaar oud is. Halverwege groep 8 wordt het breukenprogramma afgerond. De leerlingen zijn dan 11 à 12 jaar oud. Het zwaartepunt van het onderwijsprogramma ligt in de groepen 6 en 7.

Groep 5

In groep 5 worden breuken geïntroduceerd. In dit jaar zijn kinderen slechts handelend en vergelijken bezig met breuken, zonder ze te benoemen. De bedoeling hiervan is dat kinderen kennis maken met bepaalde aspecten van breuken en er betekenis aan kunnen geven. Het gaat hierbij om de volgende dingen:

- het verdelen van vormen in gelijke stukken
- het bij elkaar zoeken van delen die één geheel vormen
- eenvoudige bewerkingen met de breuk als operator (de helft van 100 is?)

- eerlijk delen
- vergelijken van verschillende manieren van eerlijk delen
- de introductie van de begrippen een tweede, een derde, een vierde, de helft en een kwart
- ontdekken dat een tweede deel hetzelfde is als de helft en een vierde als een kwart.

Groep 6

In groep 6 wordt veel aandacht besteed aan de begripsvorming bij breuken. Hierbij ligt het accent op het visueel maken van breuken en het benoemen in termen van breuknamen. Breuken komen in deze groep altijd informeel en in contexten aan de orde. Deze contexten hebben betrekking op verdeelsituaties, meetsituaties en verhoudingen.

Er wordt gebruik gemaakt van passend taalgebruik. Aangezien de meeste sommen opgelost kunnen worden via delen of een verhoudingstabel, blijkt dit ook uit het taalgebruik. $\frac{1}{4}$ deel van 48 knikkers is 48 knikkers verdelen over 4 kinderen, $\frac{3}{5}$ deel van een kralensnoer is 3 van elke 5 kralen.

De breuken worden benoemd. Er wordt bijvoorbeeld expliciet over $\frac{1}{5}$ deel *van een stokbrood* gesproken. Ook worden de breuknamen in eerste instantie voluit geschreven, dus als een-tweede en een-vierde. Pas later wordt de symbolische benaming gebruikt. Het benoemen van breuken en het vergelijken van stambreuken gebeurt in een context met stokbroden. Kinderen ontdekken hier dat een-vierde stokbrood groter is dan een-vijfde.

De naam van een breuk wordt in de eerste plaats afgeleid van het aantal delen waarin het geheel verdeeld wordt: de noemer. Om de betekenis van een breuknaam te accentueren wordt er aanvankelijk alleen met stambreuken gewerkt. De samengestelde breuk wordt geïntroduceerd in de context van het zwemmen van baantjes in het zwembad. De banen zijn door overhangende lijnen met vlaggetjes al onderverdeeld in stukken, zodat makkelijk te bepalen is welk deel van een baan is gezwommen. Ook de link met de getallenlijn wordt via deze context makkelijk gelegd.

Verder komen er in groep 6 afwisselend verschillende deelaspecten van het breukbegrip aan de orde, zoals het verhoudingsaspect, het meetaspect, het verdeelaspect en het rekengetal.

De breuk als meetgetal komt aan de orde in de context van lego-torens. De ene toren wordt gemeten aan de hand van de andere. Zo kan de gele toren $\frac{1}{3}$ deel van de blauwe toren zijn. Daarnaast komt ook het verhoudingsaspect in dezelfde context aan de orde. Van de 15 steentjes van een toren zijn er 10 wit. Dit is $\frac{2}{3}$ deel. De breuk als rekengetal komt aan de orde door het bepalen van een deel van een hoeveelheid.

Van het begin af aan worden alle getallen tot 10 als noemer voor de breuken gebruikt. Noemers groter dan 10 alleen als de context zich daarvoor leent.

Als modellen voor breuken maken de kinderen gebruik van

- meetkundige figuren (rechthoek, cirkel, driehoek, etc.)

- de getallenlijn
- de verhoudingstabel
- telbare hoeveelheden

Naast de breuk als deel van een hoeveelheid (breuk als rekengetal) wordt regelmatig een bemiddelende grootheid gebruikt om de koppeling met de modellen van een breuk als deel van een eenheid te bewaren. Zo kan de lengte of de prijs van een hele balk gekoppeld worden aan de delen van de balk.

Verder komt in groep 6 nog het vergelijken van breuken met verschillende noemers aan de orde, en wordt uitgelegd hoe de gelijkwaardigheid van breuken met behulp van de verhoudingstabel kan worden bepaald.

Omdat de nadruk ligt op de begripsvorming van breuken, worden de meeste activiteiten in leerkrachtgebonden lessen aangeboden. Er worden nog geen formele bewerkingen met breuken uitgevoerd. Optellen, aftrekken en vermenigvuldigen van breuken komt alleen op een informele wijze aan de orde, bijvoorbeeld bij het aanvullen tot een hele ($\frac{2}{7} + \frac{5}{7} = \frac{7}{7} = 1$) maar wordt nog niet in deze vorm genoteerd of in sommetjes geoefend.

Groep 7

In groep 7 wordt er steeds gezocht naar contexten waarin de kinderen de breuk kunnen benoemen en tegelijkertijd kunnen koppelen aan een modelmatige voorstelling.

In de eerste blokken van groep 7 wordt er, in aansluiting op groep 6, veel aandacht besteed aan de breuk als deel van een geheel of een hoeveelheid, en de plaats van breuken op de getallenlijn. Ook wordt de naam van de breuk benadrukt.

In het begin van groep 7 worden het vergelijken van gelijknamige breuken, het aanvullen tot 1, het optellen en het aftrekken van gelijknamige breuken aangeboden.

Ook het vermenigvuldigen van een breuk met een geheel getal komt al in het begin van groep 7 aan bod. Ook hier geldt dat de breuken worden aangeboden in een context die het de kinderen mogelijk maakt een voorstelling aan de breuk te koppelen.

De volgende stap is het vergelijken van ongelijknamige breuken. In blok 4 worden ongelijknamige breuken vergeleken in de context van bezette parkeerplaatsen bij een station. Hebben de kinderen in deze opgaven nog de steun van het aantal parkeerplaatsen als bemiddelende grootheid, op een later moment wordt een meer modelmatige aanpak gevolgd. Voor kinderen die daar behoefte aan hebben, blijft de benadering met behulp van een 'bemiddelende grootheid' beschikbaar. De leerkracht bespreekt de keuze voor een grootheid met de kinderen en stimuleert op die manier de koppeling met het model.

De introductie van het rekenen (optellen, aftrekken, verschil bepalen) met ongelijknamige breuken vindt plaats in blok 6. In een later stadium (blok 8) wordt het optellen van ongelijknamige breuken ondersteund door een context. Rekenen met ongelijknamige breuken betekent eerst gelijknamig maken. Dit is, met behulp van een verhoudingstabel, al in groep 6 aan de orde gesteld.

Naarmate de kinderen in de leerstof vorderen, komt meer nadruk te liggen op modelmatige oplossingen. In groep 7 wordt gekozen voor de dubbele getallenlijn en de strook als ondersteunende modellen en de verhoudingstabel als rekenmodel. Op een dubbele getallenlijn wordt bijvoorbeeld aan een grootheid een breukwaarde toegekend. Vervolgens wordt van de relatie met een andere grootheid gebruik gemaakt, bijvoorbeeld de relatie tijd-afstand: is er in 1 uur 560 kilometer afgelegd, dan is er in $\frac{1}{2}$ uur 280 kilometer afgelegd. Op deze manier kunnen ook ongelijknamige breuken met elkaar worden vergeleken.

De strook is goed te gebruiken bij het vergelijken van breuken, maar is bij het rekenen minder handig. Rekenen met de strook betekent het nauwkeurig kiezen van een maatverdeling die bij beide breuken past.

Om de vaardigheid van de kinderen in een aantal bewerkingen te automatiseren, worden opdrachten met eenvoudige breuken aangeboden.

Voor een goede begripsvorming worden het vermenigvuldigen met en het delen door een breuk aangeboden in concrete situaties. Het vermenigvuldigen van een breuk met een breuk is verwerkt in de context van het leggen van tegelpaden en terrassen die de kinderen uit eerdere leerjaren kennen. Het delen door een breuk wordt gerepresenteerd in de context van het uitschenken van een fles water in een aantal glazen met een kleinere inhoud.

Groep 8

In groep 8 blijft veel aandacht besteed worden aan het terugvertalen van de bewerking naar een context of model. De nadruk ligt op het optellen, aftrekken en vergelijken van eenvoudige (samengestelde) breuken.

In groep 7 is het optellen en aftrekken van gelijknamige en ongelijknamige breuken uitvoerig aan de orde geweest. Ook het hiermee samenhangende gelijknamig maken en vereenvoudigen hebben veel aandacht gekregen. Het betreft hier voornamelijk het optellen en vergelijken van breuken kleiner dan 1. In groep 8 wordt dit optellen, aftrekken en vergelijken herhaald, eerst in contexten, daarna kaal. Nu worden ook samengestelde breuken gebruikt.

Allerlei oplossingsmethoden, zoals het gebruik van een verhoudingstabel of een bemiddelende grootheid (handig aantal stukjes waarin een reep verdeeld is) worden herhaald. Ook komt het ondersteunend gebruik van de strook nog eens aan de orde.

Wat betreft het vermenigvuldigen en delen ligt de nadruk in *Pluspunt* ook op begripsvorming en eenvoudige bewerkingen. Het vermenigvuldigen van een breuk met een heel getal wordt benaderd vanuit het herhaald optellen: 3 x $\frac{3}{4}$ is $\frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}$. Dit komt in contexten regelmatig voor via het werken met recepten (voor 3 porties 3 x $\frac{3}{4}$ liter nodig). De verhoudingstabel biedt hierbij ondersteuning. Daarnaast worden deze vermenigvuldigingen ook als breukentafels aangeboden. ($1 * \frac{3}{5}$, $2 * \frac{3}{5}$, etc.) Kinderen kunnen hierbij gebruik maken van sprongen op de getallenlijn. Hieraan gekoppeld wordt aandacht besteed aan het helen eruit halen.

Het vermenigvuldigen van breuken in opdrachten als $\frac{1}{4} * \frac{1}{3}$ wordt gezien als een 'deel van een deel' situatie: $\frac{1}{4}$ deel van $\frac{1}{3}$ reep. Binnen de context van repen chocola met een verschillend aantal stukjes verkennen de kinderen hoe ze eenvoudig een deel van een deel nemen. Het aantal stukjes van de reep biedt

hiervoor steun. Door zelf een passend aantal stukjes te kiezen berekenen ze om hoeveel stukjes het gaat en benoemen ze dit opnieuw als deel van de reep. Dit is een bewerking die bij de breuk als operator en bij het optellen en aftrekken ook veel aan de orde is geweest. Het gaat er hier vooral om dat kinderen via zoeken tot de constatering komen dat een veelvoud van de gebruikte noemers handig gebruikt kan worden om het probleem op te lossen. De regel: 'teller x teller en noemer x noemer' wordt niet expliciet aangeboden maar kinderen kunnen hem wel zelf ontdekken. Het rechthoekmodel wordt als ondersteunend model gebruikt.

Het delen met breuken wordt in de eerste helft van groep 8 beperkt tot eenvoudige delingen van een geheel getal door een breuk, met als uitkomst een heel getal (vb $15 : \frac{3}{4}$) en van een breuk door een geheel getal. Is er in groep 7 al een aanzet gegeven tot het delen van een heel getal door een breuk, in groep 8 wordt dit nog eens binnen een context herhaald en vervolgens wordt dit opgevat als een vorm van handig rekenen.

Vanaf blok 3 wordt deze aanpak voortgezet op een formeler en abstracter niveau. *Pluspunt* beschouwt het rekenen met breuken in blok 3 als afgerond. De opbouw van de leerstof bereikt in dit blok het minimum onderwijsdoel. In verdere blokken vindt verdere verdieping en abstrahering plaats. Daarnaast worden de volgende onderdelen, vanuit een context, aangeboden:

- het vermenigvuldigen van een breuk met een samengestelde breuk. Dit wordt gedaan vanuit een context en met behulp van de verdeelregel.
- Het vermenigvuldigen van een samengestelde breuk met een samengestelde breuk. Ook opgaven als $2\frac{1}{4} * 3\frac{1}{2}$ worden voornamelijk met behulp van de verdeelregel opgelost.
- het delen van een heel getal door een breuk en andersom.

Er wordt tenslotte ook veel aandacht besteed aan de relatie tussen breuken en andere leerstofdomeinen. Het belang van breuken komt bijvoorbeeld naar voren in de relatie met procenten. Percentages berekenen door middel van een omzetting naar een breuk en omgekeerd maakt het rekenen eenvoudiger. Aan de relatie tussen breuken en kommagetallen wordt expliciet aandacht besteed. Dit gebeurt voornamelijk in de context van meten, waarbij een maatbeker als ondersteuning wordt gebruikt. Bij inhouden worden immers zowel breuken als kommagetallen als aanduidingen gebruikt. Indirect wordt hiermee de getallenlijn als model gebruikt. Via de begrippen dl. cl. en ml. wordt een koppeling gemaakt met tienden, honderdsten en duizendsten. De kinderen moeten de meest voorkomende breuken kunnen omzetten in decimale breuken en omgekeerd; ze kunnen daarbij gebruik maken van de verhoudingstabel. Bij lastige breuken mogen ze hiervoor gebruik maken van de rekenmachine.

5.2.3 Het gebruik van modellen in *Pluspunt*

In de groepen 5 en 6 is een aantal modellen van breuken aangeleerd. Deze modellen worden gebruikt als houvast bij de optelsommen en als middel om de materie inzichtelijk te maken. Het gaat daarbij om de volgende modellen:

- de strook
- de verhoudingstabel
- de getallenlijn
- de dubbele getallenlijn
- een bemiddelende grootheid

De strook

De strook is een manier om breuken te visualiseren. Het verdient de voorkeur boven bijvoorbeeld een cirkel, omdat een strook op eenvoudige wijze in elk willekeurig aantal stukken te verdelen is, en gekleurde delen van stroken makkelijker zijn te vergelijken. De strook is in de groepen 5 en 6 veelvuldig aan de orde gekomen in opgaven als: kleur $\frac{1}{6}$ deel, of welk deel van de strook is gekleurd. De strook is een handig hulpmiddel bij het vergelijken van breuken, en bij het optellen en aftrekken van gelijknamige breuken onder de 1. Zodra sommen een uitkomst boven de 1 hebben, is het gebruik van stroken lastiger, omdat er meerdere stroken nodig zijn. In dit geval is het gebruik van een getallenlijn waarschijnlijk handiger.

De verhoudingstabel

De verhoudingstabel wordt niet alleen voor het onderdeel breuken, maar ook voor het onderdeel verhoudingen gebruikt in *Pluspunt*. Het is niet zozeer een model van het breuk-concept, maar meer een rekenmodel. Een verhoudingstabel bestaat uit twee rijen, waarin een verhouding staat geschreven, bijvoorbeeld 2 : 3. In een verhoudingstabel is deze verhouding uit te breiden naar equivalente verhoudingen. 2 : 3 is gelijk aan 4 : 6, etc. Uiteraard kan dit ook de andere kant op. Er worden sommen gevraagd als wat de verhouding is tussen het aantal jongen en meisjes op de zwemclub als 6 van de 18 leden een meisje is. In dit geval wordt 6 : 12 ingevuld in de verhoudingstabel en verkleind naar 3 : 6 en 1 : 2. Voor breuken is de verhoudingstabel een handig rekenmiddel bij het zoeken naar gelijknamige breuken.

De getallenlijn

Ook het plaatsen van breuken op de getallenlijn en het benoemen van een plek op de getallenlijn zijn in de groepen 5 en 6 veelvuldig aan de orde gekomen. Ook in groep 7 wordt hier nog mee geoefend. De getallenlijn is een handige manier om kinderen inzicht te geven in de breuk als rationeel getal. Ze kennen de getallenlijn al als representatie voor natuurlijke getallen, en door breuken ook op de getallenlijn te representeren wordt ook hun plaats en verhouding ten opzichte van de natuurlijke getallen duidelijk. Dat kinderen dit inzicht krijgen is ook één van de kerndoelen van het breukenonderwijs.

De getallenlijn kan in bijna alle gevallen gebruikt worden als hulpmiddel. Zo kan het worden gebruikt bij het aanvullen tot 1. De getallenlijn moet daarvoor in handige stukken worden opgedeeld, en de gevraagde breuk moet op de lijn

worden aangegeven. Daarna kan worden geteld hoeveel stukken de breuk nog van 1 verwijderd is. In dit geval werkt de getallenlijn als hulpmiddel in feite hetzelfde als de strook. Ook hierbij gaat het om het opdelen in stukken, en het tellen van de stukken die nog nodig zijn om tot 1 te komen.

De getallenlijn kan ook voor het optellen en aftrekken van gelijknamige breuken een handig hulpmiddel zijn. Ook hierbij is het gebruik erg vergelijkbaar aan dat van de strook, met als bijkomend voordeel dat ook als de som van de breuken boven de 1 komt, de getallenlijn eenvoudig te gebruiken is. Deze hoeft immers niet op te houden bij 1, maar kan uitgebreid worden. Voor sommen boven de 1 zal de getallenlijn dan ook handiger zijn dan de strook als model.

Ook voor het vergelijken van breuken kan de getallenlijn, wederom net als de strook, een handig hulpmiddel zijn. Dit kan door de twee te vergelijken breuken in te tekenen op dezelfde lijn. Hierdoor wordt zichtbaar welke breuk groter is. Ook kan het, meer analoog aan het gebruik van de strook, zichtbaar worden gemaakt door op de twee verschillende, onder elkaar gezette getallenlijnen de gevraagde breuken aan te geven. Dit is wellicht makkelijker, omdat dan niet op een lijn twee verschillende onderverdelingen hoeven worden gemaakt.

Gelijknamig maken van breuken is ook te verhelderen met een getallenlijn, hoewel het niet altijd een makkelijke manier is om breuken gelijknamig te maken. Wel kan op een getallenlijn worden aangetoond dat $\frac{1}{4}$ en $\frac{2}{8}$ even groot zijn, aangezien ze op dezelfde plek op de getallenlijn staan. Dit geldt uiteraard ook weer voor de strook.

De dubbele getallenlijn

Naast de getallenlijn bestaat ook nog de dubbele getallenlijn. Dit is een soort tussenvorm tussen een abstracte representatie van breuken op een getallenlijn, en een koppeling van een breuk aan een grootheid. Op de dubbele getallenlijn staan zowel de breukwaarden als de natuurlijke getallen vermeld. Zo kan een lijn bijvoorbeeld van 0 tot 1 lopen en van 1 tot 48. Op een derde staan zowel de waarden $\frac{1}{3}$ als 16.

De bemiddelende grootheid

Een bemiddelende grootheid is een handig getal waarmee het rekenen met breuken kan worden getransformeerd naar het rekenen met gehele getallen. In de *Proeve* werd zo'n bemiddelende grootheid bijvoorbeeld gebruikt in de vorm van een handig aantal stukjes chocola waaruit een reep bestaat. In *Pluspunt* kan er soms door de kinderen zelf een handige hoeveelheid worden gezocht, en wordt deze soms al meegegeven. In plaats van stukjes van een chocoladereep wordt er in *Pluspunt* daarbij vaak gebruik gemaakt van andere handige ondermaten, zoals kratten waarin 24 flesjes passen, of eierdozen met een onderverdeling van 12. Opvallend is dat in *Pluspunt* het gebruik van een bemiddelende grootheid in het begin van groep 7 niet meer gestimuleerd, en zelfs ontmoedigd wordt, terwijl er aan het eind van groep 7 een heleboel sommen worden gegeven waarbij een bemiddelende grootheid wordt meegegeven.

5.2.4 Het optellen van breuken in *Pluspunt*

Naar aanleiding van bovengenoemd overzicht, en na uitvoerige bestudering van de lesboeken en handleiding ben ik tot de volgende analyse gekomen van de leermethode voor het optellen van breuken zoals die wordt gevonden in de methode *Pluspunt*:

Er zijn in *Pluspunt* 4 stadia te onderscheiden waarin het optellen en aftrekken van breuken wordt geleerd. De vaardigheden worden ruwweg in deze volgorde aangeleerd, maar daarbij vindt een heleboel overlap plaats. Nieuwe vaardigheden worden aangeleerd terwijl oude vaardigheden nog herhaald worden om deze te automatiseren. Omdat elke fase zijn eigen soort sommen en eigen oplossingsmethoden heeft, zal ik ze apart bespreken. Ik zal hierbij het aftrekken van breuken zoveel mogelijk buiten beschouwing laten, aangezien ik dit niet heb gemodelleerd.

De stadia waarin het optellen van breuken is onder te verdelen zijn:

- aanvullen tot 1
- optellen van gelijknamige breuken
- ongelijknamige breuken vergelijken
- optellen van ongelijknamige breuken

Het aanvullen van breuken tot 1

Het optellen van breuken begint in groep 6, met het aanvullen van breuken tot 1. Het aanvullen van breuken to 1 is een op zich eenvoudige bewerking, die in feite een verkapte vorm van aftrekken is. Het aanvullen van $\frac{2}{3}$ tot 1 is in feite het aftrekken van $\frac{2}{3}$ van 1. Een strook kan hierbij dienst doen als ondersteunend model. Hierdoor wordt de breuk zichtbaar gemaakt, en is het aanvullen tot 1 in feite een kwestie van het tellen van hokjes geworden. De getallenlijn functioneert eigenlijk op dezelfde wijze. Er wordt een handige onderverdeling aangegeven, bijvoorbeeld in drieën, er wordt aangegeven waar je je op de getallenlijn bevindt, en door te kijken en te tellen kun je het antwoord eenvoudig vinden. Ook een dubbele getallenlijn met bemiddelende grootheid kan worden gebruikt. Dit is een tussenvorm voor het gebruiken van een bemiddelende grootheid en het gebruiken van een getallenlijn. Via een bemiddelende grootheid zet je de breuk om naar een geheel getal, bepaal je hoeveel $\frac{2}{3}$ van deze hoeveelheid is en trek je dit van de totale hoeveelheid af. Het gevonden getal zet je vervolgens weer om in een breuk. Dit is nogal een omslachtige methode, en wordt dan ook nauwelijks gebruikt.

Optellen van gelijknamige breuken

Het optellen van gelijknamige breuken is de eenvoudigste vorm van optellen van breuken. Hierbij kan gebruik worden gemaakt van de getallenlijn, de dubbele getallenlijn, de strook of een handige grootheid. Voor de strook en de getallenlijn geldt weer dat er een handige onderverdeling moet worden gevonden, de

eerste breuk in de strook of op de lijn wordt getekend, en de tweede breuk er bij komt. Het antwoord is door tellen of kijken weer te vinden. Bij de getallenlijn geldt wel dat deze handiger is bij sommen waarbij de uitkomst boven 1 ligt. Via een handige grootheid zet je breuken om in gehele getallen, tel je deze op, en reken je het antwoord vervolgens om naar een breuk. De dubbele getallenlijn is een tussenvorm.

Ongelijknamige breuken vergelijken

Voordat er vervolgens ongelijknamige breuken worden opgeteld, leren kinderen eerst om ongelijknamige breuken te vergelijken. Dit kan als een inleiding op het optellen van ongelijknamige breuken worden gezien. Bij de introductie van het vergelijken van ongelijknamige breuken wordt gebruik gemaakt van verhoudingstabellen. Met deze tabellen worden de breuken gelijknamig gemaakt, waarna ze makkelijk te vergelijken zijn. Deze vaardigheid is ook nodig voor het kunnen optellen van ongelijknamige breuken. Vaak wordt een vergelijkingssom dan ook gevolgd door een aftreksom. Wat is groter, $\frac{1}{3}$ of $\frac{1}{4}$, en wat is het verschil?

Maar voor het vergelijken van breuken is het niet noodzakelijk ze gelijknamig te maken. Het is ook mogelijk om beide breuken in te kleuren in een strook en te vergelijken welke strook het meest gekleurd is. Of ze beide op een getallenlijn te zetten en te kijken welke het dichtst bij 1 staat. En uiteraard is het ook bij het vergelijken van breuken mogelijk gebruik te maken van een bemiddelende grootheid.

Optellen van ongelijknamige breuken

Als breuken gelijknamig kunnen worden gemaakt, kunnen ook ongelijknamige breuken worden opgeteld. Dit gaat dan equivalent aan het optellen van gelijknamige breuken. Voor het gelijknamig maken van breuken wordt de verhoudingstabel gebruikt. Ook is het mogelijk om twee ongelijknamige breuken op te tellen via een bemiddelende grootheid. Deze moet dan wel handig gekozen worden, zodat beide breuken er makkelijk in kunnen worden omgezet. In veel gevallen wordt in *Pluspunt* deze bemiddelende grootheid al meegegeven. Een andere mogelijkheid om twee ongelijknamige breuken op te tellen is door een strook of getallenlijn met handige onderverdeling te gebruiken. De strook of de lijn wordt hierbij zo verdeeld dat beide breuken er in te tekenen zijn.

5.2.5 Sommen en modellen

Hieronder geef ik een kort overzicht van de verschillende soorten sommen met de te gebruiken modellen:

1. aanvullen tot 1
    a. de strook
    b. de getallenlijn
    c. de dubbele getallenlijn
    d. een bemiddelende grootheid

2. optellen en aftrekken van gelijknamige breuken
    a. de strook
    b. de getallenlijn (voorkeur voor sommen boven 1)
    c. de dubbele getallenlijn
    d. een bemiddelende grootheid
3. ongelijknamige breuken vergelijken
    a. de strook
    b. de getallenlijn
    c. de dubbele getallenlijn
    d. een bemiddelende grootheid
    e. de verhoudingstabel
4. optellen van ongelijknamige breuken
    a. de verhoudingstabel in combinatie met getallenlijn of strook.
    b. een strook met handige onderverdeling
    c. een getallenlijn met handige onderverdeling
    d. een bemiddelende grootheid

5.3 De *Proeve* en *Pluspunt* naast elkaar gelegd

Uit de beschrijvingen van de didactiek ten aanzien van het optellen en vergelijken van breuken blijkt dat er zeker wel verschillen bestaan tussen de oplossingsmethode zoals beschreven in de *Proeve*, en die in *Pluspunt*.

In zijn algemeenheid gesproken komen we veel ideeën aangaande de breukendidactiek die we in de *Proeve* vinden ook in *Pluspunt* tegen. Breuken worden geïntroduceerd via eerlijk delen en meetactiviteiten, breuken worden in het begin benoemd genoteerd, er wordt begonnen met stambreuken en later pas met breuken met een teller groter dan 1, etc. Maar ten aanzien van het vergelijken en het optellen van breuken blijken de lijnen nogal uit elkaar te lopen.

Het belangrijkste verschil is dat in de *Proeve* alle soorten sommen met behulp van een strook of een plak worden opgelost. De dubbelschalige getallenlijn wordt nog heel af en toe gebruikt, maar de verhoudingstabel komt in de *Proeve* niet voor. Een bemiddelende hoeveelheid wordt in de *Proeve* wel gebruikt, binnen de context van chocoladerepen, in de vorm van het aantal blokjes waaruit een reep bestaat.

Aan de ene kant is deze consistentie wellicht bevorderlijk voor de prestaties van de kinderen. Er is minder kans dat er twijfel ontstaat welke methode er gebruikt moet worden om een som op te lossen. Aan de andere kant vind ik het een beetje in tegenspraak met één van de algemene beginselen van realistisch rekenonderwijs: dat het kind een verscheidenheid aan oplossingsmethoden aangeboden krijgt, daaruit zelf kan kiezen welk model hij gebruikt, en dat een kind inzicht krijgt in die veelheid van oplossingsmethoden en ziet dat het bij

allemaal om aspecten van hetzelfde begrip gaat. Dat *Pluspunt* deze verscheidenheid aan oplossingsmethoden wel heeft gecreëerd duidt er volgens mij op dat de schrijvers zich goed hebben verdiept in de literatuur.

De opbouw die we bij de *Proeve* vinden in de mate van abstractie bij het rekenen met breuken, waarbij van indirect rekenen via semi-direct rekenen wordt overgestapt naar direct rekenen is in *Pluspunt* niet in die vorm terug te vinden. Voor het optellen van gelijknamige breuken wordt in *Pluspunt* eigenlijk vanaf het begin uitsluitend gewerkt met de getallenlijn en de strook. Het optellen van ongelijknamige breuken wordt geïntroduceerd met behulp van een verhoudingstabel. De kinderen kunnen een bemiddelende grootheid wel gebruiken. Dit hebben ze in groep 6 geleerd. Maar in het begin van groep 7 wordt het gebruik van een grootheid in de handleiding vaak afgeraden. Het is bestemd voor de zwakkere leerlingen, die nog geen gebruik kunnen maken van abstractere modellen als de strook en de getallenlijn. Later in het jaar, als in de *Proeve* geprobeerd wordt weer van de bemiddelende grootheid af te komen, wordt deze in *Pluspunt* ineens weer geïntroduceerd, en wordt er uitgebreid mee gerekend.

Ook de wikkelnaam of schuilnaam, waarmee in de *Proeve* een link wordt gelegd tussen de breuk als deel van een hoeveelheid en de breuk als deel van een geheel, en die een grote rol speelt bij het gelijknamig maken komt in *Pluspunt* nauwelijks terug. Het komt er wel in voor, maar zo beperkt dat het nauwelijks opvalt.

Er zijn dus wel degelijk verschillen tussen de onderwijsmethode van de *Proeve* en die van *Pluspunt*. Ik vind echter niet dat we op grond hiervan kunnen beweren dat er in *Pluspunt* een slechte interpretatie van realistisch breukenonderwijs ten aanzien van vergelijken en optellen is gegeven. Ik denk namelijk dat ook de *Proeve* zich nog niet heeft bewezen als blauwdruk voor een perfecte implementatie van realistisch breukenonderwijs. Alle moderne rekenmethodes die in 1997 in de omloop waren, zijn uitgekomen voordat de *Proeve* verscheen. Inmiddels is er een nieuwe druk verschenen van 'De Wereld in Getallen', en ook de delen voor groep 7 en 8 van de nieuwe editie van *Pluspunt* zijn in 2002 verschenen. In deze edities hebben de auteurs van deze methoden wel rekening kunnen houden met deel 3A van de *Proeve*. Áls ze dat hebben gedaan, en áls scholen ook daadwerkelijk de nieuwe editie gaan kopen (de komst van de euro vergroot die kans aanzienlijk, aangezien daarmee elke rekenmethode verouderd is) zullen we wellicht bij de volgende periodieke peiling kunnen zien wat het resultaat van die eventuele aanpassingen in didactiek zouden zijn. Vooralsnog wilde ik het erbij laten dat de interpretaties verschillen.

5.4 De praktijk: een test met kinderen

Om enigszins een idee te krijgen van de manier waarop kinderen die volgens *Pluspunt* les hebben gekregen nu in de praktijk rekenen met breuken, heb ik een test afgenomen onder de groepen 7 en 8 van c.b.s. "de Loopplank" te Blijham. Ik heb deze test afgenomen in september 2002, dus aan het begin van het schooljaar. Dit wil zeggen dat de kinderen van groep 7 aan het begin stonden van het jaar dat ik wilde modelleren, en dat de kinderen van groep 8 alle stof die ik wilde modelleren net hadden gehad. Ik heb beide groepen

dezelfde sommen gegeven, me daarbij realiserend dat een groot deel van de sommen nog te moeilijk zou zijn voor de kinderen van groep 7, aangezien ze een aantal sommen gewoon nog niet gehad hadden.

Dit is echter zeker geen nadeel. Omdat ik de kinderen heb gevraagd toch een antwoord te verzinnen op sommen die te moeilijk zijn, heb ik een beeld kunnen krijgen van de intuïtieve oplossingsmethoden die de kinderen voor de te moeilijke sommen hadden aan het begin van groep 7. Aan de resultaten van groep 8 zou ik kunnen zien wat het niveau aan het einde van groep 7 ongeveer is, en van welke oplossingsmethoden ze gebruik maken voor het beantwoorden van de sommen.

5.4.1 Het experiment

De toets werd gegeven in drie delen. In elk deel werd een aantal sommen van de te modelleren typen gevraagd, nl. aanvullen van breuken tot 1, optellen gelijknamige breuken, optellen van ongelijknamige breuken en het vergelijken van breuken. Het totale aantal sommen was 44.

Er deden 22 kinderen mee aan de test, waarvan 13 in groep 7 en 9 in groep 8. Twee van de leerlingen in groep 8 zijn zwakbegaafd. Het streven voor deze kinderen is om aan het eind van groep 8 op het niveau van groep 6 te zitten. Ik heb de resultaten van deze kinderen dan ook niet meegerekend.

In het eerste deel van de toets werden de sommen formeel gevraagd. Alle soorten optelsommen werden door elkaar gevraagd, de vergelijkingssommen apart. De kinderen werd gevraagd bij elk antwoord uit te leggen hoe ze op hun antwoord zijn gekomen.

De kinderen uit groep 7 hadden nog nooit ongelijknamige breuken opgeteld. Hen werd gevraagd toch te proberen een antwoord te geven op deze sommen. In het eerste deel van de toets zijn de sommen bewust formeel gegeven, zonder hints welk model ze zouden kunnen gebruiken. Wel is gezegd dat de kinderen hun antwoord mochten verklaren met behulp van een tekening of een model. Bedoeling was te kijken in hoeverre de kinderen uit zichzelf geneigd zijn de modellen te gebruiken.

In het tweede deel van de toets werden wederom alle soorten sommen gevraagd, maar nu in blokjes van dezelfde soort som. Ook bij deze sommen werd de kinderen gevraagd hun antwoorden te verklaren. Bij elke som was door middel van een plaatje uitgelegd hoe ze de som zouden kunnen oplossen. Het plaatje was altijd te gebruiken bij het vinden van de oplossing voor de eerste som. De bedoeling hiervan was tweeledig. Ten eerste wilde ik kijken of kinderen meer gebruik maken van modellen voor hun oplossing als er expliciet op de modellen gewezen wordt. Ten tweede vroeg ik mij af of kinderen die in het eerste deel van de toets sommen fout beantwoordden omdat ze niet (meer) wisten hoe ze dit type som moeten oplossen, hetzelfde type som in het tweede deel goed zouden beantwoorden omdat hen een oplossingsmethode werd aangereikt.

In het derde deel tenslotte werd een aantal sommen uit de eerste toets letterlijk herhaald. Bij deze toets hoefden de kinderen niet meer uit te leggen hoe ze aan hun antwoord kwamen. Met deze toets wilde ik twee dingen controleren. Ten eerste of fouten die kinderen maken consequent zijn. In dat geval maken ze in deel drie van de toets waarschijnlijk dezelfde fouten als in deel één. Ten

tweede vroeg ik me af of de kinderen, nu ze in deel twee van de toets een aantal oplossingsmethoden aangereikt hadden gekregen, hiervan ook gebruik zouden maken voor het oplossen van de sommen in deel drie. Met andere woorden: maken ze gebruik van modellen als ze kortgeleden nog een voorbeeld hebben gezien van een oplossingsmethoden door middel van een model.

Hoewel het aantal sommen dat ik kon vragen vrij beperkt was heb ik toch geprobeerd sommen van verschillende moeilijkheidsgraad in de toets te leggen. Bij het optellen van ongelijknamige breuken zijn makkelijk te vergelijken sommen, zoals $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{4}$, iets moeilijkere sommen zoals $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{6}$ en veel complexere sommen, zoals $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{4}$ gevraagd.

De verwachting was dat kinderen halven en kwarten waarschijnlijk makkelijker kunnen optellen dan derden en vierden, omdat bij deze breuken de kans vrij groot is dat ze weten dat $\frac{1}{2}$ gelijk is aan $\frac{2}{4}$. Dit hebben ze geregeld gezien in sommen die ze in groep 5 en 6 gemaakt hebben. Ook voor derden en zesden zou dit kunnen gelden, hoewel dit alweer een stapje verder is. Kwarten en halven komen in het dagelijks leven vrij veel voor (bijvoorbeeld halve uren en kwartieren), voor zesden en derden geldt dit niet. Het optellen van derden en vierden heeft uiteraard meer voeten in aarde, aangezien de kans dat kinderen uit hun hoofd weten dat $\frac{1}{4}$ gelijk is aan $\frac{3}{12}$ vrij klein is.

Ook bij het vergelijken van twee breuken heb ik dit onderscheid in moeilijkheid proberen aan te brengen. In toets 1 was de opdeling als volgt: 1 som waarin gelijknamige breuken vergeleken moesten worden ($\frac{1}{4}$ en $\frac{3}{4}$). Twee sommen waarin relatief makkelijk te vergelijken breuken vergeleken moesten worden ($\frac{1}{6}$ en $\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{4}$ en $\frac{1}{2}$), en twee sommen waarbij de breuken niet zo makkelijk te vergelijken waren ($\frac{2}{5}$ en $\frac{1}{2}$ en $\frac{4}{7}$ en $\frac{3}{5}$). Bij de laatste twee sommen geldt dat de eerste een toch weer een stuk makkelijker is dan de tweede, omdat voor vergelijken met $\frac{1}{2}$ je eigenlijk alleen maar hoeft kunnen afleiden of de andere breuk meer of minder dan de helft is. De laatste som was erg moeilijk, omdat deze twee breuken heel dicht bij elkaar lagen. Eigenlijk was de som alleen goed op te lossen als je de breuken gelijknamig maakt, of heel nauwkeurig intekent in een strook.

5.4.2 Verwachte resultaten

De verwachtingen waren dat de kinderen in de eerste toets meer fouten zullen maken dan in de tweede, en dat van dezelfde sommen in toets 1 en 3 meer sommen goed zouden worden gemaakt in toets 3. Dit omdat de kinderen in toets 2 expliciet worden gewezen op een oplossingsmethode waarmee ze het goede antwoord kunnen vinden. De verwachting is dat ze na het zien van oplossingsmethoden in toets 2 ook meer gebruik van deze methoden zullen maken in toets 3.

Verder is de verwachting dat groep 8 het significant beter zal doen dan groep 7, aangezien ze een jaar langer breukenonderwijs hebben genoten. Verder hebben de kinderen in groep 7 nog nooit ongelijknamige breuken opgeteld. De verwachting is dan ook dat ze hierin veel fouten zullen maken. Interessant is om te zien of ze na het zien van een oplossingsmethode waarmee ze, zij het niet in deze context, wel bekend zijn in staat zullen zijn de onbekende sommen wel goed te beantwoorden.

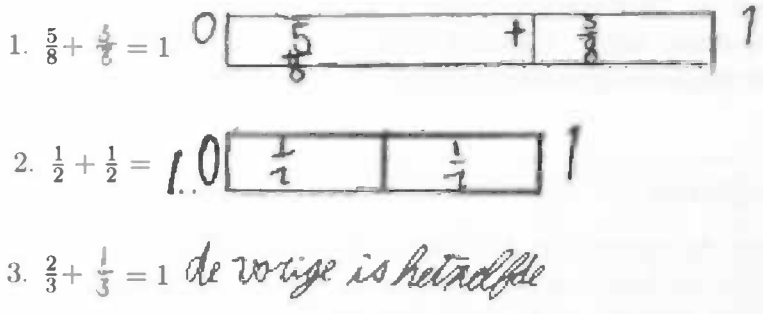
De kinderen is gevraagd om bij het optellen van ongelijknamige breuken toch een antwoord te verzinnen. Hierdoor kan de intuïtieve strategie voor het oplossen van dit soort sommen duidelijk worden. Het is aannemelijk dat later kinderen ook van deze strategie gebruik zullen maken als ze niet meer weten hoe ze een bepaalde som moeten oplossen. De verwachting is dat ze voor het optellen van breuken beide tellers en beide noemers zullen optellen. (N-distractie)

Voor het vergelijken van ongelijknamige breuken is een verwachte fout dat er naar de grootte van de noemers wordt gekeken voor het bepalen van het antwoord. De kans is groot dat $\frac{1}{6}$ als groter dan $\frac{1}{3}$ wordt beschouwd omdat de kinderen weten dat bij natuurlijke getallen een 6 groter is dan een 3 (N-distractie)

5.4.3 Resultaten

Gebruik van modellen

Een heel opvallend en onverwacht resultaat van de test was dat de kinderen nauwelijks gebruik hebben gemaakt van modellen. Slechts in uitzonderingsgevallen werd een model gebruikt om tot een oplossing te komen. Als er een model werd gebruikt werd het meer als een motivatie van het antwoord gebruikt dan als hulpmiddel bij het rekenen. Dit blijkt bijvoorbeeld uit figuur 5.1, één van de weinige voorbeelden van het gebruik van een strook bij het aanvullen tot 1 en het optellen van gelijknamige breuken. Bij de volgende sommen laat deze jongen de strook achterwege, geeft hij gewoon het antwoord, en verwijst hij naar de eerste twee sommen. Dit suggereert dat hij de strook alleen tekent om de leraar te laten zien dat hij snapt wat hij doet.



Figuur 5.1: Een voorbeeld van het gebruik van een strook voor het aanvullen van breuken tot 1 en het optellen van gelijknamige breuken

Ook als het model boven de sommen werd aangeboden bleven kinderen hun eigen oplossingsstrategie gebruiken. Dit kan verschillende oorzaken hebben:

- Er is in de tweede toets niet genoeg nadruk gelegd op de modellen. Misschien had er in plaats van een plaatje waarmee het antwoord op de eerste som gevonden kan worden een hele som uitgewerkt moeten worden met behulp van het model. Daarna zou er uitdrukkelijk gezegd moeten worden dat de rest van de sommen net zo gedaan zou moeten worden.

- De modellen zijn in groep 5 en 6 niet goed aangeleerd. Daarom is het voor de kinderen nu niet makkelijk om ermee te werken. Als de basis niet goed wordt gelegd, is de kans dat het gebruik van modellen in groep 7 en 8 niet slaagt vrij groot.

- De docente heeft moeite met de realistische benadering van het breukenonderwijs, en weet het gebruik van de modellen niet goed uit te leggen. Daardoor is ze te snel overgestapt op de traditionele manier van lesgeven.

- Kinderen vinden het inderdaad niet prettig om met de modellen te werken.

Na een gesprek met de betreffende docent bleek dat zij de modellen wel aan de kinderen had aangeboden bij het aanleren van breuken. Volgens haar bleken ze echter niet aan te slaan. De kinderen vonden het niet prettig ermee te werken. Uiteindelijk heeft ze ook de formele regels uitgelegd aan de kinderen en bleek dat ze hier veel liever mee werkten.

De wijze waarop de modellen in de groepen 5 en 6 zijn aangeleerd is helaas niet te achterhalen. De docente van groep 5 en 6 had namelijk net de zomervakantie voorafgaande aan mijn onderzoek elders een nieuwe baan gevonden en kon dus niet meer meewerken aan het onderzoek.

De docente van groep 7 en 8 beweerde goed haar best te hebben gedaan het gebruik van de modellen uit te leggen en te stimuleren, en dat zal ze ook zeker gedaan hebben. Toch blijft er ook dan de kans bestaan dat ze te veel gewend is aan de traditionele manier van lesgeven om de realistische methode op de juiste manier te gebruiken.

Zij gebruikt overigens wel visuele hulpmiddelen om kinderen duidelijk te maken waarom dingen fout zijn, zoals een breukcirkel, waar je allerlei verschillende 'delen' aan kunt hangen, en waarop je dus het verschil tussen bijvoorbeeld $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{8}$ kunt laten zien door de verschillende parten over elkaar te leggen.

Ook de mogelijkheid dat kinderen het niet prettig vinden om met modellen te werken kan ik niet controleren. Ik heb geen onderzoeken kunnen vinden die dit bevestigen.

Gemaakte fouten

Doordat de kinderen geen gebruik maakten van de aangereikte modellen en vasthielden aan de strategie die ze bij toets 1 gebruikt hebben, is er geen terugloop in het aantal fouten te zien. De fouten die gemaakt worden worden consequent gemaakt. Er vind geen omslag in strategie plaats nadat de oplossingsmethoden aangeboden zijn.

Wat verder opvalt is dat het aanvullen tot 1 en het optellen van gelijknamige breuken bij bijna iedereen goed gaat (zie tabel 5.1 en 5.2). De kinderen beheersen deze sommen bijna allemaal.

Bij het optellen van ongelijknamige breuken worden, zoals verwacht, met name door de kinderen in groep 7 veel fouten gemaakt (zie 5.3) .

Bij de fouten die gemaakt zijn is de foute strategie die gebruikt is om tot het antwoord te komen duidelijk te onderscheiden. Zo zijn er kinderen die beide tellers en beide noemers bij elkaar optellen. Ook zijn er kinderen die wel de beide tellers bij elkaar optellen, maar niet de noemers. In plaats daarvan kiezen

	som	Groep 7 goed	Groep 8 goed
Toets 1	$\frac{2}{5} + .. = 1$	69 %	100 %
	$\frac{3}{4} + .. = 1$	77 %	100 %
	$\frac{1}{7} + .. = 1$	77 %	100 %
Toets 2	$\frac{1}{3} + .. = 1$	85 %	100 %
	$\frac{4}{5} + .. = 1$	85 %	100 %
	$\frac{3}{8} + .. = 1$	85 %	100 %
	$\frac{2}{9} + .. = 1$	77 %	100 %
Toets 3	$\frac{2}{3} + .. = 1$	77 %	100 %
	$\frac{1}{7} + .. = 1$	85 %	100 %

Tabel 5.1: percentages goede antwoorden voor het aanvullen van breuken tot 1

	som	groep 7 goed	groep 7 $t+t$, $n+n$	groep 7 rekenfout	groep 8 goed	groep 8 $t+t$, $n+n$	groep 8 rekenfout
Toets 1	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$	92 %	8 %	0 %	100 %	0 %	0 %
	$\frac{2}{5} + \frac{2}{7}$	85 %	7.5 %	7.5 %	100 %	0 %	0 %
	$\frac{2}{7} + \frac{1}{2}$	85 %	15 %	0 %	100 %	0 %	0 %
	$\frac{1}{4} + \frac{1}{6}$	85 %	15 %	0 %	100 %	0 %	0 %
Toets 2	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$	100 %	0 %	0 %	100 %	0 %	0 %
	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$	100 %	0 %	0 %	100 %	0 %	0 %
	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$	100 %	0 %	0 %	100 %	0 %	0 %
	$\frac{1}{5} + \frac{1}{5}$	92 %	8 %	0 %	100 %	0 %	0 %
Toets 3	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$	85 %	7.5 %	7.5 %	100 %	0 %	0 %
	$\frac{1}{7} + \frac{1}{7}$	92 %	0 %	8 %	86 %	0 %	14 %

Tabel 5.2: percentages goede antwoorden voor het optellen van gelijknamige breuken

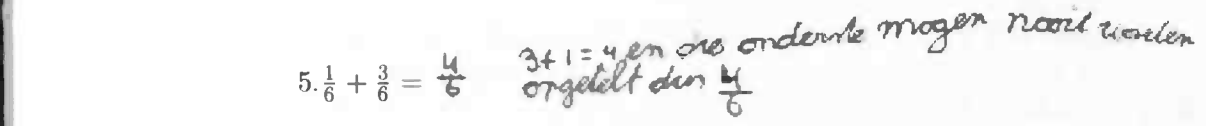
ze gewoon 1 van beide noemers. Deze kinderen tellen de breuken niet analoog aan natuurlijke getallen op, maar analoog aan gelijknamige breuken. Ze weten blijkbaar dat bij het optellen van twee gelijknamige breuken alleen de tellers opgeteld hoeven worden. De noemers blijven hetzelfde. Analoog hieraan tellen ze ook bij ongelijknamige breuken alleen de tellers op. De noemer zou hetzelfde moeten blijven, maar ze hebben in dit geval twee verschillende noemers. Omdat ze niet weten wat ze met die verschillende noemers moeten doen kiezen ze er maar eentje uit. Misschien speelt ook nog mee dat ze wel weten dat ze ze in elk geval niet moeten optellen. Dit hebben ze ook bij het optellen van gelijknamige breuken geleerd.

	som	groep 7 goed	groep 7 $t+t$, $n+n$	groep 7 $t+t$	groep 7 rekenfout	groep 8 goed	groep 8 $t+t$, $n+n$	groep 8 $t+t$	groep 8 rekenfout
Toets 1	$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$	15 %	39 %	31 %	15 %	86 %	0%	0 %	14 %
	$\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$	31 %	39 %	15 %	15 %	57 %	0%	0 %	43 %
	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$	15 %	39 %	39 %	7 %	100 %	0%	0 %	0 %
	$\frac{3}{8} + \frac{1}{4}$	15 %	39 %	46 %	0 %	86 %	0%	0 %	14 %
	$\frac{1}{4} + \frac{2}{5}$	0 %	39 %	39 %	22 %	57 %	0%	0 %	43 %
Toets 2	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$	0 %	39 %	46 %	15 %	86 %	0 %	0 %	14 %
	$\frac{2}{5} + \frac{2}{5}$	39 %	31 %	23 %	7 %	100 %	0 %	0 %	0 %
	$\frac{2}{5} + \frac{1}{5}$	0 %	39 %	54 %	7 %	86 %	0 %	0 %	14 %
	$\frac{4}{8} + \frac{4}{8}$	7.5 %	31 %	54 %	7.5 %	100 %	0 %	0 %	0 %
Toets 3	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6}$	8 %	31 %	46 %	15 %	86 %	0 %	0 %	14 %
	$\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$	15 %	39 %	39 %	8 %	100 %	0 %	0 %	0 %
	$\frac{3}{8} + \frac{1}{4}$	15 %	39 %	39 %	8 %	100 %	0 %	0 %	0 %
	$\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$	0 %	39 %	54 %	8 %	71 %	0 %	0 %	29 %

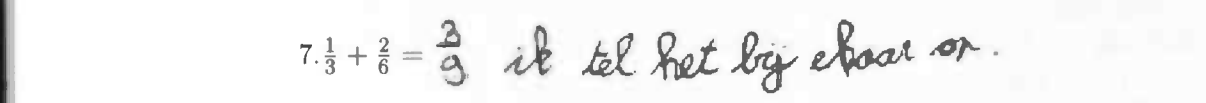
Tabel 5.3: percentages goede antwoorden voor het optellen van ongelijknamige breuken

Dat dit soort kennis niet altijd tot consequente strategieën leidt, blijkt uit het werk van Sandrik uit groep 7 (zie figuur 5.2 en 5.3). Hij verklaart bij het optellen van gelijknamige breuken dat je de noemers nooit op mag tellen, en vermeld twee sommen later, bij het optellen van ongelijknamige breuken

doodleuk dat hij ze wel optelt.



Figuur 5.2: Een goede strategie voor het optellen van gelijknamige breuken



Figuur 5.3: en een foute strategie voor het optellen van ongelijknamige breuken

Wel is het opvallend dat een aantal kinderen uit groep 7 sommige van de makkelijkere sommen met ongelijknamige breuken wel goed oplost. Van de twaalf kinderen uit groep 7 hebben vier het goede antwoord gevonden op de som $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$. Zij wisten allemaal dat $\frac{1}{2}$ gelijk is aan $\frac{2}{4}$ en konden vervolgens de som oplossen. Twee van hen wisten ook het goede antwoord te vinden op $\frac{2}{4} + \frac{1}{3}$ via $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$. Ook wisten twee kinderen het antwoord op $\frac{2}{6} + \frac{1}{3}$ te vinden doordat ze wisten dat $\frac{1}{3}$ gelijk is aan $\frac{2}{6}$.

Bij het vergelijken van breuken zijn ook duidelijk strategieën te onderscheiden die een fout antwoord opleverden. Deze strategieën zijn:

- N-distractie : 6 is groter dan 3, dus $\frac{1}{6}$ is groter dan $\frac{1}{3}$.
- Vergelijken hoeveel stukken er nog bij moeten om 1 te maken, zonder rekening te houden met de grootte van die stukken. $\frac{1}{2}$ is groter dan $\frac{2}{4}$, want aan $\frac{1}{2}$ hoef je maar 1 stuk toe te voegen om 1 te maken, en bij $\frac{2}{4}$ twee stukken.

	som	Groep 7 goed	Groep 8 goed
Toets 1	$\frac{1}{6}$ en $\frac{1}{3}$	54 %	100 %
	$\frac{1}{3}$ en $\frac{2}{4}$	69 %	100 %
	$\frac{2}{4}$ en $\frac{1}{2}$	92 %	100 %
	$\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{3}$	46 %	100 %
	$\frac{2}{7}$ en $\frac{2}{5}$	62 %	57 %
Toets 2	$\frac{2}{4}$ en $\frac{1}{3}$	85 %	100 %
	$\frac{3}{8}$ en $\frac{2}{3}$	46 %	71 %
	$\frac{2}{5}$ en $\frac{2}{4}$	46 %	86 %
	$\frac{2}{3}$ en $\frac{2}{5}$	8 %	57 %
Toets 3	$\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{2}$	62 %	100 %
	$\frac{2}{4}$ en $\frac{1}{2}$	100 %	100 %
	$\frac{1}{4}$ en $\frac{2}{5}$	54 %	100 %

Tabel 5.4: percentages goede antwoorden voor het vergelijken van breuken

Wat opvalt is dat het vergelijken van gelijknamige breuken heel goed gaat. Van bekende breuken wordt eerder gezien dat twee breuken even groot zijn dan van minder bekende breuken. Zo zijn veel meer kinderen op de hoogte van het feit dat $\frac{2}{4}$ gelijk is aan $\frac{1}{2}$ dan dat $\frac{6}{9}$ gelijk is aan $\frac{2}{3}$. Ook gebruiken sommige

kinderen bij het vergelijken van $\frac{2}{5}$ en $\frac{1}{2}$ het feit dat $\frac{1}{2}$ de helft is. Ze besluiten dat $\frac{2}{5}$ minder dan de helft is, dus kleiner.

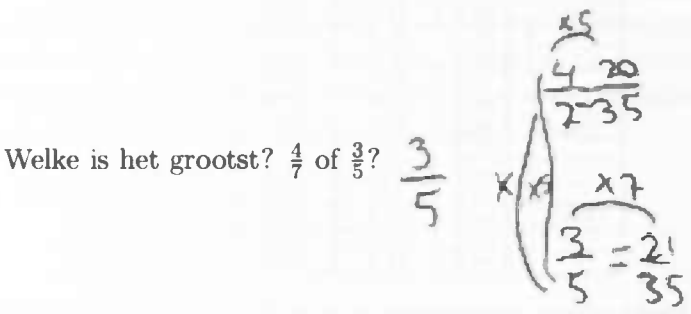
Het vergelijken van $\frac{4}{7}$ en $\frac{3}{5}$ is zonder twijfel de moeilijkste som. Eigenlijk is het antwoord hierop alleen te vinden door heel nauwkeurig te tekenen, of gelijknamig te maken. Vier van de zeven kinderen in groep 8 gebruiken gelijknamig maken om het antwoord te vinden. Het is daarbij opvallend dat *niemand* gebruikt maakt van verhoudingstabellen. Zelfs als de verhoudingstabel als hulpmiddel wordt aangeboden wordt deze niet gebruikt. Eén van de kinderen schrijft er zelfs bij dat ze nog nooit met een verhoudingstabel heeft gewerkt. Eén iemand maakt gebruik van een bemiddelende grootheid voor het vergelijken van alle breuken, maar maakt gebruik van globale getallen (100 : 6 is ongeveer 15 en 100 : 3 is ongeveer 30) Bij het vergelijken van $\frac{4}{7}$ en $\frac{3}{5}$ komt hij dan ook in de knoop, en zegt dat de getallen aan elkaar gelijk zijn. Dit zijn ze ook bijna. In groep 7 heeft één jongen het goede antwoord gevonden door nauwkeurig te tekenen.

Uiteraard moet er bij de uitslag van het vergelijken van breuken rekening worden gehouden met de gokkans, aangezien er willekeurig uit drie antwoorden kan worden gekozen (groter, kleiner of gelijk).

conclusies

De gehouden test is een heel duidelijk bewijs dat het gebruiken van een realistische methode geen garantie is dat kinderen volgens de realistische benadering leren rekenen. In de geteste klas bleek slechts een enkeling gebruik te maken van modellen om tot het goede antwoord te komen.

Wel zaten zowel de kinderen van groep 7 als die van groep 8 ongeveer op het gewenste niveau. De kinderen in groep 7 zouden het aanvullen van breuken tot 1 en het optellen van gelijknamige breuken moeten beheersen. Dit is ook het geval. Op beide onderdelen worden scores van ruim boven de 75 % behaald. Wel is het opvallend dat ze meer moeite hebben met het aanvullen van breuken tot 1, dan met het optellen van gelijknamige breuken, terwijl ze de eerste soort sommen al veel vaker en grondiger gehad zouden moeten hebben.



Figuur 5.4: vergelijken via gelijknamig maken

Groep 8 hoort alle vier de onderdelen goed te beheersen. Op de onderdelen aanvullen tot 1 en optellen van gelijknamige breuken wordt, op één rekenfout na, een 100 % score behaald. Maar ook op het optellen van ongelijknamige breuken wordt goed gescoord. Hoewel de scores hier lager liggen, zijn alle gemaakte

fouten veroorzaakt door een rekenfout, en niet door het gebruik van een foute strategie. De breuken worden hierbij of uit het hoofd, of op de traditionele manier gelijknamig gemaakt. Er wordt een getal gezocht waardoor je beide noemers kunt delen,(zie figuur 5.4).

Voor het vergelijken werd nog het meest gebruikt gemaakt van plaatjes om te laten zien welk breuk groter was. Hierbij werd ongeveer even vaak gebruik gemaakt van een cirkel als van een strook als model. Verder werd er gebruik gemaakt van het gelijknamig maken van breuken. Voor veel sommen werd dit uit het hoofd gedaan. De kinderen weten bijvoorbeeld dat $\frac{3}{4}$ gelijk is aan $\frac{6}{8}$. Wat wel vreemd is, is dat veel kinderen moeite hadden met het vergelijken van $\frac{2}{3}$ en $\frac{6}{9}$. Slechts 57 % van de kinderen in groep 8 zag dat deze twee aan elkaar gelijk waren.

Doordat de kinderen van groep 7 nog niet hadden geleerd om ongelijknamige breuken te vergelijken en op te tellen, laten hun oplossingsmethoden duidelijk de natuurlijke foute strategieën zien die voor dit soort onbekende sommen worden gebruikt. De meest toegepaste strategie is een vorm van N-distractie. Bij ongelijknamige breuken worden tellers en noemers opgeteld, ook als de kinderen weten dat dit bij gelijknamige breuken niet mag. Er is daarbij een tussenvorm te onderscheiden. Ongeveer de helft van de kinderen die weten dat bij gelijknamige breuken alleen de tellers worden opgeteld, doen dit ook bij ongelijknamige breuken. Ze kiezen daarna één van de noemers, en laten die staan.

Ook bij het vergelijken van breuken wordt gebruik gemaakt van N-distractie. De breuk met ofwel de grootste teller, ofwel de grootste noemer wordt tot grootste breuk benoemd. Wanneer precies de tellers worden vergeleken en wanneer de noemers, is niet helemaal duidelijk.

Het nut van deze test voor mijn onderzoek ligt voornamelijk in de ontdekking van deze foute strategieën. In mijn ACT-R model zal ik deze strategieën ook implementeren, zodat het model ook een natuurlijke manier heeft om de sommen fout te maken.

Hoofdstuk 6

Het model

In mijn ACT-R model heb ik verschillende modellen voor breuken en het rekenen met breuken geïmplementeerd. Ook heb ik een implementatie gemaakt van zowel de oplossingsstrategieën die worden aangeleerd in *Pluspunt* als de foute oplossingsstrategieën die kinderen geneigd zijn te gebruiken wanneer ze (nog) geen goede oplossingsstrategie kennen. In dit hoofdstuk wil ik een overzicht geven van de modellen, de strategieën en de benodigde voorkennis voor het kunnen optellen van breuken die ik heb geïmplementeerd. Ook wil ik de beperkingen van het ACT-R model behandelen.

6.1 de modellen

Zoals bleek uit de analyse van *Pluspunt* wordt er voor de sommen die ik heb gemodelleerd gebruik gemaakt van vijf verschillende modellen, nl. de strook, de getallenlijn, de dubbele getallenlijn, de bemiddelende grootheid en de verhoudingstabel. In mijn ACT-R model zullen slechts drie van deze modellen terug te vinden zijn.

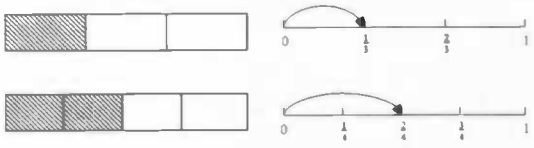
Om mijn model enigszins eenvoudig te houden, zal ik alleen sommen onder de 1 behandelen. Dit scheelt een heleboel complexiteit. Er hoeven nooit helen uit een antwoord gehaald te worden, de breuk is altijd te representeren als een teller en een noemer, en de getallenlijn en de strook zijn inwisselbare modellen.

Zoals al eerder is uitgelegd, vertonen de getallenlijn en de strook qua gebruik erg veel overeenkomsten. Voor beide is een handige onderverdeling nodig, die vaak gelijk is aan de noemer van de te representeren breuk.

Figuur 6.1: De strook en de getallenlijn als representatie van derden

Met beide modellen kunnen breuken vergeleken worden via de positie van de breuk op de lijn, of de plaats waar het gekleurde deel van de strook overgaat in het niet gekleurde deel (zie figuur 6.2). Voor het optellen van breuken is het gebruik van een strook en een getallenlijn ook vergelijkbaar. In een strook

wordt het op te tellen deel erbij in gekleurd, bij de getallenlijn wordt er het benodigde aantal stapjes verder 'gesprongen' op de lijn.



Figuur 6.2: vergelijken van twee breuken met behulp van een strook en een getallenlijn

Voor optellingen waarbij het antwoord boven de 1 komt gaat deze parallel niet meer op. Als je met een getallenlijn werkt kun je ook na 1 nog gewoon verder 'springen' over de getallenlijn. Een strook is een geheel, en houdt dus op bij 1. Als je gebruik maakt van stroken zul je in dat geval met meerdere stroken moeten werken.

Ik heb het hier uiteraard alleen over de manier waarop de getallenlijn en de strook *gebruikt* worden. Als representatie verschillen zij wel degelijk van elkaar. Een strook is vooral een representatie van het deel-geheel aspect van breuken, terwijl de getallenlijn veel meer een representatie is van de breuk als rationeel getal, die een plaats heeft tussen andere getallen.

Het ACT-R model zal dit verschil in representatie niet onderscheiden. Hij zal leren werken met het hulpmiddel, en letten op het aantal stukken waarin de lijn of de strook is verdeeld, en op welke positie van de lijn of de strook de breuk zich bevindt. Het heeft in mijn model dus geen zin om het onderscheid tussen de getallenlijn en de strook te maken.

De bemiddelende grootheid als model laat ik voor een groot deel ook achterwege. Hoewel er in groep 6 vrij veel met de bemiddelende grootheid is gewerkt wordt dit aan het begin van groep 7 ontmoedigd door de methode. Pas aan het eind van groep 7 wordt het gebruik van de bemiddelende grootheid weer heel erg gestimuleerd bij het optellen van ongelijknamige breuken. In mijn ACT-R model zal de bemiddelende grootheid ook pas dan worden aangeboden. Voor het aanvullen van breuken tot 1, het optellen van gelijknamige breuken en het vergelijken van breuken wordt het dus niet aangeboden.

Ook de dubbele getallenlijn heb ik weggelaten. In feite is dit een soort tussenvorm tussen de strook en een bemiddelende grootheid. Zo kunnen kinderen makkelijker de overstap maken tussen het werken met een bemiddelende grootheid en met de getallenlijn, en gaan ze beide representaties aan elkaar koppelen.

Door het voor een groot deel achterwege blijven van de bemiddelende grootheid is het onnodig een dergelijke overgang in gebruik beschikbaar te maken. In het begin van groep 7 wordt er geen bemiddelende grootheid gebruikt en zijn de kinderen sowieso aangewezen op de getallenlijn/strook. Aan het eind van groep 7, als de bemiddelende grootheid wel weer wordt gebruikt, hebben ze een dergelijke hulp niet meer nodig. Ze kunnen dan als het goed is al werken met de getallenlijn.

De dubbele getallenlijn als koppeling tussen de breuk als deel van een hoe-

veelheid en als rationeel getal is aan mijn ACT-R model ook niet besteed, aangezien het model geen kennis heeft van begrippen als 'rationeel getal' en 'deel van een hoeveelheid'. Een dergelijk begrip creëren zou een project op zich zijn, en heb ik dus achterwege gelaten.

Een model dat wel beschikbaar is in mijn ACT-R model is de verhoudingstabel. Hiermee kunnen breuken gelijknamig worden gemaakt. In elke tabel staat 1 breuk, en de tabellen worden om beurten uitgebreid, net zo lang tot de breuken makkelijk te vergelijken of op te tellen zijn.

1	2	3	4	
4	8	12	16	

1	2	3	4	
3	6	9	12	

Figuur 6.3: het gelijknamig maken van $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{3}$ met behulp van een verhoudingstabel

Ik ga er in mijn model van uit dat de kinderen het gebruik van bovenstaande modellen compleet beheersen. Het is de bedoeling dat ze er in de groepen 5 en 6 zo veel mee hebben geoefend dat ze geen enkel probleem meer hebben met het gebruik ervan. Dit hoeft in de praktijk uiteraard niet zo te zijn, maar het zou te ver gaan om ook het niet voldoende geleerd hebben van voorkennis mee te nemen in mijn model.

6.2 De strategieën

6.2.1 Algemene strategieën

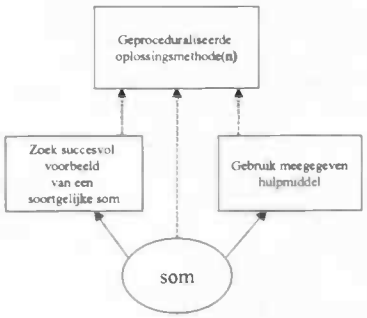
Ik heb in mijn model twee algemene, zwakke strategieën geïmplementeerd, nl. het zoeken naar een voorbeeld en de som analooog aan dit voorbeeld oplossen (analogie-methode) en het gebruiken van het meegegeven hulpmiddel (model).

Als de kinderen een nieuw soort som leren oplossen, krijgen ze daarbij uitleg. Er wordt ze vaak ook verteld hoe ze een som kunnen oplossen. Er staat dan een voorbeeld in het boek, de leraar doet een som voor of er staat bij de sommen welk hulpmiddel er gebruikt kan worden. In mijn ACT-R model worden alledrie deze mogelijkheden gesimuleerd door het meegeven van het te gebruiken hulpmiddel. Het geven van een voorbeeld is natuurlijk niet helemaal hetzelfde als het meegeven van een hulpmiddel. Ik ga er echter vanuit dat de kinderen weten hoe ze de modellen kunnen gebruiken. De regels in het ACT-R model zijn ook dusdanig dat er met alleen het meegeven van een model een antwoord kan worden gevonden. Hierdoor denk ik dat het meegeven van een hulpmiddel voldoende simulatie is van het geven van een voorbeeld.

Als dit het geval is kan de regel díe de som wil oplossen met behulp van het meegegeven hulpmiddel vuren.

Het kan ook voorkomen dat de kinderen niet (meer) weten hoe ze een som moeten oplossen en er geen voorbeeld wordt gegeven van een mogelijke oplossingsmethode. In dat geval kan er gezocht worden naar een eerder voorbeeld waarbij een soortgelijke som werd opgelost en kan de som analoog aan dit voorbeeld worden opgelost. Ook voor deze oplossingsmethode heb ik een regel geschreven in mijn ACT-R model. Deze regel kan overigens ook vuren als er wel een voorbeeld mee wordt gegeven. Een kind, en dus ook het model, is immers niet verplicht het gegeven voorbeeld te gebruiken.

Het gebruik van deze zwakke methoden kan leiden tot de ontwikkeling van geproceduraliseerde oplossingsmethoden, waarbij er geen voorbeeld meer hoeft worden meegegeven of gezocht, maar waarbij het model 'weet' hoe het een bepaalde som kan oplossen. Het model kan dan ook direct gebruik maken van deze methoden. (zie figuur 6.4)



Figuur 6.4: de ontwikkeling van geproceduraliseerde oplossingsmethoden vanuit het gebruik van zwakke methoden

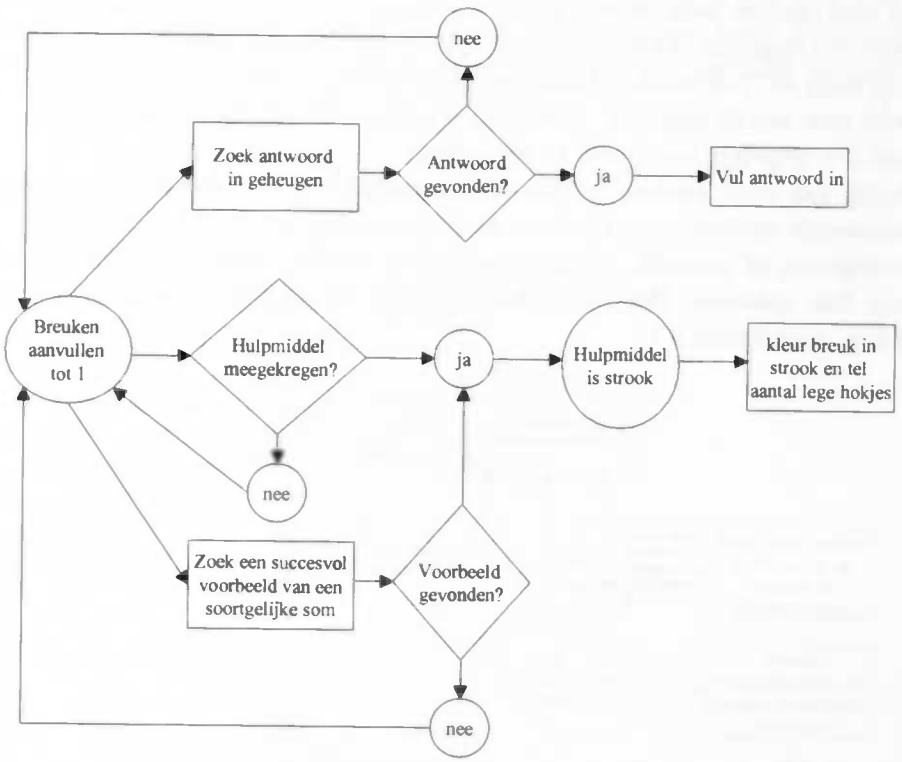
Een andere algemene manier om een antwoord op een som te vinden is dit antwoord uit je geheugen te halen. Dit kan echter alleen als de informatie zich ook daadwerkelijk in je geheugen bevindt, en je er nog bij kan. De activatiewaarde van het antwoord moet dus hoog genoeg zijn. Het vinden van een antwoord uit je geheugen slaagt normaal gesproken alleen als je de som al heel vaak hebt gemaakt, of wanneer je hem heel kort geleden hebt gemaakt.

In de volgende paragrafen zal ik een overzicht geven van alle mogelijke manieren waarop het model de te modelleren sommen aanvankelijk kan oplossen. Het gebruik van bovengenoemde algemene strategieën en modellen zal daarin naar voren komen. Aangezien het alleen om de initiële oplossingsmethoden gaat, zijn er geen geproceduraliseerde oplossingsmethoden opgenomen in het overzicht.

6.2.2 Het aanvullen van breuken tot 1

Om breuken aan te vullen tot 1 kunnen de drie algemene strategieën worden gevolgd: Het antwoord kan in het geheugen worden gezocht, er kan gebruik worden gemaakt van een meegegeven hulpmiddel, of er kan een voorbeeld worden

gezocht waaruit de oplossingsmethode (hier: hulpmiddel) wordt afgeleid. Als er een hulpmiddel wordt gevonden zal dit altijd een strook zijn. Een overzicht van de te gebruiken oplossingsmethoden wordt gegeven in figuur 6.5.



Figuur 6.5: Initiële oplossingsmethoden voor het aanvullen van breuken tot 1

Als een oplossingsmethode niet slaagt, omdat het model het antwoord bijvoorbeeld uit het geheugen wil halen maar daar niet in slaagt, kan er een andere oplossingsmethode worden geprobeerd. Oplossingsmethoden die gefaald hebben kunnen niet opnieuw geprobeerd worden. Dit kan namelijk leiden tot oneindige lussen in het geval dat geen enkele oplossingsmethode zal slagen.

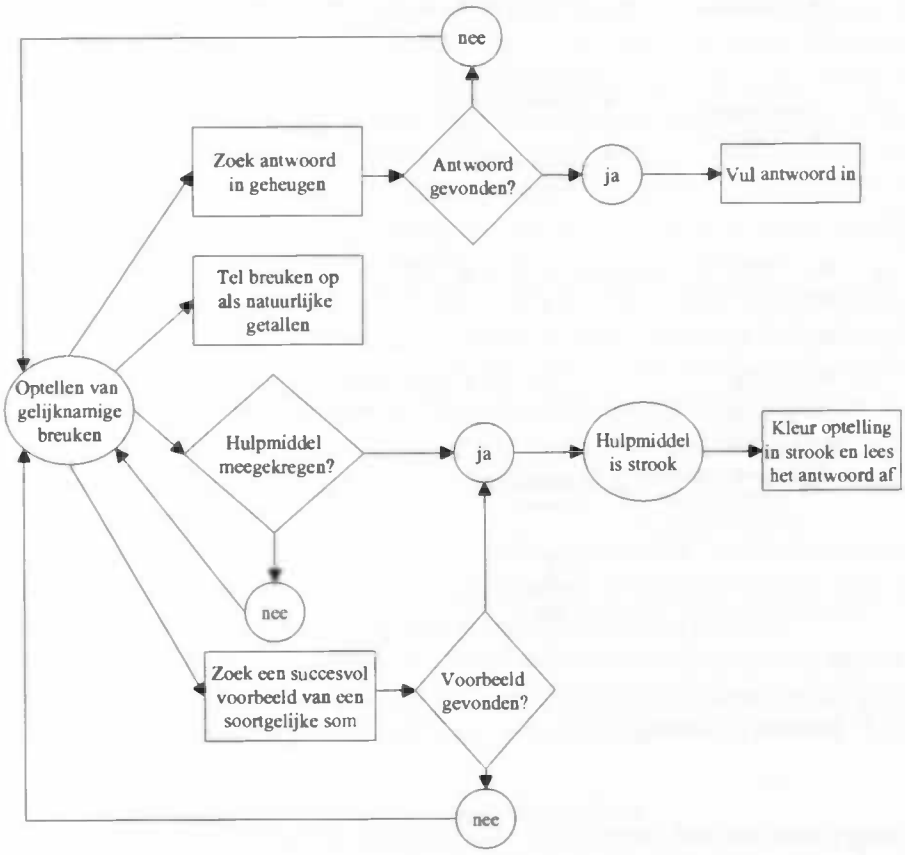
Het kan voorkomen dat geen enkele oplossingsmethode slaagt wanneer er geen voorbeeld wordt meegegeven, het antwoord niet in het geheugen is te vinden, en er ook geen voorbeeld te vinden is. Dit laatste kan optreden wanneer de voorbeelden te lang geleden zijn gegeven. Ze zijn weggezakt, en dus niet meer beschikbaar. Het hangt van de parameters van het model af hoe lang hij dingen onthoudt. Dit is dus variabel. Ook tussen mensen is er verschil in hoe lang zij dingen kunnen onthouden.

6.2.3 Het optellen van gelijknamige breuken

Er zijn vier strategieën voor het optellen van breuken, waaronder één foute (zie figuur 6.6). De strategieën waarmee het goede antwoord kan worden gevonden

zijn weer de algemene strategieën. De breuken kunnen daarnaast ook worden opgeteld als natuurlijke getallen, waarbij de tellers bij elkaar worden opgeteld, en de noemers. Deze strategie zal in geen enkel geval het goede antwoord opleveren. Als het goed is zal deze strategie dan ook op een gegeven moment afgeleerd worden.

Het optellen van breuken als gelijknamige breuken zal wel altijd lukken. Ik ben er vanuit gegaan dat kinderen in groep 7 goed kunnen optellen. Ze hebben daarvoor geen hulp of een voorbeeld nodig. Het optellen van natuurlijke getallen slaagt altijd, en daarmee ook het optellen van breuken als natuurlijke getallen. Het zal daarom bij deze soort sommen minder vaak voorkomen dat er helemaal geen antwoord wordt gevonden. Als alle andere methoden falen kunnen de breuken altijd nog op deze foute manier worden opgeteld.

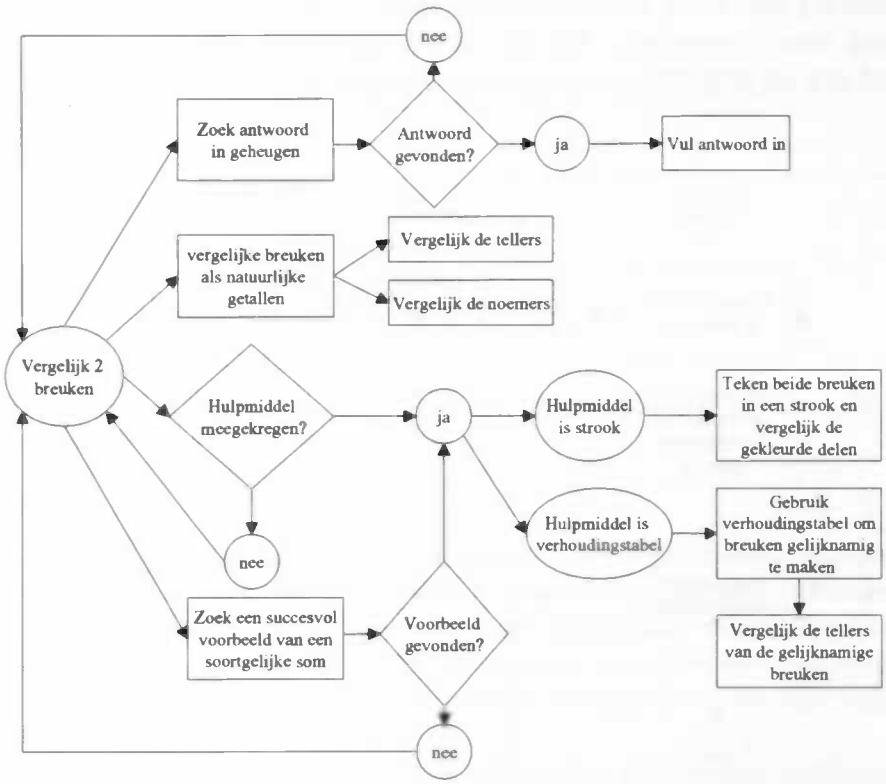


Figuur 6.6: Initiële oplossingsmethoden voor het optellen van gelijknamige breuken

6.2.4 Het vergelijken van breuken

Voor het vergelijken van breuken zijn dezelfde vier strategieën mogelijk (zie figuur 6.7). Uit het experiment met groep 7 en 8 van c.b.s. "de Loopplank" bleek dat het vergelijken van breuken op de manier van natuurlijke getallen een

veel voorkomende strategie is. Er zijn hierbij twee varianten: de tellers worden vergeleken of de noemers worden vergeleken. Het is niet duidelijk wanneer welke methode precies wordt toegepast. Dat de noemers vergeleken worden als de tellers gelijk zijn en vice versa lijkt aannemelijk, maar in de gevallen dat beide verschillen is er geen duidelijk strategie aan te wijzen. Dit is ook niet echt van belang voor dit onderzoek. Het beschikbaar zijn van deze foute strategieën is het belangrijkste, en wanneer precies welke variant wordt gebruikt is misschien stof voor een ander onderzoek.



Figuur 6.7: Initiële oplossingsmethoden voor het vergelijken van breuken

Het belangrijkste aan het vergelijken van breuken als natuurlijke getallen is dat het in veel gevallen per ongeluk toch het goede antwoord oplevert. Vergelijken we bijvoorbeeld alleen de noemers van $\frac{4}{5}$ en $\frac{1}{3}$ dan zal het antwoord zijn dat $\frac{4}{5}$ groter is, omdat 5 groter is dan 3. Dit antwoord is goed, maar de redenatie niet. Het kunnen vinden van het goede antwoord door middel van een foute strategie kan er toe leiden dat deze strategie minder snel wordt afgeleerd. De regel krijgt immers af en toe een succes, en daardoor een hogere P-waarde (kans dat de regel slaagt).

Een verder verschil tussen het oplos-diagram van het vergelijken van breuken in vergelijking met de vorige diagrammen is dat er hier twee soorten hulpmiddel gevonden kunnen worden, de strook en de verhoudingstabel. Dit kan tot gevolg hebben dat als het model besluit het meegegeven hulpmiddel niet te gebruiken

maar te zoeken naar een voorbeeld om zijn strategie te bepalen, het een voorbeeld met een ander hulpmiddel dan het meegegeven hulpmiddel kan vinden en dus een ander hulpmiddel gebruikt dan in de som werd gesuggereerd. Als er als hulpmiddel een strook werd gegeven, en het model besluit een voorbeeld te zoeken, kan het een voorbeeld met een verhoudingstabel vinden, en dus een tabel gebruiken in plaats van een strook.

Dit kan in de praktijk ook gebeuren. Zoals bijvoorbeeld bleek uit mijn experiment negeren kinderen soms de meegegeven hint. Als ze een andere oplossingsmethode kennen, of denken te kennen, kunnen ze deze best verkiezen boven de aangeboden methode. Mijn verwachting is dat dit in het model echter niet zo heel erg vaak zal voorkomen, en wel om de volgende reden.

Het gebruiken van het meegegeven hulpmiddel zal in bijna alle gevallen tot een goed antwoord leiden. De regel waarin staat dat je het meegegeven hulpmiddel moet gebruiken zal hierdoor een hoge P-waarde en daarmee een hoge activatiewaarde krijgen. Daarom is de kans groot dat deze regel de voorkeur zal gaan verdienen boven het zoeken naar een voorbeeld, wat meer tijd kost.

In sommige gevallen wordt alleen bij de eerste som een hint gegeven welke oplossingsmethode er gebruikt kan worden. Het zou dus kunnen zijn dat er alleen voor de eerste som uit een rijtje gebruik wordt gemaakt van het aangeboden hulpmiddel en vervolgens bij alle andere sommen via een gevonden voorbeeld gebruik wordt gemaakt van een ander hulpmiddel.

Ook dit zal denk ik niet heel vaak voorkomen. Als er voor de eerste som gebruik wordt gemaakt van het meegegeven hulpmiddel, ontstaat er daardoor een kersvers voorbeeld met het meegegeven hulpmiddel. Dit voorbeeld zal een hoge activatiewaarde hebben. Als er vervolgens bij volgende sommen gezocht wordt naar een voorbeeld, is de kans groot dat het zojuist gecreëerde voorbeeld, met het meegegeven hulpmiddel, gevonden wordt, en wordt er toch steeds hetzelfde hulpmiddel gebruikt.

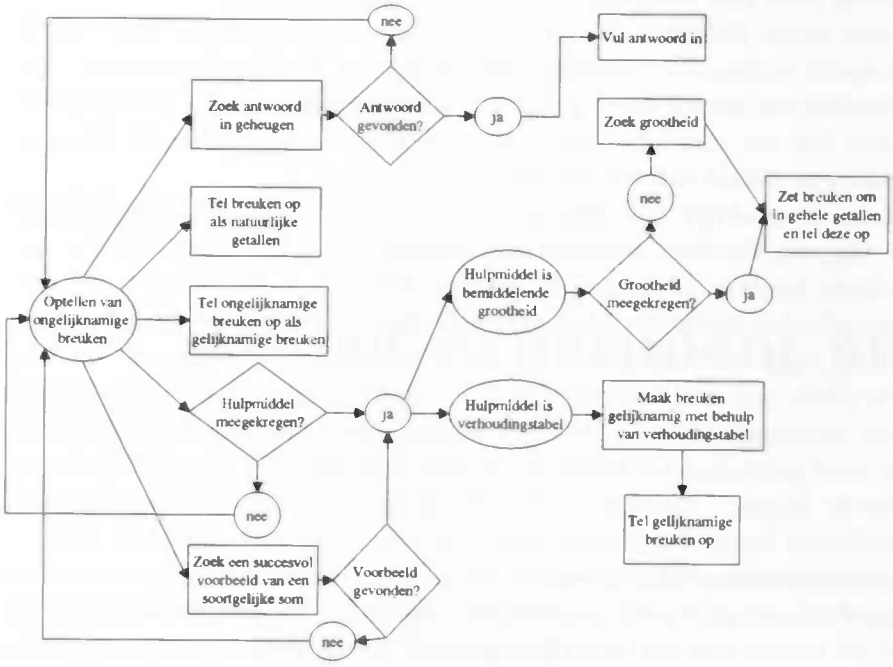
Als het gebruikte hulpmiddel een verhoudingstabel is, wordt er een nieuw doel aangemaakt, waarin de breuken gelijknamig worden gemaakt. Als dit is gelukt, worden de tellers van de gelijknamige breuken vergeleken.

Als het hulpmiddel een strook is, worden beide breuken in een strook gekleurd, en wordt de breuk die het grootste gekleurde stuk opleverde als grootste aangewezen.

6.2.5 optellen van ongelijknamige breuken

Zoals te zien is in figuur 6.8 is het optellen van ongelijknamige breuken het meest complexe onderdeel van de gemodelleerde stof. Er zijn maar liefst vijf initiële strategieën bij dit onderdeel, waarvan er twee fout zijn.

De eerste foute strategie is wederom een vorm van N-distractie; het optellen van gelijknamige breuken als natuurlijke getallen. Maar bij het optellen van ongelijknamige breuken is er nog een vorm van distractie. Ongelijknamige breuken, zo bleek uit het experiment, kunnen ook worden opgeteld als gelijknamige breuken. Hierbij worden alleen de tellers opgeteld, en er wordt een noemer gekozen. Deze foute strategie is naast N-distractie ook in het model beschikbaar.



Figuur 6.8: Initiële oplossingsmethoden voor het optellen van ongelijknamige breuken

De modellen die gebruikt kunnen worden voor het optellen van ongelijknamige breuken zijn de verhoudingstabel en de bemiddelende grootheid. De verhoudingstabel is een hulpmiddel voor het gelijknamig maken van breuken. Als de breuken eenmaal gelijknamig zijn, moeten ze nog worden opgeteld. Dat gaat op dezelfde manier als bij gelijknamige breuken (wat het dan inmiddels geworden zijn).

Een bemiddelende grootheid is ook een manier om breuken gelijknamig te maken, maar op een minder duidelijke manier. Ik zal dat uitleggen aan de hand van een voorbeeld, het optellen van $\frac{1}{3}$ en $\frac{1}{4}$. Als bemiddelende grootheid wordt bijvoorbeeld een krat met 24 flesjes genomen. $\frac{1}{3}$ is dan 8 flesjes en $\frac{1}{4}$ is 6 flesjes. Samen zijn het 14 flesjes. Het antwoord is dan $\frac{14}{24}$ want het zijn 14 van de 24 flesjes. De meeste kinderen zullen niet zo snel doorhebben dat ze hier eigenlijk gelijknamig maken. Ze tellen ook geen breuken op, maar gehele getallen, waar ze uiteindelijk weer een breuk van maken.

Daarom maak ik in het overzicht en in de regels van het model toch een onderscheid. Als er als hulpmiddel een verhoudingstabel wordt gegeven, wordt er een nieuw doel aangemaakt, waarin het de bedoeling is dat de breuken gelijknamig worden gemaakt. Als dat gelukt is, wordt het oude doel weer uit het geheugen gehaald, worden de oude, ongelijknamige breuken vervangen door de gelijknamige, en wordt het doel (het optellen van de breuken) hervat.

Als het hulpmiddel een grootheid is, wordt er geen subdoel aangemaakt, maar worden de breukwaarden rechtstreeks, via de grootheid vervangen en opgeteld.

6.3 De benodigde voorkennis

Om bovenstaande strategieën te kunnen gebruiken, moet het ACT-R model ook enige kennis hebben van andere wiskundige procedures. Het gaat hierbij om optellen, vermenigvuldigen en vergelijken.

Het kunnen optellen van natuurlijke getallen is nodig voor het kunnen optellen van breuken als natuurlijke getallen, voor het optellen van de tellers van gelijknamige breuken en voor het optellen van breuken via een bemiddelende grootheid. Ik heb daarvoor een eenvoudige optelprocedure geschreven, die erg lijkt op de optelprocedure zoals die is beschreven in "The Atomic Components of Thought"(Anderson & Lebiere, 1998).

Om een verhoudingstabel in te vullen en een grootheid te kunnen zoeken die deelbaar is door beide noemers, is het noodzakelijk dat de tafels van vermenigvuldiging goed beheerst worden. Ik heb hiervoor alle vermenigvuldigingsfeiten met een hoge activatiewaarde in het declaratief geheugen gezet.

Tenslotte is het noodzakelijk dat het model getallen kan vergelijken. Dit wordt gebruikt in alle strategieën voor het vergelijken van breuken, behalve uiteraard bij het ophalen van het antwoord uit het geheugen. Ook deze vaardigheid heb ik als declaratieve feiten in het geheugen gezet.

Ik ben er van uitgegaan dat bovengenoemde voorkennis perfect beheerst wordt. Er zal dus nooit een rekenfout worden gemaakt doordat het verkeerde feit uit het geheugen wordt opgehaald. In de praktijk gebeurt dit wel. Kinderen, en ook volwassenen, maken soms fouten als $8 * 6 = 42$. Het maken van rejenfouten, en de modellering hiervan is eerder onderzocht, bijvoorbeeld door Lebiere & Anderson (1998, hoofdstuk 9). Het is zeker mogelijk om het maken van rekenfouten te implementeren in een model. Het was in mijn model echter niet zozeer van belang dat er ook rekenfouten worden gemaakt, aangezien dit hele voorspelbare fouten zijn, en er dus geen twijfel is over het voorkomen van dergelijke fouten. Het implementeren van faalbare voorkennis zou niets toevoegen aan het onderzoek naar het aanleren van breuken.

Naast de hierbovengenoemde rekenkundige voorkennis, heeft mijn ACT-R model nog een ander soort voorkennis. Het beheerst de rekenkundige modellen die het als hulpmiddel gebruikt bij het oplossen van de sommen perfect. Ik ben ervan uitgegaan dat het gebruik van de strook, grootheid en verhoudingstabel in de groepen 5 en 6 zodanig zijn aangeleerd dat de kinderen in groep 7, en dus ook het model, deze modellen zonder problemen kunnen gebruiken. Dat een gebrekkige kennis van deze modellen tot slechtere resultaten zal leiden dan wanneer deze modellen goed beheerst worden is net zo aannemelijk als het feit dat een gebrekkige kennis van de tafels van vermenigvuldiging dat zal. Ik wil in mijn onderzoek de meer fundamentele problemen die ten grondslag kunnen liggen aan het falen van realistisch breukenonderwijs onderzoeken. Vandaar dat ik alle algemene oorzaken die kunnen leiden tot slechtere prestaties buiten beschouwing laat door bovengenoemde voorkennis als perfect beheerst te beschouwen.

Hoofdstuk 7

Opzet van het experiment en hypothesen

Voor het daadwerkelijke experiment heb ik verschillende versies gebruikt van het model. In dit hoofdstuk zal ik deze toelichten. Daarnaast zal ik kort iets zeggen over de sommen waarmee ik het model heb getraind.

7.1 Verschillende versies van het model

Ik heb drie verschillende versies gemaakt voor het model, die alledrie verschillen op het punt van feedback. In de eerste versie van het model, die ik het pluspunt-feedback model wil noemen, wordt er alleen feedback gegeven over de juistheid van het antwoord als er ook in de les directe feedback wordt gegeven. Als een kind zelfstandig sommen maakt, krijgt hij vaak op z'n vroegst de dag erna te horen of hij de sommen goed gemaakt had of niet. Voor het bepalen van het al dan niet succes hebben van een productieregel is het dan te laat. Als kinderen geen directe feedback krijgen, wordt het succes van een regel alleen bepaald door het al dan niet vinden van een antwoord. Ook foute strategieën kunnen hierdoor succes krijgen, omdat er immers een antwoord mee wordt gevonden.

Een manier om het leren van regels te versnellen is door na elke som meteen feedback te geven over het gevonden antwoord. Dit gebeurt in de tweede versie van het model. Deze versie van het model heb ik daarom het altijd-feedbcak model genoemd.

De derde versie van het model geeft niet alleen feedback op het antwoord, maar ook op de gebruikte methode. Dat wil zeggen, als het antwoord goed is, maar de redenering niet, zal het toch een failure opleveren in plaats van een succes. Dit is met name van belang voor het vergelijken van breuken. Het vergelijken van breuken is de enige soort sommen waarbij het gebruik van een foute strategie, het vergelijken van breuken als natuurlijke getallen, kan leiden tot een goed antwoord. Het is mogelijk voor zowel een leraar als voor een tutor om de redenering achter een antwoord te achterhalen, door het vragen om een uitleg bij een antwoord, of door het stellen van gerichte vragen, waardoor de redenering aan het licht komt. Deze laatste versie is in feite een uitbreiding op het tutor model, omdat het weer bij elke som feedback geeft op het antwoord, en in dit geval ook op de methode. Deze laatste versie van het model zal ik het

feedback-methode model noemen.

Niet alleen heb ik verschillende versies gemaakt van het model, ook binnen elke versie heb ik variaties gemaakt door middel van verschillende parameter-settings. Daarbij heb ik de G-waarde laten variëren tussen de 60 en de 80, om zowel een kind dat veel moeite wil doen om het goede antwoord te vinden als een kind dat wat minder lang wil nadenken te simuleren. De tweede waarde die ik heb laten variëren is de ps-waarde. Deze waarde bepaalt hoe snel productieregels worden gecompileerd. Het is de α-waarde die ik heb besproken in hoofdstuk 3. Ik heb versie van de modellen gemaakt met ps = 0.15 en met ps = 0.4. Hoe hoger de ps-waarde is, hoe sneller regels worden samengevoegd. Dit kan een voordeel zijn; je hebt minder voorbeelden nodig om een nieuwe regel te maken. Het kan echter ook een nadeel zijn. Regels kunnen te snel gegeneraliseerd worden waardoor er verkeerde regels kunnen ontstaan. Met deze variaties in G en ps hoop ik iets te kunnen zeggen over persoonlijke verschillen.

Uiteindelijk heb ik dus drie versies van het model elk in vier variaties laten draaien. Van elke variatie heb ik tien runs gemaakt, en de resultaten gemiddeld, om uitschieters door ruis, die er natuurlijk altijd zijn, zoveel mogelijk weg te middelen, en een zo objectief mogelijk beeld te krijgen van de prestaties van elke variatie van het model.

7.2 De gebruikte sommen

Om het model te trainen, ben ik in de leerboeken van *Pluspunt* nagegaan in welke sommen binnen het onderzoeksdomein er wanneer worden aangeboden. Deze sommen heb ik in dezelfde volgorde, en in dezelfde hoeveelheid aangeboden aan het model. Hierbij heb ik enige aanpassingen gedaan:

- Sommen die een antwoord boven de 1 opleveren heb ik zodanig gewijzigd dat ze onder de 1 blijven. Hierbij heb ik geprobeerd de moeilijkheid van de som intact te laten.

- Het aanvullen van breuken tot 1 en het aftrekken van breuken van 1 worden in *Pluspunt* als inwisselbaar gezien. In de handleiding wordt er ook vaak bij vermeld dat de kinderen dergelijke sommen ofwel kunnen oplossen als een aftrekking, ofwel als een aanvulling. Op de plekken waarbij dat toepasselijk was heb ik sommen waarbij breuken van 1 worden afgetrokken vertaald in sommen waarbij een breuk moet worden aangevuld tot 1. Dit om te zorgen dat het model niet te weinig oefenmateriaal krijgt omdat het geen aftreksommen maakt.

- Ook op andere plaatsen heb ik aftreksommen vervangen door optelsommen. Optelsommen en aftreksommen hebben veel met elkaar te maken. Als een kind goed kan optellen met breuken, zal hij waarschijnlijk ook goed kunnen aftrekken. Het oefenen met optelsommen geeft ook inzicht in aftrekken en vice versa. Wederom om te voorkomen dat mijn model slechter dan nodig was zou presteren omdat het te weinig oefensommen heeft, heb ik ook op plaatsen waar zowel optel- als aftreksommen werden aangeboden, aftreksommen vervangen door optelsommen en deze ook aangeboden.

Als er in het boek een voorbeeld bij de sommen werd vermeld, heb ik in mijn model het hulpmiddel dat in het voorbeeld wordt aangeboden ook meegegeven in de som. Ook bij de sommen die in de leerkrachtgebonden lessen worden aangeboden, en waarin de leraar normaal gesproken de sommen samen met de kinderen doorloopt, heb ik de hulpmiddelen die door de leerkracht worden aangeboden meegegeven in de som.

	Aanvullen tot 1		*Optellen gelijknamig*	
	hulp strook	*geen hulp*	*hulp strook*	*geen hulp*
Blok 1	4	0	0	0
Blok 2	12	11	5	13
Blok 3	2	12	2	24
Blok 4	0	16	1	19
Blok 5	2	8	2	18
Blok 6	0	0	0	1
Blok 7	0	5	1	10
Blok 8	0	20	0	21
Blok 9	0	0	0	0
Blok 10	0	1	0	0
Blok 11	0	5	0	0
Blok 12	0	0	0	0

Tabel 7.1: Hoeveelheid sommen per blok voor het aanvullen tot 1 en het optellen van gelijknamige breuken

	Vergelijken			*Optellen ongelijknamig*		
	hulp strook	*hulp tabel*	*geen hulp*	*hulp tabel*	*hulp grootheid*	*geen hulp*
Blok 1	0	0	0	0	0	0
Blok 2	0	0	0	0	0	0
Blok 3	6	1	3	0	0	0
Blok 4	2	1	31	0	0	0
Blok 5	5	1	2	0	0	0
Blok 6	2	2	0	7	0	7
Blok 7	0	0	3	0	0	0
Blok 8	2	0	10	2	0	28
Blok 9	1	1	8	0	0	19
Blok 10	0	0	3	5	6	29
Blok 11	0	0	0	0	1	13
Blok 12	0	0	0	0	0	25

Tabel 7.2: Hoeveelheid sommen per blok voor het vergelijken van breuken en het optellen van ongelijknamige breuken

In tabel 7.1 en 7.2 heb ik een overzicht gegeven van het aantal aangeboden sommen, en het aantal sommen waarbij hulp of een hint wordt gegeven. Nu lijkt het aantal keren dat er hulp wordt gegeven nogal klein. Dit is enigszins verraderlijk. Vaak wordt er van een rijtje van zes sommen de eerste som voorgedaan, en moet de rest zelfstandig worden gemaakt. Er geldt dan wel voor die andere sommen dat de leerlingen heel kortgeleden een uitleg hebben gehad over hoe ze de som op kunnen lossen. De kinderen worden dus minder in het diepe gegooid dan de tabel doet vermoeden.

7.3 Hypothesen voor het leergedrag van het model

Op grond van de strategieën die ik op basis van de methode *Pluspunt* en het experiment met de kinderen heb geschreven, en de ACT-R theorie is het mogelijk bij voorbaat al voorspellingen te doen over de leerprestaties van het model. Ik wil daar in deze paragraaf een kort overzicht van geven.

algemene strategieën

Ik denk dat het model zal leren dat het gebruiken van een meegegeven hulpmiddel, indien aanwezig, een betere methode is dan het zoeken van een voorbeeld. Als het model bepaalde oplossingsmethoden heeft weten te proceduraliseren, zullen deze gespecialiseerde regels waarschijnlijk de voorkeur verdienen boven de algemene strategieën. Daarom verwacht ik dat de algemene strategieën steeds minder gebruikt zullen worden.

het aanvullen van breuken tot 1

Het aanvullen van breuken tot 1 wordt waarschijnlijk goed geleerd. Er zijn voor dit onderdeel geen foute strategieën, dus het model kan de vaardigheid ofwel goed leren, ofwel helemaal niet. Aangezien het het gebruik van de strook goed beheerst zal de vaardigheid waarschijnlijk gewoon goed geleerd worden.

Het is aannemelijk dat er daarbij door proceduralisatie ook een regel ontstaat waardoor het zoeken van een voorbeeld of het gebruiken van het meegegeven hulpmiddel overbodig wordt. Of het gebruik van de strook helemaal zal verdwijnen, omdat het model inziet dat het via de strook eigenlijk gewoon de teller van de aan te vullen breuk aftrekt van de noemer, is twijfelachtig. Het tekenen van de strook gebeurt middels een LISP functie, en deze functies kunnen in principe niet geproceduraliseerd worden. Het is namelijk een motor-actie, die voor ACT-R onlosmakelijk met de oplossingsmethode verbonden is.

Het optellen van gelijknamige breuken

Het optellen van gelijknamige breuken zal waarschijnlijk minder soepel worden geleerd als het aanvullen van breuken tot 1. Er is nu immers een fout, maar makkelijk alternatief: Het optellen van breuken als natuurlijke getallen. Dit is ongetwijfeld een snellere procedure, maar zal ook altijd het verkeerde antwoord opleveren. Hierdoor zal de P-waarde van de regel uiteindelijk waarschijnlijk zo veel dalen dat de regel niet of nauwelijks meer gebruikt gaat worden. Mijn verwachting is dat deze regel sneller wordt afgeleerd bij de altijd-feedback modellen dan bij het pluspunt-feedback model.

Het vergelijken van breuken

Bij het vergelijken van breuken zal het waarschijnlijk meer moeite kosten om N-distractie af te leren. Aangezien het vergelijken van breuken op de manier van natuurlijke getallen ook het goede antwoord op kan leveren zal de P-waarde van deze regel waarschijnlijk minder snel lager worden dan bij het optellen van

breuken. Mijn verwachting is dan ook dat N-distractie alleen in het feedback-methode model, waarbij ook feedback wordt gegeven op de methode, even snel zal worden afgeleerd als bij het optellen van gelijknamige breuken. Het zal het slechtst worden afgeleerd in het pluspunt-feedback model.

Verder worden er veel meer voorbeelden met een strook gegeven dan met een verhoudingstabel. Dit leidt er denk ik toe dat de strook vaker gebruikt zal worden en er eerder een geproceduraliseerde regel wordt gecreëerd waarin het gebruik van de strook al ligt besloten, dan één waarin het gebruik van de verhoudingstabel is vastgelegd

het optellen van ongelijknamige breuken

Het optellen van ongelijknamige breuken vindt pas in de tweede helft van het jaar plaats. Dit heeft als voordeel dat de N-distractie, die bij het optellen van gelijknamige breuken waarschijnlijk in het begin vrij vaak zal optreden, hier waarschijnlijk een veel kleinere rol zal gaan spelen. De N-distractie regels zullen door het falen bij het optellen van gelijknamige breuken al zo'n lage P-waarde hebben gekregen dat ze tegen de tijd dat ongelijknamige breuken aan bod komen wel zijn 'afgeleerd'.

Wel is er een nieuwe foute strategie die het leren optellen van ongelijknamige breuken kan hinderen: het optellen van gelijknamige breuken. Uit het experiment met de kinderen van groep 7 van c.b.s."de Loopplank" bleek dat het een vrij veel voorkomende strategie is om ongelijknamige breuken als gelijknamige breuken op te tellen als de correcte oplossing voor het optellen van deze soort sommen nog niet bekend is. Er zijn geen goede voorspellingen te maken over hoeveel invloed deze foute strategie gaat hebben. Het hangt ervan af hoe sterk de regel is die zegt dat je het meegegeven hulpmiddel moet gebruiken. Het hangt er ook vanaf of er een regel is gecompileerd die zegt hoe je gelijknamige breuken moet optellen. En als die regel al is aangemaakt, hangt het er ook vanaf hoe lang geleden die is aangemaakt, en hoe sterk hij inmiddels is geworden.

De bemiddelende grootheid wordt pas heel laat aangeboden als hulpmiddel, en er worden relatief weinig voorbeelden van gegeven. Er is dus best kans dat het optellen van ongelijknamige breuken met behulp van een tabel de overheersende strategie wordt.

Snelheid

Voor alle soorten sommen is de verwachting dat de oplossingsprocedure door generalisatie steeds sneller zal gaan. Het overslaan van bepaalde stappen in de procedure zal tijdwinst opleveren. Of de sommen aan het eind veel sneller zullen worden gemaakt is twijfelachtig. De tijdrovendste stappen in de oplossingsprocedures, het tekenen van een strook of het invullen van een tabel, zijn waarschijnlijk niet te proceduraliseren.

Hoofdstuk 8

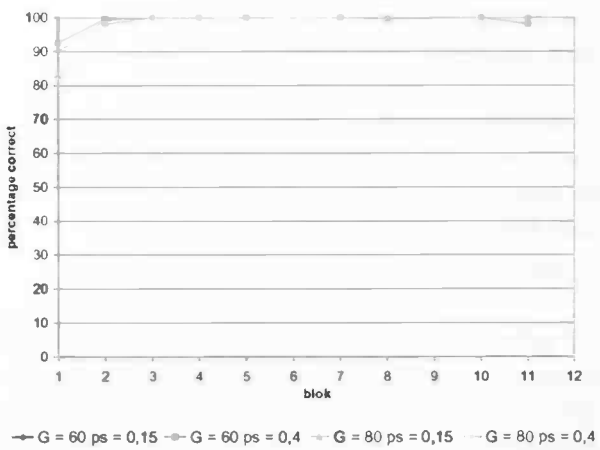
Resultaten

In dit hoofdstuk zal ik de resultaten van de verschillende runs behandelen. Ik zal daarvoor beginnen met de resultaten van het pluspunt-feedback model voor elk type som. Vervolgens zal ik van het altijd-feedback model de resultaten bespreken die opvallend verschillen van die van het pluspunt-feedback model. Van het feedback-methode model zal ik alleen de resultaten voor het vergelijken van breuken bespreken, omdat het alleen op dat punt verschilt van het altijd-feedback model.

8.1 Resultaten voor het pluspunt-feedback model

8.1.1 Het aanvullen van breuken tot 1

Bij het aanvullen van breuken traden, zoals verwacht, weinig problemen op (zie figuur 8.1). Ditzelfde bleek ook uit de praktijk, via de test-resultaten van de kinderen van c.b.s. "de Loopplank".



Figuur 8.1: Percentages goede antwoorden voor het aanvullen van breuken bij het pluspunt-feedback model. Voor elke parametersetting is het gemiddelde van 10 runs genomen.

De verklaring voor dit grote succes is dat het aanvullen van breuken tot 1 een geheel nieuwe vaardigheid is, waarvan geen equivalent bestaat in het rekenen met natuurlijke getallen. Het ontbreken van N-distractie bij dit soort sommen verklaart voor een groot deel waarom zij zo goed worden gemaakt. Het model heeft geen regels waarmee zij deze sommen fout kunnen beantwoorden.

Dat er in het begin toch geen honderd procent score wordt behaald wordt veroorzaakt door het feit dat het model er soms voor kiest om bij de eerste sommen te zoeken naar een voorbeeld. Omdat er op dat moment nog geen sommen zijn gemaakt, zijn er nog geen voorbeelden aanwezig. Er wordt bij alle vier de sommen een hulpmiddel meegegeven, maar omdat het aan het begin van het leerproces is, zullen de regels voor het gebruiken van het meegegeven hulpmiddel en die van het zoeken van een voorbeeld nog ongeveer even sterk zijn. Omdat de expected gain van de regel voor het zoeken naar een voorbeeld heel snel veel lager zal worden dan de regel voor het gebruiken van het hulpmiddel, lost dit probleem zich vrij snel op, zoals ook te zien is in de grafiek.

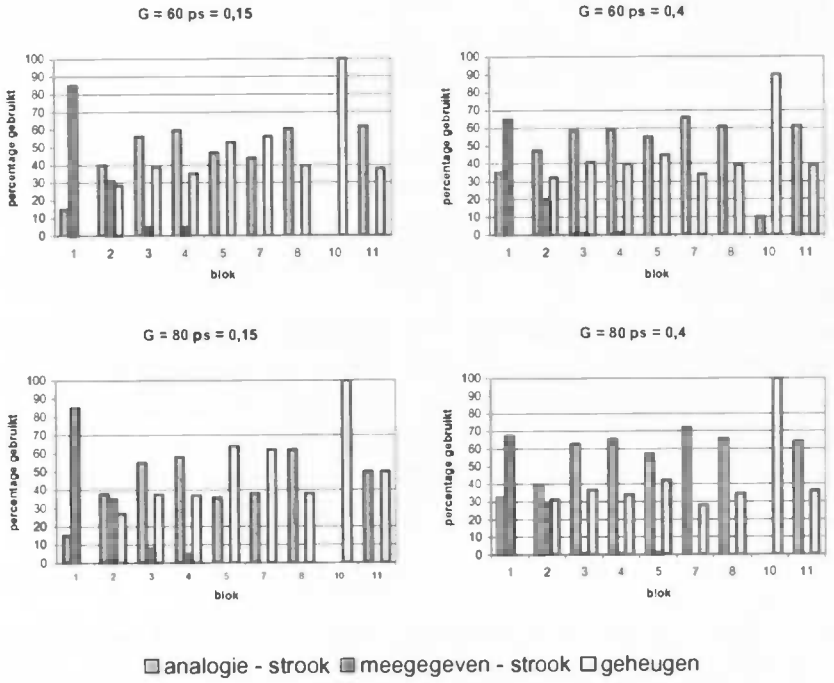
Het aanvullen tot 1 wordt al vrij snel zodanig geproceduraliseerd dat het zoeken van een voorbeeld of het gebruik van een meegegeven hulpmiddel niet meer nodig is. In alle variaties van het model wordt de volgende regel geproduceerd:

```
(p Production12027
   =goal>
    isa SUM
    task Make-One
    state nil
    - method Analogy
    - method N-Distraction
==>
   =goal>
    tool Bar
    state Example-Found
    method Analogy
)
```

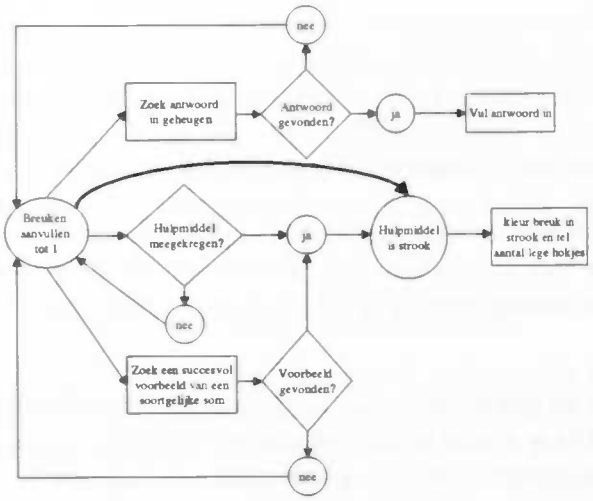
In gewone taal betekent dit:
ALS je doel het aanvullen van een breuk tot 1 is
DAN gebruik je een strook

In de grafieken met de gebruikte methoden is terug te vinden dat het gebruik van het meegegeven hulpmiddel steeds minder wordt. In blok 1 wordt er bij alle settings nog veelvuldig gebruik van gemaakt, vanaf blok 3 nauwelijks tot nooit meer. Dit komt natuurlijk deels doordat er ook niet altijd een voorbeeld wordt meegegeven. Maar dit is niet de enige reden. Want ook als er wel een hulpmiddel wordt meegegeven kiest het model op een gegeven moment voor de snellere, gecompileerde regel. Het heeft de hint niet meer nodig.

Omdat de geproceduraliseerde regel een nieuwe regel is, was het niet mogelijk de computer het gebruik van deze regel apart te laten registreren. Zoals ook wel blijkt uit de gecreëerde productieregel, deelt het programma het ge-



Figuur 8.2: Gebruikte methoden voor het aanvullen van breuken in het pluspunt-feedback model. Ook de geproceduraliseerde regel valt onder analogie. De resultaten voor elke parametersetting zijn het gemiddelde van 10 runs.

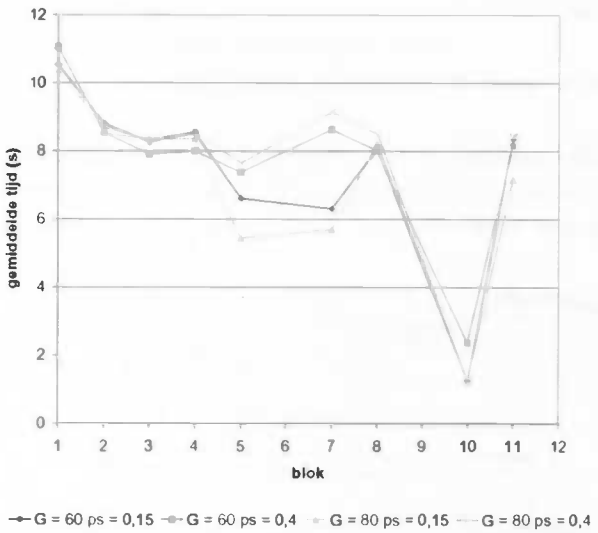


Figuur 8.3: De geproceduraliseerde regel (de dikke lijn) tussen de andere oplossingsstrategieën

bruik van de geproceduraliseerde regel in bij de analogie-methode, het vinden van een voorbeeld en de som analoog aan dit voorbeeld oplossen. Blauwe balken in de grafiek staan dus niet alleen voor het aantal keren dat er een voorbeeld is gezocht, maar ook voor het gebruik van de snellere, geproceduraliseerde regel.

Het voordeel van een geproceduraliseerde regel wordt nog eens duidelijk gemaakt in figuur 8.3. Het levert een mogelijkheid om zonder een voorbeeld te zoeken of een meegegeven hulpmiddel te gebruiken de goede oplossingsmethode te gebruiken. De algemene strategieën zijn hiermee voor deze soort som overbodig geworden.

Wat verder opvalt is dat het antwoord voor het aanvullen van breuken opvallend vaak uit het geheugen wordt gehaald. Dit is bij geen van de andere sommen het geval. Blijkbaar worden bij het aanvullen van breuken zo vaak dezelfde sommen gevraagd dat het model ze op een gegeven moment uit z'n hoofd kent. Overigens is de hele hoge piek bij blok 10 enigszins misleidend; het gaat hier maar om 1 som. En van die som is het antwoord blijkbaar bekend.



Figuur 8.4: Gemiddelde tijden om het het goede antwoord te vinden voor het aanvullen van breuken in het pluspunt-feedback model. De resultaten voor elke parametersetting zijn het gemiddelde van 10 runs

Uit de grafiek met de gemiddelde tijd blijkt dat de gemiddelde tijd zeker daalt (zie figuur 8.4). Dit is waarschijnlijk slechts voor een klein deel te danken aan proceduralisatie, aangezien ook het ophalen van een som uit het geheugen een aanzienlijke daling in de gemiddelde tijd veroorzaakt. Dat is goed te zien aan de extreme daling bij blok 10. Als je de enorme daling in tijd die het ophalen van het antwoord uit het geheugen kost in ogenschouw neemt, zal de proceduralisatie weinig tijdwinst opleveren, gezien het feit dat de gemiddelde tijden ver boven de tijd voor het ophalen uit het geheugen liggen.

Dit is niet zo verwonderlijk, gezien het feit dat er maar een heel klein deel van het oplossingsproces gegeneraliseerd is. Alleen het vinden van een voorbeeld om tot de juiste oplossingsmethode te komen kan worden weggelaten. Het hele,

tijdrovende, proces van het tekenen van een strook, het kleuren van de breuk en het tellen van het aantal delen dat nog nodig is, kan niet gegeneraliseerd worden. Het model ontdekt niet dat het hele proces van tekenen en kleuren eigenlijk gewoon hetzelfde is als het verschil bepalen tussen de teller en de noemer. Het oplossen van $\frac{3}{5} + .. = 1$ is onder te verdelen in enkele stappen. Ten eerste teken je een strook. Deze heeft evenveel vakjes als de noemer van de breuk. Immers, $\frac{5}{5}$ is een hele (1), en de strook is één geheel. Daarna kleur je 3 van de 5 vakjes, waarmee de aan te vullen breuk is gevisualiseerd. Tenslotte tel je de lege vakjes, realiseert je dat het 2 van de 5 vakjes zijn, en geeft het antwoord, $\frac{2}{5}$. Act-R kan de stap van deze procedure naar het verschil bepalen van teller en noemer niet maken. Dat heeft ten eerste te maken met het feit dat het tekenen van een strook een motor-actie is, die voor ACT-R onlosmakelijk verbonden is met de oplossingsprocedure. Maar het is daarnaast ook mogelijk dat de link tussen het tekenen van een strook, met kleuren en tellen, en het aftrekken van twee getallen gewoon niet automatisch wordt gelegd.

samenvatting

Samengevat gaat het aanvullen van breuken tot 1 voor alle parametersettings goed in het model waarbij slechts af en toe feedback wordt gegeven op het antwoord. Ook voor kinderen vormt blijkens de test onder de kinderen van c.b.s "de Loopplank" het aanvullen van breuken tot 1 geen enkel probleem.

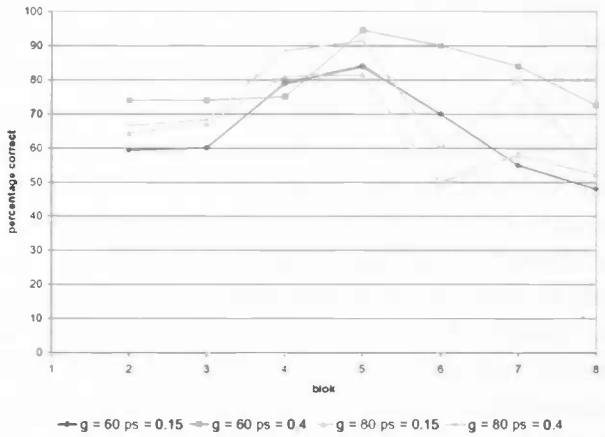
Dit is te verklaren doordat het model voor dit soort sommen geen last heeft van N-distractie. Er is geen manier waarop hij het fout kan doen. Wel is het mogelijk dat het model helemaal geen oplossingsmethode vindt, en daarmee dus ook geen antwoord. Dit gebeurt echter alleen in het eerste blok, en ook dan niet heel vaak.

Al vrij snel wordt de oplossingsmethode zodanig geproceduraliseerd dat er geen voorbeeld meer nodig is om een oplossingsmethode te vinden. Dit versnelt de oplossingsmethode enigszins, maar niet significant. Een significante versnelling ontstaat niet, doordat het tijdrovendste deel van de oplossingsprocedure, het tekenen van een strook, niet gegeneraliseerd kan worden. Wat wel een snelle oplossingsmethode is, is het antwoord uit je geheugen halen. Dit gebeurt in het model vrij vaak.

8.1.2 Het optellen van gelijknamige breuken

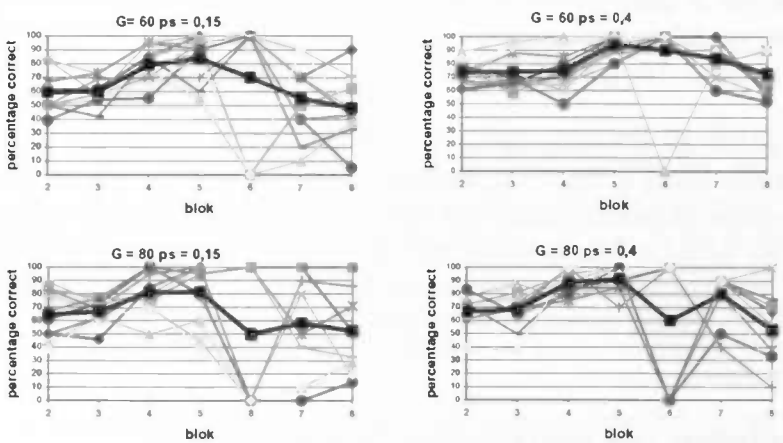
De grafiek met de gemiddelde percentages goede antwoorden voor het optellen van gelijknamige breuken laat voor alle parameter-settings een aanvankelijk stijgende lijn, gevolgd door een dalende lijn vanaf blok 5 (zie figuur 8.5).

Voor het optellen van gelijknamige breuken leveren deze gemiddelden echter geen goed beeld van de werkelijkheid op. In werkelijkheid lopen de percentages goede antwoorden vanaf blok 5 veel meer uiteen dan figuur 8.5 laat zien. Uit de resultaten van de afzonderlijke runs blijkt dat er na blok 4 à 5 een omslagpunt ligt (zie figuur 8.6). In blok 6 betreft het overigens maar 1 som. Het fout beantwoorden van deze som krijgt daardoor onevenredig veel gewichtswaarde. De parametersetting waarbij het stabielst geleerd lijkt te worden lijkt die waarbij G



Figuur 8.5: Percentages goede antwoorden voor het optellen van gelijknamige breuken bij het pluspunt-feedback model. Voor elke parametersetting is het gemiddelde van 10 runs genomen.

= 60 en ps = 0,4. Bij deze settings eindigen alle 10 de runs met een percentage van boven de 50 procent.



Figuur 8.6: Percentages goede antwoorden voor het optellen van gelijknamige breuken per parametersetting. Tien verschillende runs en het gemiddelde (de dikke zwarte lijn).

Het lijkt erop dat het bij het optellen van gelijknamige breuken voor een groot deel van het toeval afhangt of het oplossen van dit soort sommen uiteindelijk geleerd wordt. Dat het de eerste paar blokken vrij goed gaat is te verklaren uit het feit dat er in deze blokken nog heel veel feedback wordt gegeven op het gevonden antwoord. Hierdoor hebben regels de kans te stabiliseren. De snelle N-distractie regels die foute antwoorden opleveren zullen door een steeds lagere

P waarde ook een steeds lagere PG - C waarde krijgen, en de tijdrovende correcte oplossingsmethoden waarbij gebruik wordt gemaakt van een strook zullen door een steeds hogere P waarde een steeds hogere PG - C waarde krijgen. Het lijkt erop dat de expected gain waarden van beide regels elkaar niet zo heel veel ontlopen op het moment dat de feedback op het antwoord drastisch vermindert. Dit kan verklaren waarom in sommige gevallen wel geleerd wordt om gelijknamige breuken goed op te tellen en in andere gevallen niet. Als de expected gain van beide regels ongeveer even hoog is op het moment dat de antwoorden niet meer direct gecontroleerd worden, speelt ruis een vrij grote rol bij de keuze van de oplossingsmethode bij de volgende som. Aangezien met beide soorten oplossingsmethoden wel een antwoord wordt gevonden, zal de regel die gekozen wordt om de volgende som op te lossen, op het moment dat er geen feedback meer op het antwoord wordt gegeven, een extra succes, en daarmee een grotere P-waarde en dus een grotere expected gain krijgen. Als dus enkele keren de goede regel wordt gekozen op het omslag-punt zal het optellen waarschijnlijk wel goed geleerd worden, en als enige malen de foute regel wordt gekozen zal dit waarschijnlijk leiden tot slechte resultaten.

Er is dan ook geen logische verklaring voor het feit dat de resultaten bij de versie van het model met een G-waarde van 60 en een ps-waarde van 0,4 zo veel beter zijn dan die van de andere versies. Waarschijnlijk is dit gewoon toeval, en heeft ruis er bij deze versie net iets vaker voor gezorgd dat in deze versie de goede regels werden geleerd.

Hulp uit onverwachte hoek kan er hierbij nog komen van het optellen van ongelijknamige breuken, wat vanaf blok 6 ook begint. Voor deze sommen kan ook N-distractie worden gebruikt, en aangezien er vooral in het begin wel directe feedback wordt gegeven bij deze sommen, kan dit een aantal failures voor de N-distractie-regel opleveren die de expected gain van deze regel weer onder die van de regel voor het correct optellen van gelijknamige breuken kan brengen.

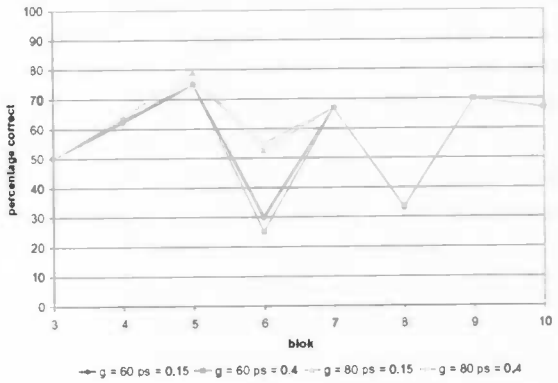
Al met al kan er met de feedback zoals die in dit model gegeven wordt wel geleerd worden hoe je gelijknamige breuken optelt, maar die kans is maar rond de 60 %. Iets langer doorgaan met het geven van directe feedback zal waarschijnlijk leiden tot veel betere resultaten, aangezien de concurrerende regels dan een betere PG - C waarde zullen krijgen.

samenvatting

Het optellen van gelijknamige breuken gaat in maar iets meer dan de helft van de gevallen goed. Dit komt waarschijnlijk doordat er niet lang genoeg directe feedback wordt gegeven op het antwoord. Hierdoor zijn de P-waarden van de N-distractie regels en de regels voor het optellen met behulp van stroken nog niet voldoende gestabiliseerd om de PG - C waarde van de correcte regels hoger te laten worden dan die van de regels voor N-distractie. Hierdoor wordt het voor een groot deel afhankelijk van ruis of de juiste oplossingsmethode geleerd wordt of niet.

8.1.3 Het vergelijken van breuken

Voor het vergelijken van breuken worden op het eerste gezicht redelijke resultaten behaald. Uiteindelijk wordt voor alle parametersettings zon 70 % van de sommen goed beantwoord (zie figuur 8.7). Dit betekent op zichzelf al dat het vergelijken van breuken niet helemaal goed wordt geleerd. Het is uiteraard wenselijk dat de leerlingen aan het eind van het jaar tegen de 100 % score zouden zitten.



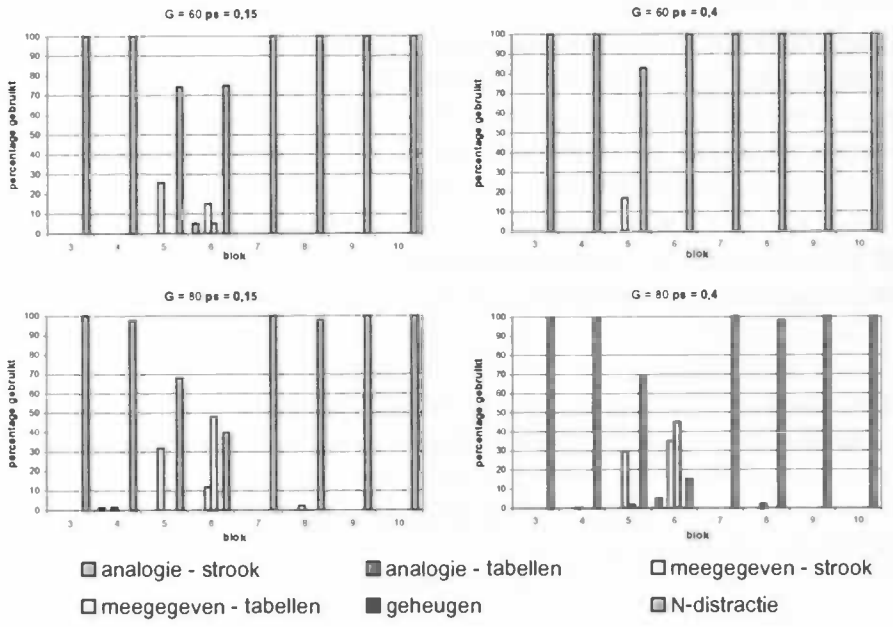
Figuur 8.7: Percentages goede antwoorden voor het vergelijken van breuken bij het pluspunt-feedback model. Voor elke parametersetting is het gemiddelde van 10 runs genomen.

Het blijkt echter dat het vergelijken van breuken zelfs nog minder goed wordt geleerd dan de percentages goede antwoorden doen vermoeden. In bijna alle gevallen wordt namelijk het antwoord via een foute methode verkregen, namelijk door middel van N-distractie. Dit is heel duidelijk te zien in de grafieken met de gebruikte methoden (zie figuur 8.8).

Dat de N-distractie methode (het vergelijken van alleen de tellers of het vergelijken van alleen de noemers) zo populair is, is eenvoudig te verklaren uit het feit dat het oplossen van een som via deze methode vele malen sneller gaat dan via een van de andere methoden (het tekenen van tabellen of van stroken). Zon foute, snellere regel kan natuurlijk wel worden afgeleerd. De PG - C waarde van de regel, die in het begin heel hoog zal zijn door de lage C-waarde (de kosten in seconden), zal namelijk steeds lager worden als de waarde van P (de kans dat met deze regel het doel bereikt wordt) steeds kleiner wordt.

Helaas wordt in dit model de waarde van P niet zo snel kleiner. Dit heeft verschillende oorzaken. Ten eerste wordt niet op elke som directe feedback gegeven. Puur het vinden van een antwoord levert in die gevallen al een succes voor de gebruikte regel op.

Daarnaast levert de regel soms ook als er wel directe feedback wordt gegeven een succes op, simpelweg omdat met N-distractie vaak het goede antwoord toevallig gevonden wordt. Als je bijvoorbeeld de breuken $\frac{3}{4}$ en $\frac{2}{5}$ vergelijkt, en je vergelijkt bijvoorbeeld alleen de noemers, zul je concluderen dat 3 groter is



Figuur 8.8: Gebruikte methoden voor het vinden van de goede antwoorden voor het vergelijken van breuken bij het pluspunt-feedback model. Voor elke parametersetting is het gemiddelde van 10 runs genomen.

dan 2 en dat dus $\frac{3}{4}$ groter is dan $\frac{2}{5}$. Hoewel de redenering hier niet goed is, wordt wel het goede antwoord gevonden, en zal de N-distractie regel een succes krijgen.

Tenslotte worden er na een aantal blokken geen voorbeeld meer meegegeven voor het oplossen van vergelijkingssommen. Als de PG - C waarden van de N-distractie regels door de foute antwoorden die deze regels ook opleveren uiteindelijk wel zover zijn gedaald dat de correcte regels een kans kunnen krijgen, kunnen deze regels al niet eens meer slagen omdat zowel de "gebruik het voorbeeldäls de "los op analoog aan een voorbeeld"regels niet meer *kunnen* vuren bij gebrek aan voorbeelden.

Als je kijkt naar de percentages goede antwoorden die gevonden kunnen worden via deze foute oplossingsmethode zou je kunnen stellen dat *Pluspunt* bij het maken van zijn sommen misschien beter had moeten kijken of bij deze som het goede antwoord ook via N-distractie gevonden kan worden. Door het zodanig kiezen van je sommen dat zowel het vergelijken van de tellers als het vergelijken van de noemers het verkeerde antwoord oplevert kun je allicht een deel van het succes van N-distractie voorkomen.

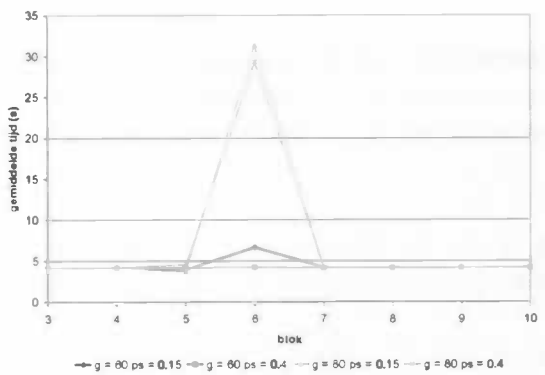
Toch is het niet geheel eerlijk *Pluspunt* puur te verwijten dat het zijn sommen slecht heeft gekozen. In een klasse-situatie zal er, wanneer er directe feedback wordt gegeven, lang niet altijd alleen naar het antwoord worden gekeken dat de kinderen hebben gegeven. Er zal ook wel degelijk aandacht worden besteed aan de gebruikte oplossingsmethoden. Dit zou dan echter wel zodanig moeten gebeuren dat alle kinderen heel actief bij de bespreking worden betrok-

ken. Anders blijft er een grote kans dat kinderen niet opletten, of afhaken zodra ze horen dat het antwoord dat zij hebben gegeven goed is.

Verder controleert *Pluspunt* bij een deel van de sommen wel indirect de methode die de kinderen hebben gebruikt door een vervolgvraag te stellen die alleen te beantwoorden valt als ze het vergelijken van breuken via een goede methode hebben gedaan. De vragen zijn dan van de volgende vorm:

> Piet heeft $\frac{2}{3}$ deel van zijn krantenwijk gelopen en Jan $\frac{3}{5}$ deel.
> Wie heeft het grootste deel gelopen?
> Hoeveel is het verschil?

Als je bij deze vraag de breuken vergelijkt via een verhoudingstabel, kun je daarna met diezelfde tabel ook het verschil bepalen. Deze methode is echter wel enigszins dwingend, maar kan er ook toe leiden dat kinderen de a-vraag met N-distractie oplossen en de b-vraag niet of verkeerd beantwoorden (misschien zelfs ook met behulp van N-distractie).



Figuur 8.9: Gemiddelde tijden voor het vinden van het goede antwoord voor het vergelijken van breuken bij het pluspunt-feedback model. Voor elke parametersetting is het gemiddelde van 10 runs genomen.

Het voordeel van het gebruiken van N-distractie boven de juiste methoden wordt heel erg duidelijk als je kijkt naar de grafiek met de gemiddelde tijden die het kost om het goede antwoord te vinden.(zie figuur 8.9). Er is een enorme uitschieter bij blok 6 bij de versies van het model met G = 80. Zoals te zien was in de grafieken met gebruikte methoden worden in deze versies van het model in dit blok nog redelijk vaak correcte methoden gebruikt om het antwoord te vinden (zie figuur 8.8). Dit levert in dit blok wel beduidend meer goede antwoorden, zoals te zien is in figuur 8.7 , maar kost ook overduidelijk meer tijd en wordt daardoor niet lucratief genoeg bevonden. De regels krijgen door de hoge kosten een te lage expected gain vergeleken met de N-distractie regels.

samenvatting

Bij het vergelijken van breuken wordt wel vaak het goede antwoord gevonden, maar toch leert het model niet op een correcte wijze breuken met elkaar vergelijken. Dit komt omdat in een groot deel van de gevallen niet naar de juistheid van het antwoord wordt gekeken, maar alleen óf er een antwoord is gevonden. In de gevallen dat er wel naar de juistheid van het antwoord wordt gekeken is er ook nog een vrij grote kans dat het antwoord gevonden met behulp van N-distractie toevallig goed is. Dit resulteert in een vrij hoge P-waarde voor de N-distractieregels, hetgeen samen met de lage kosten van deze regels leidt tot een hoge PG - C waarde voor deze regels, waardoor de correcte regels al gauw worden uitgesloten. Zakt de PG - C waarde van de regels voor N-distractie uiteindelijk toch, dan kunnen de correcte regels al niet eens meer slagen omdat ze gebruik maken van analogie en er geen voorbeelden (meer) beschikbaar zijn.

8.1.4 Optellen van ongelijknamige breuken

Ook bij het optellen van ongelijknamige breuken kan N-distractie als oplossingsmethode worden gekozen. Maar bij deze sommen is nog een tweede foute oplossingsmethode mogelijk. Het is mogelijk om ongelijknamige breuken op te tellen als gelijknamige breuken, dus door een strook te tekenen, en daar de beide tellers in te kleuren. Deze manier van optellen was ook terug te vinden bij de kinderen van c.b.s. "de Loopplank". Het ging hierbij om kinderen die het optellen van gelijknamige breuken wel beheersen, maar het optellen van ongelijknamige breuken nog niet.

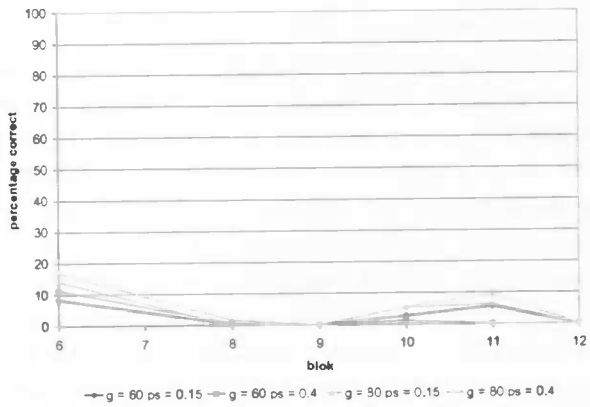
Deze oplossingsmethode is mijns inziens geen echte vorm van N-distractie aangezien de kinderen wel degelijk weten dat ze bij het optellen van breuken iets anders moeten doen dan bij het optellen van natuurlijke getallen. Wisten ze dat niet, dan hadden ze waarschijnlijk wel zowel de tellers als de noemers bij elkaar opgeteld. Dit is meer een vorm van gelijknamige-breuken-distractie.

Naast foutieve oplossingsmethoden zijn er uiteraard ook goede oplossingsmethoden voor het optellen van ongelijknamige breuken. In de eerste plaats kunnen dezen opgeteld worden met behulp van een verhoudingstabel. Dit is ook de eerste methode die *Pluspunt* aanbiedt. Later kan ook gebruik gemaakt worden van een bemiddelende grootheid om de sommen op te lossen.

Zoals te zien is in figuur 8.10 worden bij elke parametersetting van het model dramatisch slechte resultaten behaald. Al vanaf het begin wordt er heel erg laag gescoord, en dit wordt alleen maar slechter.

Deze resultaten zijn deels te verklaren uit het feit dat er twee foutieve methoden zijn, waarvan er minimaal één tegen de tijd dat het optellen van ongelijknamige breuken aan bod komt al een hele hoge expected gain heeft. Immers, bij het optellen van gelijknamige breuken hebben we gezien dat er ofwel gebruik wordt gemaakt van N-distractie ofwel van optellen met behulp van een strook. Deze beide oplossingen zijn toepasbaar op het optellen van ongelijknamige breuken, maar beide zijn fout!

Een belangrijker verklaring is echter dat juist bij deze moeilijke sommen, waarbij zoveel mis kan gaan, heel weinig feedback wordt gegeven. In blok 6 wordt in les 4, waar het optellen van ongelijknamige breuken wordt geïntroduceerd,



Figuur 8.10: Percentages goede antwoorden voor het optellen van ongelijknamige breuken bij het pluspunt-feedback model. Voor elke parametersetting is het gemiddelde van 10 runs genomen.

op alle vier de sommen feedback gegeven. Deze sommen worden klassikaal behandeld. In les 11 wordt op 2 sommen feedback gegeven In blok 8, waarin in totaal dertig optelsommen met ongelijknamige breuken worden gevraagd, wordt slechts op vier sommen feedback gegeven. Voor het optellen van ongelijknamige breuken met behulp van een grootheid geldt hetzelfde verhaal. Zij worden geïntroduceerd in blok 10, waar in de eerste les dat ze voorkomen maar op één(!) som feedback wordt gegeven. Later, in les 11 wordt er nog eens op zes sommen feedback op het antwoord gegeven. In alle andere gevallen geldt dus dat alleen het vinden van een antwoord een succes oplevert. Met name het gebruik van N-distractie levert veel tijdwinst op, en zal de voorkeur krijgen boven alle andere regels. Het is dan ook niet zo verwonderlijk dat het model zo slecht presteert.

Dat de verkeerde regels worden gebruikt voor het maken van deze sommen blijkt ook nog eens uit de gegeneraliseerde regels, die we bij elke parametersetting van het model terug vinden.

1)

```
(p Production16056
   =goal>
     isa SUM
     nom1 =nom1
     denom1 =denom1
     nom2 =nom2
     denom2 =denom2
     task Add
     state Look-Up-Sum
   =retrieval>
     isa ERROR
==>
   =goal>
     tool nil
     method N-Distraction
     state nil
   +goal>
     isa NSUM
     task Add
     num1 =nom1
     num2 =nom2
     parent =goal
)
```

oftewel:
ALS je doel het optellen van twee breuken is
EN je kunt het antwoord niet in het geheugen vinden
DAN gebruik je N-distractie om de breuken op te tellen

2)

```
(p Production16086
   =goal>
     isa SUM
     task Add
     state nil
     - method Analogy
     - method N-Distraction
==>
   =goal>
     tool Bar
     state Example-Found
     method Analogy
)
```

oftewel
ALS je doel het optellen van twee breuken is
DAN gebruik je een strook.

In de eerste regel wordt het gebruik van een foute strategie (N-distractie) geproceduraliseerd. Dit levert een verklaring voor het feit waarom het afleren van een foute strategie zoveel moeilijker wordt als je deze strategie al heel lang gebruikt. Als de foute strategie geproceduraliseerd is, moet niet alleen de foute regel zelf worden afgeleerd, maar ook al zijn 'kinderen', de geproceduraliseerde regels die op basis van de foute regel zijn ontstaan.

De tweede regel is natuurlijk prima voor het optellen van gelijknamige breuken. Hij is echter ook feilloos toe te passen op het optellen van ongelijknamige breuken. En als dan het antwoord niet direct gecontroleerd wordt, zal deze regel hiervoor ook gebruikt blijven worden.

Samenvatting

Ook het optellen van ongelijknamige breuken gaat niet goed. Het gaat zelfs ronduit slecht. Oorzaak hiervoor kan het ruimere aanbod van foute methoden zijn, die waarschijnlijk ook nog een vrij hoge expected gain hebben. Belangrijker lijkt echter te zijn dat er erg weinig feedback wordt gegeven op deze moeilijke sommen.

In het algemeen lijkt het erop dat het leren van breuken in de meeste gevallen niet erg goed gaat als de leermethode die wordt aangeboden in *Pluspunt* exact gevolgd wordt. Dit lijkt voor het grootste gedeelte te maken te hebben met het geven van te weinig feedback. Bij het vergelijken van breuken betreft het dan met name feedback op de methode en bij het optellen van zowel gelijknamige breuken als ongelijknamige breuken gaat het om te weinig directe feedback op de gegeven antwoorden.

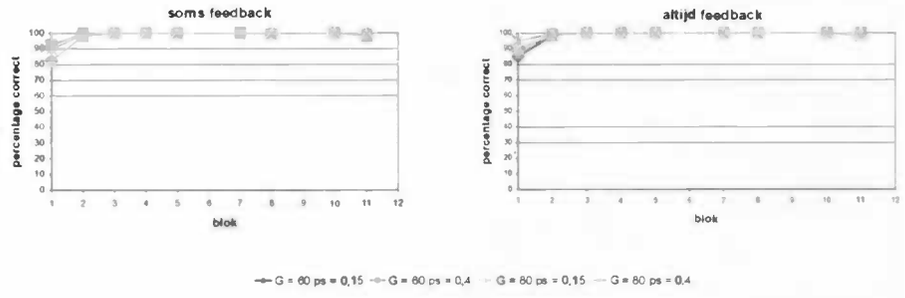
Natuurlijk zijn er grote verschillen tussen de sommen zoals ze hier worden aangeboden en zoals ze in een klassesituatie worden aangeboden. Een leraar zal bijvoorbeeld waarschijnlijk ingrijpen als hij ziet dat kinderen sommen fout blijven maken. En al heeft het geven van feedback lange tijd na het maken van de sommen geen directe invloed op de regels, indirect heeft het dat natuurlijk wel. Kinderen onthouden misschien wel dat de methode die ze de vorige keer gebruikt hebben niet werkte, en vragen dan om meer uitleg, of zoeken de goede oplosmethode op in hun boek of hun schrift.

8.2 Resultaten voor het altijd-feedback model

8.2.1 Het aanvullen tot 1 en het vergelijken van breuken

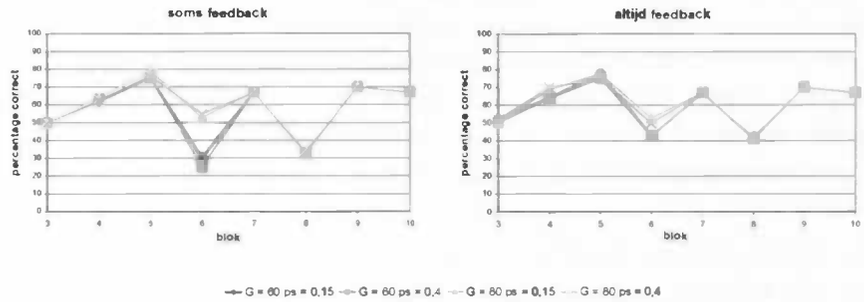
Aangezien het aanvullen tot 1 ook met relatief weinig feedback al heel erg goed ging, viel er voor deze soort som weinig te verbeteren door het toevoegen van extra feedback. De resultaten voor deze sommen verschillen dan ook nauwelijks van die verkregen met de versie van het model met slechts af en toe feedback (zie figuur 8.11).

Ook de tijden voor het vinden van het goede antwoord en de gebruikte methoden verschillen niet significant. Dit is ook wel logisch, want er werd ook met weinig feedback al vanaf blok 2 een constante 100 % score behaald. Hieraan viel met extra feedback weinig te verbeteren.



Figuur 8.11: Vergelijking van de percentages goede antwoorden voor het aanvullen van breuken tot 1. Voor elke parametersetting is het gemiddelde van 10 runs genomen.

Ook bij het vergelijken van breuken valt weinig verschil te onderscheiden in de resultaten van het model met af en toe feedback en het model met continue feedback (zie figuur 8.12)



Figuur 8.12: Vergelijking van de percentages goede antwoorden voor het vergelijken van breuken. Voor elke parametersetting is het gemiddelde van 10 runs genomen.

Ook dit valt eenvoudig te verklaren. Het probleem bij het vergelijken van breuken was namelijk niet dat het goede antwoord nooit werd gevonden, maar dat het goede antwoord veel te vaak werd gevonden wanneer een verkeerde methode werd gebruikt, nl. N-distractie. Nu er continue feedback op het antwoord komt, is dit probleem uiteraard nog niet verholpen. Toch zouden de N-distractieregels bij deze versie een lagere expected gain moeten hebben gekregen dan bij de eerste versie van het model, aangezien met N-distractie niet altíjd het goede antwoord wordt gevonden. Nu er bij elke vraag wordt gekeken of het gegeven antwoord ook goed is, zouden de regels voor N-distractie meer failures moeten hebben gekregen dan in de eerste versie van het model, en daardoor een lagere P-waarde en dus ook een lagere PG - C waarde hebben gekregen. Dit valt niet terug te zien in de grafiek met de percentages goede antwoorden, maar wel in de expected gain van de regels. Die is als volgt: (zie figuur 8.1)

Uit tabel 8.1 blijkt duidelijk dat het geven van continue feedback op het

	Soms feedback op antwoord			
	G = 60 ps = 0,15	*G = 60 ps = 0,4*	*G = 80 ps = 0,15*	*G = 80 ps = 0,4*
N-distractie tellers	50,344	50,364	67,238	68,204
N-distractie noemers	43,964	45,559	61,673	61,480
	altijd feedback op antwoord			
	G = 60 ps = 0,15	*G = 60 ps = 0,4*	*G = 80 ps = 0,15*	*G = 80 ps = 0,4*
N-distractie tellers	42,061	42,354	58,407	59,526
N-distractie noemers	28,484	42,354	40,117	42,586

Tabel 8.1: Expected gain van de N-distractie regels van het pluspunt-feedback model en het altijd-feedback model

antwoord wel degelijk een effect heeft gehad op het leren van het model. De expected gain van de N-distractie regels was bij het model waarbij er op elk antwoord feedback werd gegeven veel lager dan bij het model waarbij slechts af en toe feedback op het antwoord werd gegeven. De invloed was echter niet groot genoeg om de expected gain van de N-distractieregels lager te maken dan die voor de correcte regels. Dit komt doordat N-distractie bij dit soort sommen te vaak het goede antwoord oplevert.

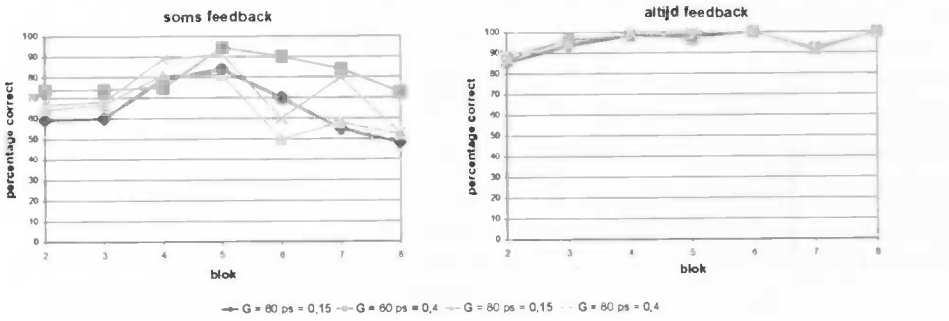
samenvatting

Het geven van extra feedback heeft voor het aanvullen van breuken tot 1 en het vergelijken van breuken geen zichtbare invloed gehad. Voor het aanvullen van breuken komt dit doordat deze vaardigheid ook zonder feedback al goed geleerd werd. Er viel dus weinig meer te verbeteren. In het leren vergelijken van breuken trad wel een verbetering op. De regels voor de foute strategieën hadden een beduidend lagere waarde dan in het pluspunt-feedback model. Dit had echter geen effect op de resultaten. Omdat met N-distractie nog te vaak het goede antwoord wordt gevonden, blijven de regels voor N-distractie een hogere expected gain houden dan de goede strategie.

8.2.2 Het optellen van gelijknamige breuken

Waar wel een heel duidelijk verschil te onderscheiden is tussen de eerste en de tweede versie van het model is bij het optellen van gelijknamige breuken. (zie figuur 8.13)

Bij de versie van het model waarbij slechts af en toe feedback werd gegeven werd in ongeveer de helft van de gevallen wel goed geleerd hoe gelijknamige breuken moeten worden opgeteld, en in de andere helft van de gevallen werd dit absoluut niet geleerd. Er is toen al gesuggereerd dat dit probleem zou kunnen zijn ontstaan doordat op het moment dat er geen feedback op de gegeven antwoorden meer werd gegeven er nog niet voldoende verschil was tussen de expected gain van de correcte, tijdrovende regels en de incorrecte, maar snelle



Figuur 8.13: Vergelijking van de percentages goede antwoorden voor het optellen van gelijknamige breuken. Voor elke parametersetting is het gemiddelde van 10 runs genomen.

regels. Ook is toen gesuggereerd dat door het krijgen van meer failures bij de incorrecte regels, dus door langer feedback te geven, dit probleem verholpen zou kunnen worden. Dit blijkt bijzonder goed te werken.

Uiteraard is het niet alleen het verkrijgen van extra failures voor de N-distractie regels die leiden tot een snellere verlaging van hun expected gain, maar ook het totale uitblijven van successen voor deze regel. In de eerdere versie van het model werd als het antwoord niet gecontroleerd werd immers elk gevonden antwoord als een succes beschouwd. Ook dit gebeurt in de altijd-feedback-versie van het model niet. In het altijd-feedback model krijgen de N-distractie regels dus meer failures en minder (geen) successen. Dit leidt overduidelijk tot betere leerresultaten. Aan het einde van het leertraject worden bij elke parametersetting 100 % scores behaald.

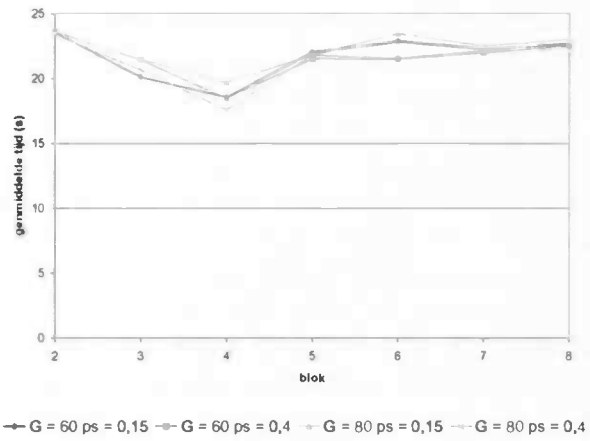
Nu het leren wel goed gaat, wordt het ook een stuk interessanter om te kijken wat er gebeurt tijdens het leertraject. Worden er nieuwe regels aangemaakt, gaat het oplossen van de sommen steeds sneller, zijn er duidelijke verschillen tussen de verschillende parametersettings te onderscheiden?

Wat betreft de tijd die het kost om het goede antwoord te vinden is er in elk geval nauwelijks verschil waar te nemen tussen de verschillende parameter settings (zie figuur 8.14)

De lijnen overlappen elkaar bijna geheel. Wel is er in het begin een lichte daling waar te nemen in de oplossingstijden. Deze daling is op zijn diepst bij blok 4, en stijgt vervolgens weer, om uiteindelijk nauwelijks onder het beginniveau te eindigen. De daling in blok 4 is te verklaren omdat in dit blok een relatief groot deel van de sommen vanuit het geheugen wordt beantwoord.

De oplossingsmethode wordt deels geproceduraliseerd, maar ook hier gaat die proceduralisatie niet verder dan het gebruik van het juiste hulpmiddel in de regel vast te leggen. Dit maakt het zoeken van een voorbeeld of het meegeven van een voorbeeld overbodig.

In elke versie van het model zag die regel er zo uit:



Figuur 8.14: Gemiddelde tijden voor het vinden van het goede antwoord voor het optellen van gelijknamige breuken bij het altijd-feedback model. Voor elke parametersetting is het gemiddelde van 10 runs genomen.

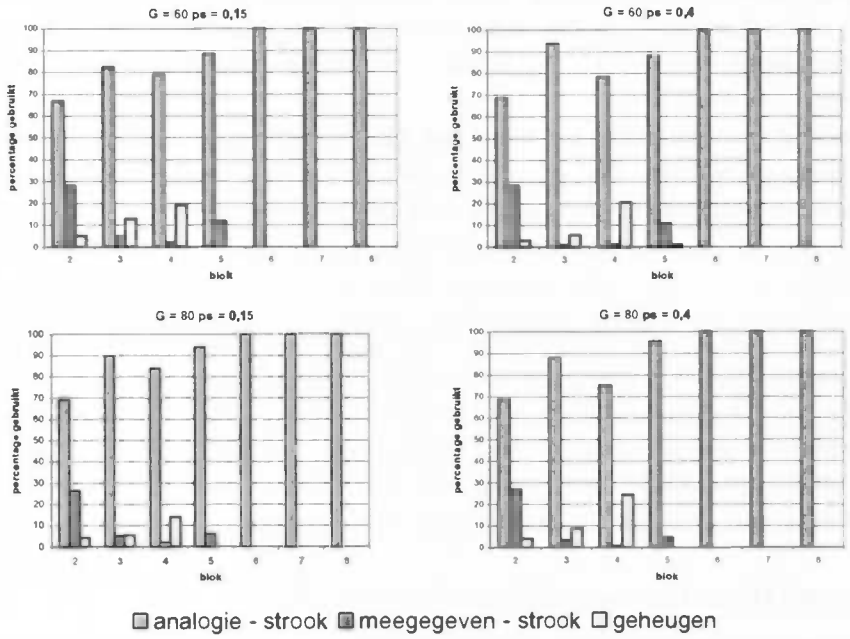
```
(p Production4173
   =goal>
      isa SUM
      task Add
      denom1 =denom1
      denom2 =denom1
      state nil
      - method Analogy
      - method N-Distraction
==>
   =goal>
      tool Bar
      state Example-Found
      method Analogy
)
```

In gewone taal:
ALS je twee breuken met dezelfde noemer wilt optellen
DAN gebruik je een strook

Hoewel er geen verschil is in de regel zelf, is er wel een verschil in het tijdstip waarop de regel werd aangemaakt. In beide versies met een ps-waarde van 0,4 werd de regel voor het eerst gebruikt in blok 3. Voor de versies met een ps-waarde van 0,15 gebeurde dit echter pas in blok 5. Qua tijd lijkt het echter weinig uit te maken of het gebruik van het juiste hulpmiddel geproceduraliseerd is. Dit is ook niet verwonderlijk. Het ophalen van een feit uit het geheugen duurt ongeveer een halve seconde, terwijl de hele oplossingsprocedure tussen de 20 en 25 seconden in beslag neemt.

Uit de gebruikte methoden blijkt dat het meegegeven voorbeeld praktisch

altijd gebruikt wordt, ook als de regel al is geproceduraliseerd (zie figuur 8.15. In blok 5 bijvoorbeeld, wordt er bij 2 van de 20 sommen een hulpmiddel meegegeven, dus bij 10 %. Het aantal keren dat er in dit blok gebruik is gemaakt van het meegegeven voorbeeld ligt tussen de 5 en de 12 %. Ook bij de andere blokken liggen deze getallen dicht bij elkaar. Blijkbaar is het gebruiken van het meegegeven hulpmiddel zo'n betrouwbare oplossingsmethode gebleken, dat het nog steeds vaak de voorkeur verdient boven het gebruiken van de geproceduraliseerde oplossing. Dit betekent dat het in principe nog steeds mogelijk moet zijn om een ander hulpmiddel te leren gebruiken.



Figuur 8.15: Gebruikte oplossingsmethoden voor het optellen van gelijknamige breuken bij het altijd-feedback model. De geproceduraliseerde regels zijn ingedeeld bij de analogie strategie. Voor elke parameterset-ting is het gemiddelde van 10 runs genomen.

Hoewel in de altijd-feedback-versie van het model hele goede resultaten worden behaald en het optellen van breuken op een degelijke manier wordt geleerd, valt ook bij het optellen van ongelijknamige breuken op dat er alleen geleerd wordt op te tellen volgens de voorgeschreven manier. Dat wil zeggen dat het model ook als het het optellen van breuken helemaal beheerst, hij nog steeds een strook moet tekenen voor elke optelling die hij doet. Ook in dit geval wordt de abstractiestap van het tekenen van twee breuken in een strook en het vervolgens optellen van de getekende delen naar het simpelweg optellen van twee tellers niet gemaakt. Deze veel snellere methode wordt door het model niet gevonden, wederom door het feit dat de motoracties van het tekenen van een strook en het kleuren van de delen een te elementair onderdeel vormen van de procedure.

Is het te onrealistisch aan te nemen dat dit ook in werkelijkheid zo zou

kunnen gaan? Ik denk het niet. Eén van de leerkrachten van c.b.s. "de Loopplank" vertelde dat voor het optellen van natuurlijke getallen in eerdere versies van *Pluspunt* gebruik werd gemaakt van het zogenaamde honderdveld als hulpmiddel. Het ging hierbij om sommen voor kinderen in groep 4. Om inzichtelijk te maken wat er gebeurde als je bijvoorbeeld 5 + 21 optelde werd er een vel papier met een in 100 vakjes opgedeeld vierkant uitgedeeld. Op de eerste rij stonden de getallen van 1 tot en met 10, op de tweede rij 11 tot en met 20, etc. Het optellen van 5 + 21 werd vertaald in 2 hokjes naar beneden, en 1 opzij. Zo werd duidelijk hoe getallen zich tot elkaar verhouden en hoe je op eenvoudige wijze twee getallen bij elkaar op kunt tellen. In de nieuwe versie van *Pluspunt* zijn ze echter weer afgestapt van het honderdveld. Het bleek namelijk dat kinderen er te afhankelijk van werden. Ze konden alleen nog maar met behulp van dit honderdveld optellen.

In de inleiding van *Pluspunt* stond dat het leren werken met modellen geen doel op zich dient te worden. Het lijkt erop dat dat bij het leren optellen met behulp van het honderdveld en in mijn ACT-R model wel gebeurt.

samenvatting

Het optellen van gelijknamige breuken gaat heel goed als er continue feedback is op het antwoord. Er wordt bijna voortdurend een 100 % score behaald. De optelprocedure wordt slechts enigszins geproceduraliseerd. Alleen het zoeken van een voorbeeld wordt overbodig. Het tijdrovende tekenen van een strook blijft echter altijd noodzakelijk om het goede antwoord te vinden. Daarmee schiet het gebruik van de strook misschien zijn doel voorbij.

8.2.3 Het optellen van ongelijknamige breuken.

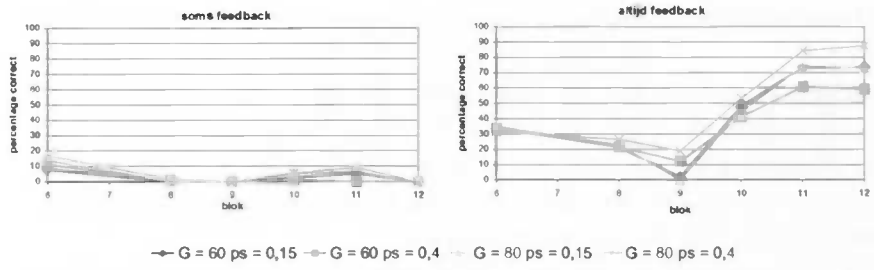
Bij het pluspunt-feedback model is al gebleken dat het model met het optellen van ongelijknamige breuken de meeste moeite had. De oorzaak hiervan lag in drie dingen: Het bestaan van zowel tweede foute oplossingsmethoden als tweede goede oplossingsmethoden, de kleine hoeveelheid sommen waarbij een voorbeeld wordt meegegeven en het slechts bij enkele sommen geven van feedback.

In het altijd-feedback model is het probleem van het geven van feedback opgelost. Dit heeft over het algemeen genomen gezorgd voor een aanzienlijke verbetering van de resultaten (zie 8.16).

De sterke daling van de lijn tot en met blok 9 heeft drie interfererende verklaringen.

- De beperkte hoeveelheid meegegeven voorbeelden voor het oplossen van deze nieuwe, en moeilijke soort sommen
- Het moeten afleren van te algemeen toepasbare regels voor het optellen van gelijknamige breuken
- De frequentie en timing van de aangeboden sommen.

Het optellen van ongelijknamige breuken wordt in blok 6 geïntroduceerd. In dit blok worden in totaal 14 sommen met ongelijknamige breuken aangeboden.



Figuur 8.16: Vergelijking van de percentages goede antwoorden voor het optellen van ongelijknamige breuken. Voor elke parametersetting is het gemiddelde van 10 runs genomen.

Alleen bij de eerste vier en de laatste twee hiervan wordt uitgelegd hoe de sommen moeten worden opgelost en wordt er een hulpmiddel (de verhoudingstabel) meegegeven waarmee de sommen opgelost kunnen worden. Zes voorbeelden is uiteraard heel weinig, vooral gezien het feit dat het optellen van gelijknamige breuken inmiddels goed geleerd is, en de oplosmethode voor deze soort sommen kan interfereren met de oplossingsmethode voor het optellen van ongelijknamige breuken.

Er blijkt dat voor het optellen van gelijknamige breuken twee regels zijn gegenereerd, waarbij de tweede regel een precisering is van de eerste. De eerste vorm van deze regel is heel algemeen toepasbaar:

ALS je doel is twee breuken op te tellen
DAN gebruik je een strook.

Zolang je alleen gelijknamige breuken optelt lijkt deze regel prima te kloppen, maar zodra je ook ongelijknamige breuken gaat optellen gaat het mis. De regel zal namelijk ook voor dit soort sommen vuren, en zal dan een verkeerd antwoord opleveren.

Gelukkig is er ook een specifiekere vorm van deze regel gegenereerd waarvoor dit probleem niet geldt:

ALS je doel is om twee breuken op te tellen
EN de breuken hebben dezelfde noemer
DAN gebruik je een strook.

Deze regel zal alleen vuren wanneer het moet, namelijk bij het optellen van gelijknamige breuken.

Op het moment dat het optellen van ongelijknamige breuken wordt geïntroduceerd zullen beide regels een hoge expected gain hebben. Ze gingen beiden immers altijd op voor elke tot dan toe voorgekomen optelling. De eerste vorm van de regel is ook toe te passen op het optellen van ongelijknamige breuken, en zal dit door zijn hoge expected gain naar alle waarschijnlijkheid ook worden. Dit kan er toe leiden dat de eerste vier sommen, met een voorbeeld, allemaal met deze regel kunnen worden opgelost, met als gevolg vier foute antwoorden

en geen enkel succesvol voorbeeld voor de sommen met ongelijknamige breuken die nog volgen.

Zo dramatisch blijkt het niet te zijn, gezien het percentage (35 %) goede antwoorden dat nog wordt gegeven in blok 6. Zoals bleek in de vorige paragraaf heeft de regel voor het gebruiken van het meegegeven voorbeeld zo'n hoge expected gain dat hij vaak de voorkeur verdient boven de geproceduraliseerde regel voor het optellen van gelijknamige breuken.

Wel is het duidelijk dat er een regel is gecreëerd die te breed toepasbaar is, en die zal moeten worden afgeleerd. Dit kan alleen maar gebeuren doordat deze regel veel failures krijgt, waardoor zijn expected gain immers zal dalen. Dit zal voor een deel al gebeuren in blok 6, waar getuige het grote aantal foute antwoorden, deze regel meerdere keren zal zijn toegepast, en dus ook meerdere failures zal hebben opgeleverd. De kans is echter groot dat na dit blok de expected gain van deze regel nog steeds zo hoog is dat hij nog regelmatig zal vuren.

In dit kader lijkt het niet slim te zijn om in het volgende blok alleen maar optelsommen met gelijknamige breuken te geven. Immers, als de omstreden regel bij een van deze sommen zal vuren, levert dit een succes op voor de regel, en zal zijn expected gain weer omhoog gaan. Toch is dit precies wat er gebeurt. In blok 7 komen slechts sommen met gelijknamige breuken voor.

In blok 8 komen zowel sommen met gelijknamige als met ongelijknamige breuken voor, maar ook hier geldt dat er ontzettend weinig voorbeelden worden gegeven en er dus zelden een oplossingsmethode wordt meegegeven om de sommen op te lossen.

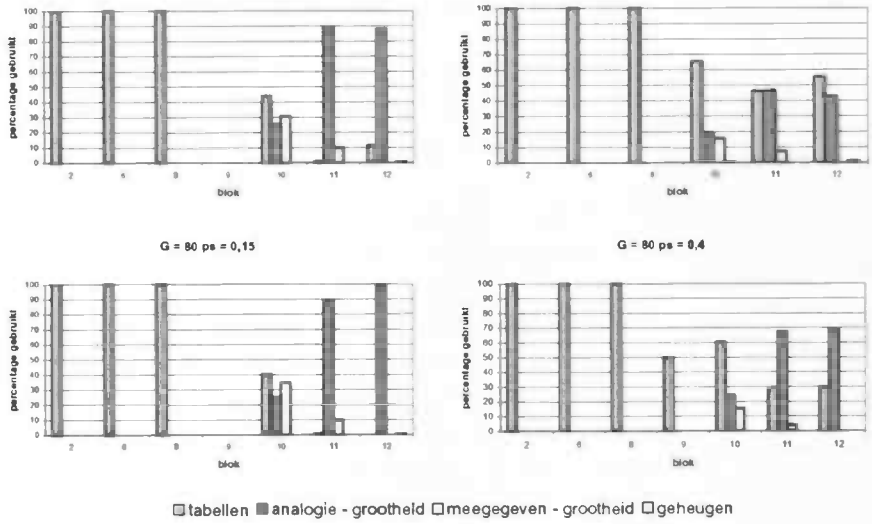
Ditzelfde geldt voor blok 9. Ook hier wordt weinig hulp geboden bij het optellen van ongelijknamige breuken. Het lijkt alsof er in *Pluspunt* wordt aangenomen dat kinderen na een eenmalige uitleg met een stuk of vier voorbeelden in staat zijn te leren hoe ze ongelijknamige breuken kunnen optellen. Voor het model blijkt dit zeker niet voldoende te zijn.

Vanaf blok 10 verbeteren de resultaten gelukkig. Waarschijnlijk is de foute regel hier inmiddels afgeleerd. Ook worden er in blok 10 relatief veel voorbeelden gegeven, namelijk bij elf van de veertig sommen. Zes van deze voorbeelden zijn voorbeelden met een bemiddelende grootheid, de andere 5 zijn voorbeelden met een verhoudingstabel.

Ook worden er vanaf blok 10 geen optelsommen met gelijknamige breuken meer aangeboden. Ik denk echter niet dat deze sommen nog een probleem zouden hebben opgeleverd. De te algemeen toepasbare regel voor het optellen van gelijknamige breuken zal in blok 10 al zo'n lage expected gain hebben gekregen dat de specifiekere regel verkozen zal worden voor het optellen van gelijknamige breuken. Deze sommen zullen de expected gain van de foute regel dus niet ongewenst meer verhogen.

Het is echter niet zo dat door de ongelukkig opzet van de blokken 6 tot en met 9 het optellen van ongelijknamige breuken met behulp van een verhoudingstabel helemaal niet geleerd wordt. Zoals te zien is in figuur 8.17 wordt deze methode in de versies van het model met een ps-waarde van 0,4 nog behoorlijk vaak gebruikt.

Dat deze methode alleen in deze versies van het model echt goed geleerd



Figuur 8.17: Gebruikte methoden voor het vinden van de goede antwoorden voor het optellen van ongelijknamige breuken bij het altijd-feedback model. Voor elke parametersetting is het gemiddelde van 10 runs genomen.

wordt komt door de hogere ps-waarde. Hierdoor zijn er namelijk minder voorbeelden nodig om een nieuwe regel te genereren en zijn de weinige goede antwoorden, gevonden met behulp van verhoudingstabellen, in de blokken 6 tot en met 10 voldoende om de volgende regel te genereren:

```
(p Production7626
   =goal>
     isa SUM
     task Add
     denom1 =denom1
     - denom2 =denom1
     state nil
     - method Analogy
     - method N-Distraction
     - state Failed
     nom1 =nom1
     nom2 =nom2
     denom2 =denom2
```

```
==>
  =goal>
    tool Tables
    state Example-Found
    method Analogy
  +goal>
    isa SUM
    task Make-Equal
    tool Tables
    state nil
    nom1 =nom1
    nom2 =nom2
    denom1 =denom1
    denom2 =denom2
    parent =goal
)
```

oftewel:
ALS je doel is om twee breuken op te tellen
EN deze breuken hebben ongelijke noemers
DAN gebruik je verhoudingstabellen
EN wordt je doel deze breuken gelijknamig te maken

In beide versies van het model wordt deze regel begin blok 10 het eerst gebruikt.

samenvatting

Samengevat blijken alle variaties van het altijd-feedback model uiteindelijk redelijk tot goed in staat om ongelijknamige breuken op te tellen. Hiervoor wordt voornamelijk gebruik gemaakt van een bemiddelende grootheid als oplossingsmethode. Dit komt doordat het leren optellen met behulp van verhoudingstabellen niet goed wordt begeleid in *Pluspunt*. Op het moment dat het optellen van ongelijknamige breuken wordt geïntroduceerd kan deze soort sommen nog makkelijk worden verward met het optellen van gelijknamige breuken. Desondanks worden er maar heel weinig voorbeelden gegeven waaruit blijkt hoe ongelijknamige breuken opgeteld kunnen worden. Ook wordt het leren optellen van ongelijknamige breuken onderbroken door een blok met alleen maar optelsommen met gelijknamige breuken. Dit zorgt ervoor dat de verwarring van deze twee soorten sommen langer doorzet. Het resultaat is dat alleen de versies van het model waarin de ps-parameter 0,4 is regels genereren waarmee ongelijknamig breuken met behulp van een verhoudingstabel kunnen worden opgelost.

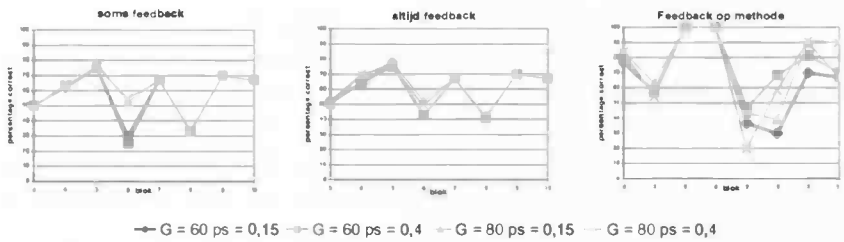
8.3 Resultaten van het feedback-methode model

Het altijd-feedback model bleek een grote verbetering boven het pluspunt-feedback model voor wat betreft het optellen van zowel gelijknamige als ongelijknamige breuken. Wat echter nog steeds niet goed geleerd werd was het vergelijken van breuken.

Hoewel in beide versies van het model op veel vergelijkingssommen wel het goede antwoord werd gevonden, werd hiervoor zelden tot nooit de goede methode gebruikt.

In het pluspunt-feedback model werd er slechts af en toe gecontroleerd of een gegeven antwoord ook het goede antwoord was. Het altijd-feedback model vormde een verbetering doordat het van iedere som vertelde of het goede antwoord gevonden was of niet. Dat beide modellen faalden voor het vergelijken van breuken komt doordat er slechts op de correctheid van het antwoord gecontroleerd werd. Met N-distractie kan bij het vergelijken van breuken nl. nog behoorlijk vaak toch het goede antwoord worden gevonden.

Om een oplossing te creëren voor dit probleem heb ik nog een derde versie van het model gemaakt. Dit model is een soort uitbreiding op het altijd-feedback model, waarbij er niet alleen voor elke som wordt gecontroleerd of het goede antwoord is gevonden, maar ook of het antwoord, als het goed is, op een correcte manier is gevonden. Als het antwoord goed is, maar via N-distractie gevonden, zal het alsnog een failure opleveren. Op deze manier krijgen regels met N-distractie alleen maar failures en zullen ze als het goed is afgeleerd moeten worden.

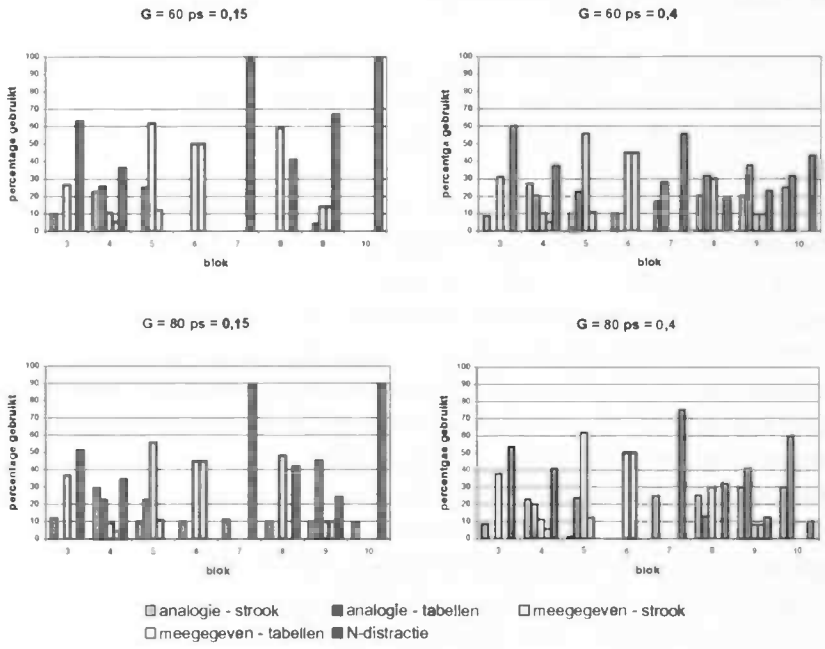


Figuur 8.18: Vergelijking van de percentages goede antwoorden voor het vergelijken van breuken. Voor elke parametersetting is het gemiddelde van 10 runs genomen.

Zoals te zien is in figuur 8.18 heeft het geven van feedback op de gebruikte methode wel degelijk invloed op de vorm van de grafiek. In de blokken 3, 5 en 6 zijn de resultaten aanzienlijk verbeterd ten opzichte van de twee eerdere versies van het model. In blok 7 zijn de resultaten aanzienlijk slechter. In de andere blokken zijn de resultaten ongeveer gelijk gebleven.

Het was echter al bekend dat ook mét N-distractie redelijke resultaten werden behaald. Het is in dit geval dus interessanter om naar het verschil in gebruikte methoden te kijken.

Zoals te zien valt in figuur 8.19 wordt er in deze versie van het model niet meer voor 90 % gebruikt gemaakt van N-distractie. Het gebruik van N-distractie



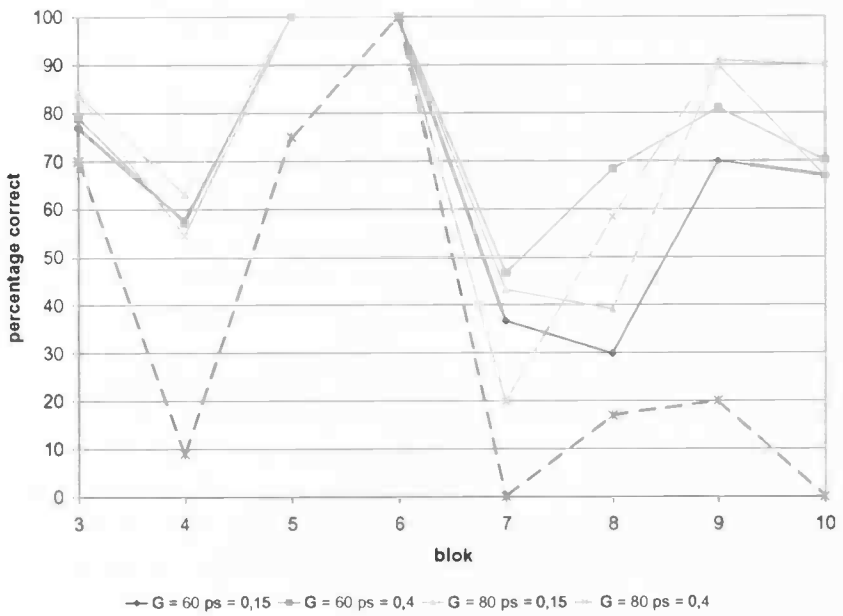
Figuur 8.19: Percentages gebruikte methoden voor het vergelijken van breuken bij het feedback-methode model. Voor elke parametersetting is het gemiddelde van 10 runs genomen.

is echter verre van verdwenen.

Opvallend is dat er voor elke parametersetting van het model in blok 7 bijzonder veel gebruik wordt gemaakt van N-distractie en dat het percentage goede antwoorden in dat blok ook bij alle versies laag is. Lager zelfs dan in het pluspunt-feedback model en het altijd-feedback model, waarin bijna alleen gebruik wordt gemaakt van N-distractie. Het vele gebruik van N-distractie is echter te verklaren.

Het gebruiken van de goede methoden is moeilijker dan het gebruik van N-distractie. Zolang deze methoden nog niet geproceduraliseerd zijn, kunnen ze immers alleen gebruikt worden als er wordt meegegeven van welk hulpmiddel er gebruik kan worden gemaakt, of als er een voorbeeld gevonden kan worden waarbij dit hulpmiddel is gebruikt. Als het model probeert een goede methode te gebruiken en er wordt geen voorbeeld gevonden, zal het alsnog proberen de som met N-distractie op te lossen of helemaal geen antwoord vinden. Er is dan ook een heel mooi verband te zien tussen het percentage goed beantwoorde sommen en het percentage sommen waarbij een hulpmiddel wordt meegegeven. (zie figuur 8.20) Dit verklaart zowel de soms heel hoge percentages N-distractie als gebruikte methode als het lagere percentage goede antwoorden.

Dat er ook in blok 3 vrij veel gebruik wordt gemaakt van N-distractie en daar het percentage goede antwoorden wel hoger is, komt doordat dit het eerste blok is waarin het vergelijken van breuken wordt geleerd. Er is dan nog geen enkele oplossingsmethode gebruikt, dus ook N-distractie niet. Dit betekent dat N-distractie nog geen failures heeft en daardoor dus een hoge expected



Figuur 8.20: Percentages goede antwoorden voor het vergelijken van breuken bij het feedback-methode model. Het percentage sommen met voorbeeld is weergegeven met een stippellijn. Voor elke parametersetting is het gemiddelde van 10 runs genomen.

gain, hoger dan die van de andere methoden. N-distractie wordt hier dus gebruikt omdat het de hoogste expected gain heeft, niet omdat geen enkele andere methode slaagt. Verder wordt in blok 3 bij een groot aantal sommen het hulpmiddel meegegeven, wat ervoor zorgt dat de goede methoden zonder problemen gebruikt kunnen worden en er dus in minder gevallen helemaal geen antwoord gevonden wordt.

Er is nog iets opvallends waar te nemen in figuur 8.19. Bij de versies van het model waar de ps-parameter 0.4 is wordt aan het eind veel minder gebruik gemaakt van N-distractie dan bij de versies waarbij deze parameter 0,15 is. De verklaring hiervoor is hierboven eigenlijk al genoemd.

Hoe hoger de ps-parameter, hoe sneller regels geproceduraliseerd worden. Bij de versies van het model waarbij de ps-parameter 0,4 is zullen de goede oplossingsmethoden gegeneraliseerd zijn, waardoor er geen voorbeeld meer nodig is om ze te gebruiken. Voor de versies met een veel lagere ps-waarde zal dit niet het geval zijn, en blijft het model afhankelijk van het meegeven van het hulpmiddel of het vinden van een voorbeeld. Lukt het niet zo'n voorbeeld te vinden, dan rest er als enige oplossingsmethode het gebruiken van N-distractie, ook al weet het model inmiddels wel dat deze methode hardstikke fout is.

Dat dit inderdaad het geval is blijkt wel uit de expected gain van de verschillende oplossingsmethoden. (zie tabel 8.2)

	Gebruik meegegeven hulpmiddel	*Zoek voorbeeld*	*Gebruik N-distractie tellers*	*Gebruik N-distractie noemers*
G 60 ps 0,15	23.865	12.331	17.922	17.948
G 60 ps 0,4	22.724	15.715	23.727	22.558
G 80 ps 0,15	41.818	21.047	25.856	26.979
G 80 ps 0,4	39.824	28.055	37.908	40.121

Tabel 8.2: expected gain waarden uit het feedback-methode model van de verschillende oplossingsmethoden voor het vergelijken van breuken

Doordat het vinden van een voorbeeld lang niet altijd lukt krijgt de regel "zoek een voorbeeld" veel failures en dus een lage expected gain. De regel "gebruik het meegegeven hulpmiddel" heeft bij beide versies van het model met een lage ps-waarde een expected gain die ruim boven die van de N-distractieregels ligt. In de twee modellen met een hoge ps-waarde is echter een nieuwe regel ontstaan die het gebruik van een meegegeven hulpmiddel of het vinden van een voorbeeld overbodig maakt. De expected gain van die regel ligt ruim boven de expected gain van alle andere regels.

```
(p Production108182
   =goal>
     isa SUM
     task Compare
     state nil
     - method Analogy
     - method N-Distraction
==>
   =goal>
     tool Bar
     state Example-Found
     method Analogy
)
```

Oftewel:
ALS je doel is om twee breuken te vergelijken
DAN gebruik je stroken

De activatie-waarde van deze regel bij het model met G = 60 ps = 0,4 is 36,768, bij G = 80 ps = 0,4 is hij zelfs 66,510.

Ook voor het vergelijken van breuken met behulp van een verhoudingstabel is in deze versies van het model een regel ontstaan. Deze regel is echter, doordat het gebruiken van een tabel langer duurt en dus voor hogere kosten zorgt, iets minder succesvol.

```
(p Production108483
   =goal>
     isa SUM
     task Compare
     state nil
     - method Analogy
     - method N-Distraction
==>
   =goal>
     tool Tables
     state Example-Found
     method Analogy
)
```

Oftewel:
ALS je doel is twee breuken te vergelijken
DAN gebruik je verhoudingstabellen

De activatie-waarden bij deze regel zijn voor het model met G = 60 ps = 0,4 23.552 en bij G = 80 ps = 0,4 44.309. Voor het eerste model betekent dit dat het nog iets onder de regel voor N-distractie ligt. Dit zal waarschijnlijk wel veranderen, want de N-distractieregel zal alleen maar failures krijgen, terwijl de nieuwe regel bijna alleen maar successen zal krijgen.

samenvatting

Uit het feedback-methode model blijkt het geven van feedback op de gebruikte oplossingsmethoden voor een betere beheersing van het vergelijken van breuken te leiden dan wanneer er alleen feedback op het antwoord wordt gegeven. Dit blijkt niet zozeer uit de percentages goede antwoorden maar uit de percentages gebruikte methoden om het goede antwoord te vinden.

Er wordt nu veel vaker gebruik gemaakt van goede oplossingsmethoden om een vergelijking op te lossen, maar N-distractie blijft nog vrij vaak gebruikt worden. Dit komt doordat het model, met name de versies met een lage ps-waarde, niet in staat is met de gegeven sommen de goede oplossingsmethoden te generaliseren, waardoor het afhankelijk blijft van het vinden van een voorbeeld voor het correct oplossen van de som. Vindt het in zijn geheugen geen voorbeeld van hoe het de som in het verleden heeft opgelost, dan rest hem niets anders dan toch gebruik te maken van N-distractie. Door het vaker meegeven van het te gebruiken hulpmiddel kan dit probleem wellicht verholpen worden.

Een andere oplossing is om het model langer te trainen, oftewel, meer sommen te geven. Uit de gegevens komt duidelijk naar voren dat de juiste oplossingsmethoden uiteindelijk wel een hogere expected gain zullen krijgen dan de N-distractieregels, en dat de geproceduraliseerde oplossingsmethode op een gegeven moment wel zal ontstaan.

Hoofdstuk 9

conclusies en discussie

In dit laatste hoofdstuk wil ik de resultaten van mijn onderzoek bespreken. Ik wil hierbij een antwoord geven op de onderzoeksvragen zoals ik die gesteld heb in hoofdstuk 2. Daarna zal ik een nuancering van deze antwoorden geven in een korte discussie.

Komt de realistische benadering goed tot zijn recht in *Pluspunt?*

In *Pluspunt* worden de kernideeën van realistisch rekenonderwijs duidelijk onderschreven. Vooral in de groepen 5 en 6 wordt geprobeerd het breukbegrip door middel van activiteiten te vergroten. Het gaat dan bijvoorbeeld om meetactiviteiten met breukenstroken, en het kleuren van breukdelen in verschillende figuren. Dit is in overeenstemming met Freudenthals idee dat wiskunde een activiteit behoort te zijn. Door het zelf ontdekken van wiskundige relaties met behulp van deze activiteiten, en door middel van interactieve lessen waarin de kinderen hun ideeën over goede en foute oplossingsmethoden kwijt kunnen en over de wiskunde kunnen discussiëren, is ook de actieve rol van kinderen in hun eigen leerproces terug te vinden. Er wordt daarnaast veel nadruk gelegd op het werken in contexten, waardoor de wiskunde een plaats in de realiteit krijgt. Daarbij wordt er veel gebruik gemaakt van modellen voor wiskundige begrippen. Deze modellen worden echter slechts in kleine mate door de leerlingen zelf ontwikkeld. Ze zijn voor een groot deel bij voorbaat al vastgelegd door de auteurs van de methode. Ook worden leerstofdomeinen zo veel mogelijk verweven, om van de wiskunde een coherent geheel te maken in plaats van een aantal losstaande elementen. Er wordt in *Pluspunt* bijvoorbeeld veel nadruk gelegd op het verband tussen breuken en verhoudingen en tussen breuken, procenten en decimale breuken. Tenslotte wordt er op beperkte schaal, namelijk alleen op het gebied van cijferen, aandacht besteedt aan progressief schematiseren.

Op het gebied van breuken zijn er veel overeenkomsten tussen *Pluspunt* en de *Proeve*. Zo is in beide methoden terug te vinden dat breuknamen eerst voluit moeten worden geschreven, en dat er pas later op de symbolische naam moet worden overgestapt. Ook wordt er in het begin alleen gewerkt met stambreuken. In beide methoden worden breuken geïntroduceerd in informele contexten.

Toch verschilt de leerstrategie voor het leren optellen van breuken aanzienlijk van de strategie zoals die in de *Proeve* wordt beschreven. Het grote verschil is hierbij het gebruik van modellen bij het optellen van ongelijknamige breuken.

In de *Proeve* wordt voornamelijk gebruik gemaakt van de reep of plak als model voor het vergelijken van breuken en het optellen van ongelijknamige breuken. Voor het optellen van ongelijknamige breuken moet er een geschikt aantal stukjes worden gezocht die de reep kan hebben. Dit aantal moet zo gekozen worden, dat het door beide op te tellen noemers goed te delen is.

Deze oplossingsmethode is een verkapte vorm van gelijknamig maken van breuken. De traditionele manier van gelijknamig maken is ook het zoeken van een getal waardoor beide noemers te delen zijn, Om het concreter te houden, wordt er in de *Proeve* methode gesproken over stukjes chocolade. Deze stukjes kunnen op een gegeven moment achterwege worden gelaten, waardoor de kinderen uiteindelijk op een formele manier met breuken kunnen rekenen.

Ook het feit dat twee gelijknamige breuken in feite over hetzelfde object gaan, wordt benadrukt. Hiervoor worden de begrippen 'wikkelnaam' en de 'eigennaam' gebruikt. De wikkelnaam van een breuk is de naam die je een stuk van de reep geeft als de wikkel er nog om zit, bijvoorbeeld $\frac{1}{3}$. Haal je de wikkel er nou af, en blijkt de reep bijvoorbeeld 12 stukjes te hebben, dan kun je de eigennaam van de breuk bepalen. Die blijkt in dit geval $\frac{4}{12}$ te zijn.

In *Pluspunt* lijkt de hoofdstrategie voor het gelijknamig maken van breuken het gebruik van een verhoudingstabel te zijn. Deze tabel benadrukt ook het verband tussen breuken en verhoudingen. Het gebruik van een bemiddelende grootheid wordt in de eerste helft van groep 7 zelfs ontmoedigd! Later in groep 7 wordt het gebruik van een bemiddelende grootheid echter weer gestimuleerd. Deze benadering is niet erg consistent, en bovendien tegengesteld aan de benadering van de *Proeve*, waarin de bemiddelende grootheid op een gegeven moment zou moeten verdwijnen.

De eigennaam en de wikkelnaam komen in *Pluspunt* terug in de vorm van een 'schuilnaam'. Dit gebeurt echter in zo'n beperkte mate dat het nauwelijks naam mag hebben.

Ook is er in *Pluspunt* veel meer variatie in contexten. In de *Proeve* lijkt de enige context voor het optellen met breuken het verdelen van een chocoladereep te zijn. In *Pluspunt* worden breuken opgeteld en vergeleken in contexten als het laden van schepen, het vullen van bloembakken, het lopen van krantenwijken en het vullen van eierdozen. Dit laatste verschil lijkt mij echter in het voordeel van *Pluspunt*, aangezien het aanbieden van maar één context al gauw heel saai gaat worden en geen realistisch beeld geeft van de veelzijdigheid aan toepassingen van het rekenen met breuken in de dagelijkse werkelijkheid.

Al met al is mijn conclusie dat *Pluspunt* een redelijk goede interpretatie van de realistische benadering is. Er zijn veel overeenkomsten met de *Proeve*, en de basisideeën van realistisch rekenonderwijs komen duidelijk naar voren. Met name op het gebied van het optellen van breuken zijn echter behoorlijke verschillen in didactiek te onderscheiden. Voor dit leerdomein lijkt *Pluspunt* voor het grootste deel aan de kerndidactiek zoals omschreven in de *Proeve* voorbij te gaan.

Nu was deel 3A van de *Proeve* op het moment van het verschijnen van *Pluspunt* ook nog niet uitgegeven. Eind 2002 is de nieuwe versie van *Pluspunt* uitgekomen. Het zou kunnen zijn dat de auteurs op grond van de *Proeve* hun didactiek voor het optellen van breuken hebben verbeterd.

Zijn er in *Pluspunt* verklaringen te vinden voor het uitblijven van de verwachte resultaten?

Uit het model is gebleken dat er wel degelijk oorzaken te vinden zijn die leiden tot het niet goed leren rekenen met breuken.

De belangrijkste reden is het uitblijven van voldoende directe feedback. Doordat er maar heel zelden meteen wordt verteld of het gevonden antwoord goed is, kunnen kinderen veel langer een verkeerde methode gebruiken. Ditzelfde argument zal echter gelden voor traditionele methoden, waar waarschijnlijk zelfs nog minder directe feedback wordt gegeven dan in een realistische methode.

Een reden die samenhangt met bovengenoemde, is het geven van te weinig voorbeelden. Al vrij snel worden kinderen geacht sommen zelfstandig te kunnen maken, zonder één voorbeeld, waaraan ze de rest van de sommen analoog kunnen maken. Dit geldt, verbazingwekkend genoeg, met name voor de moeilijkere sommen, zoals het optellen van ongelijknamige breuken. Als kinderen de juiste oplossingsmethode voor een som nog niet kennen, en ze krijgen geen voorbeeld van hoe ze de som op kunnen lossen, zullen ze in veel gevallen een foute strategie gebruiken om toch een antwoord te vinden. Ook als ze weten dat de oplossingsstrategie fout is.

Er is nog een derde reden die te maken heeft met het aantal sommen. Het blijkt dat het aantal aangeboden sommen lang niet altijd voldoende is om de oplossingsstrategie te proceduraliseren. Deze proceduralisatie is noodzakelijk om het meegeven van een hulpmiddel of het zoeken van een voorbeeld overbodig te maken. Afhankelijk van de hoeveelheid gegeven feedback, geldt dit voor het optellen van zowel gelijknamige als ongelijknamige breuken en het vergelijken van breuken.

Bovengenoemde redenen hangen uiteraard met elkaar samen. Als er meer feedback wordt gegeven, zijn er minder sommen nodig om een oplossingsmethode te proceduraliseren. De foute methoden worden sneller afgeleerd, en daardoor worden de goede methoden vaker gebruikt. Hoe vaker een methode gebruikt wordt, hoe groter de kans dat deze geproceduraliseerd wordt. Het vaker geven van een voorbeeld leidt uiteraard tot hetzelfde resultaat. Zeker gezien het feit dat ook het model het gebruiken van een meegegeven voorbeeld een heel succesvolle strategie vond.

Voor bovengenoemde redenen geldt echter dat ze in het algemeen ook voor een traditionele methode op zouden kunnen gaan. Wel geldt dat het geven van te weinig sommen waarschijnlijk vaker zal voorkomen bij realistisch rekenonderwijs dan bij traditioneel onderwijs. Dit komt door het grote aantal interactieve lessen. Er zullen in een interactieve les immers minder sommen gemaakt kunnen worden dan in een les zelfstandig werken. Naast bovengenoemde redenen kwamen er echter nog twee oorzaken uit het model naar voren, die veel explicieter voor realistisch breukenonderwijs gelden.

Ten eerste kost het gebruik van de aangeboden hulpmiddelen veel tijd. Het tekenen van een tabel bijvoorbeeld kost gemiddeld zo'n 15 seconden. Daarbij moet nog zo'n dik drie seconden worden opgeteld voor elke breuk die wordt ingevuld. Dit zorgt ervoor dat het soms wel een minuut duurt om een optelsom met ongelijknamige breuken uit te rekenen. Via N-distractie (het optellen van

beide tellers en beide noemers) ben je er slechts enkele seconden voor kwijt. Door dit grote verschil in tijd, wordt het gebruik van N-distractie veel aantrekkelijker. Traditionele methoden voor het gelijknamig maken van breuken zijn veel sneller. Ook het gebruik van een bemiddelende grootheid is veel sneller. Dit komt omdat hierbij niets getekend hoeft te worden. Veel kinderen willen niet continu tijdrovende tekeningen maken, blijkt ook uit opmerkingen van leerkrachten van de experiment-school. Ze willen hun sommen zo snel mogelijk af hebben. Daarom zullen ze blijven proberen om snellere oplossingen te gebruiken.

Een laatste kritiekpunt betreft het gebruik van modellen op zich. Uit het ACT-R model blijkt, dat de abstractiestap van het werken met modellen naar een formele manier van rekenen niet gemaakt wordt. Ondanks de benadrukking in de inleiding van *Pluspunt* dat dit niet de bedoeling is, verwordt het gebruik van modellen hierdoor tot een doel op zich. Het model wordt de oplossingsmethode, en zonder model kunnen de kinderen de som niet meer oplossen. Ditzelfde is gebeurd met het gebruik van het honderdveld voor optelsommen met natuurlijke getallen tot 100. Als het gebruik van modellen niet leidt tot meer inzicht in de materie, maar verwordt tot een 'kunstje', een oplossingsmethode an sich, is het waarschijnlijk handiger de traditionele oplossingsmethoden aan te leren, aangezien die dan qua functie weinig meer verschillen van modelmatige oplossingsstrategieën, maar in snelheid en gebruik des te meer.

Het zou natuurlijk kunnen dat het ontbreken van een abstrahatiestap alleen optreedt in het ACT-R model, en niet in de werkelijkheid. In ACT-R kunnen motor-acties, waaronder het tekenen van stroken en tabellen ook vallen, niet geproceduraliseerd worden. Dit is zo, omdat een motor-actie als een elementair onderdeel van een taak wordt beschouwd. Het zou natuurlijk kunnen dat mensen dergelijke acties wel kunnen proceduraliseren. Zij zouden bijvoorbeeld een strategie kunnen hebben waarbij het fysieke tekenen van objecten wordt vervangen door het gebruik van imaginaire objecten. Oftewel, een leerling gebruikt geen fysiek getekende strook meer voor zijn oplossing, maar stelt zich in gedachten wel een strook voor. Op het moment dat het gebruik van stroken en tabellen imaginair is geworden, zouden er wel verder geproceduraliseerde regels kunnen ontstaan.

Het zou een interessant vervolgonderzoek zijn om een dergelijke strategie, waarbij het gebruik van fysieke objecten wordt vervangen door het gebruik van imaginaire objecten, te implementeren en te kijken wat dit voor verschil maakt op de resultaten. Ik denk dat met name het gebruik van de strook op deze manier eventueel wel te proceduraliseren valt. Over het gebruik van een verhoudingstabel heb ik serieuze twijfels, aangezien het vrij complex is om je een voorstelling te maken van het invullen van twee tabellen. Ik denk dat er hiervoor waarschijnlijk te veel informatie moet worden onthouden. Maar voor het gelijknamig maken van breuken is er altijd nog proceduralisatie mogelijk via het gebruik van een bemiddelende grootheid.

Gelden deze verklaringen ook voor realistisch breukenonderwijs in het algemeen?

De meeste van bovengenoemde redenen zouden kunnen opgaan voor realistisch breukenonderwijs in het algemeen, maar kunnen voor het grootste deel ook voorkomen worden. Realistisch breukenonderwijs is heel erg afhankelijk van sturing door interactie. Zonder interactie gaan kinderen geen modellen ontwikkelen. Sturing hierbij is nodig om de juiste modellen te ontwikkelen, en om de modellen te gebruiken op een inzichtsverhogende manier.

Of realistisch breukenonderwijs last heeft van bovengenoemde problemen hangt in grote mate af van de manier van lesgeven, en de beschikbare tijd voor de lessen. Interactief onderwijs kost veel tijd. In een interactieve les zullen er minder sommen worden gemaakt dan in een zelfstandige les. Uiteraard kunnen deze lessen een meerwaarde hebben die kan opwegen tegen het maken van minder sommen. Maar dit hangt voor een groot deel af van de leraar. Ook is het, vooral in grotere klassen, niet altijd mogelijk elk kind de mate van interactie te bieden die hij of zij nodig heeft.

Het lijkt erop, dat er voor realistisch breukenonderwijs meer tijd moet worden uitgetrokken, en in kleinere groepen moet worden gewerkt, zodat elk kind de individuele aandacht kan krijgen die het nodig heeft. Daarnaast moeten er voldoende sommen gegeven worden om kinderen de kans te geven de geleerde oplossingsmethoden te proceduraliseren. Op deze manier kunnen de problemen die voor mijn ACT-R model optraden voorkomen worden.

Het gebruik van een bemiddelende grootheid als model voor het optellen van ongelijknamige breuken scheelt veel tijd in vergelijking met het gebruik van een tabel. Ook is hiermee de stap naar een hoger abstractieniveau niet zo groot. Ik acht het dan ook waarschijnlijk dat het gebruik van een bemiddelende grootheid tot betere resultaten zal leiden dan het gebruik van de verhoudingstabel. De verhoudingstabel heeft in mijn ogen meer nut om de overeenkomsten tussen breuken en verhoudingen duidelijk te maken.

Wel blijft het de vraag of kinderen automatisch de stap zullen maken naar een hoger denkniveau. Ik denk dat het introduceren van de formele regels noodzakelijk zal blijven om kinderen op een vlotte manier te leren rekenen met breuken. Uiteraard pas nadat een zekere mate van breukbegrip is gerealiseerd, en met ondersteuning van modellen als de strook. Deze zouden daarbij echter een uitleggende functie moeten hebben, en geen rekenfunctie.

zou het gebruik van een tutor kunnen leiden tot een groter succes van realistisch breukenonderwijs?

Een tutor kan een leraar niet vervangen. Hij zou een leraar wel kunnen ondersteunen. Uit de verschillende versies van het ACT-R model bleek dat het continu geven van directe feedback leidt tot een grote verbetering van de resultaten. Een tutor zou op dat vlak een goede onderwijsondersteuning kunnen zijn. Hij zou daarbij wel aan een aantal voorwaarden moeten voldoen:

Ten eerste moet de tutor de gemaakte fouten kunnen onderscheiden. Gemaakte fouten kunnen verschillende oorzaken hebben. Vaak is aan het gegeven antwoord wel te zien welke strategie het kind heeft gevolgd. Door ook de foute

strategieën te implementeren in het model kan er achterhaald worden welke foute strategie het kind heeft gebruikt. Als het slechts een rekenfout is gemaakt, hoeft er geen uitgebreide en hinderlijke uitleg te volgen. Het kind weet immers al hoe het de som op hoort te lossen. Een indicatie van de gemaakte fout zal in zo'n geval genoeg zijn. Blijkt er begripsmatig iets fout te zitten dan moet de tutor op een goede manier uitleg geven en eventueel zelfs besluiten om een stap in niveau terug te gaan.

Daarnaast dient de uitleg die de tutor geeft 'interactief' te zijn. Veel meer dan bij 'standaard-tutors' het geval is, zou er, om de realistische benadering van breukenonderwijs te kunnen ondersteunen, aandacht moeten worden besteed aan de interactie tussen de leerling en de tutor. Uit onderzoek is gebleken dat kinderen beter leren wanneer ze de te leren stof voor zichzelf kunnen uitleggen. (Chi, de Leeuw, Chiu & Lavalancher, 1994) In realistish rekenonderwijs wordt er ook veel nadruk gelegd op het begrip van de stof. Dit begrip probeert men te bevorderen door middel van interactie. Een goede tutor voor realistisch breukenonderwijs kan mijns inziens dan ook niet voorbijgaan aan het interactieve element van realistisch rekenonderwijs.

Het zal uiteraard niet eenvoudig zijn om een discussie over de juiste oplossingsmethode voor een breukensom te voeren met een tutor. Het moet denk ik dan ook niet de bedoeling zijn om een leraar te simuleren. Dit is in het verleden al onsuccesvol gebleken (Anderson, Corbett, Koedinger, & Pelletier, 1995). Wel zou je leerlingen duidelijk kunnen maken waarom ze een antwoord fout hebben door ze te inzicht te geven in hun fouten, en ze daarna een goede oplossingsmethode aan te bieden. Een veel voorkomende fout bij het optellen en vergelijken van breuken is het gebruik van N-distractie. De tutor zou de leerling kunnen laten zien waarom het antwoord dat het met behulp van N-distractie heeft gevonden fout is. Dit zou er bijvoorbeeld zo uit kunnen zien:

- Tutor: Hoeveel is $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$?
- Gebruiker: $\frac{2}{7}$ (tutor indiceert N-distractie)
- Tutor: Dit antwoord is niet goed.
  Kun je van deze strook $\frac{1}{3}$ deel kleuren?
- Gebruiker kleurt.
- Tutor: Kun je van deze strook $\frac{1}{4}$ deel kleuren?
- Gebruiker kleurt.
- Tutor: Kun je van deze strook $\frac{2}{7}$ deel kleuren?
- Gebruiker kleurt.
- Tutor: Denk je dat de stukken van $\frac{1}{4}$ deel en $\frac{1}{3}$ deel samen even groot zijn als het stuk van $\frac{2}{7}$ deel?
- Gebruiker: nee.

- Tutor: Daarom is je antwoord niet goed. (Hierna kan een hint worden gegeven hoe het antwoord wel opgelost kan worden)

Als je een kind laat inzien waarom een strategie tot het foute antwoord leidt, zal het deze strategie niet zo snel weer gebruiken. Voorwaarde hierbij is wel dat de leerling een alternatieve oplossingsmethode krijgt aangeboden. Alleen de fout uitleggen zal niet helpen. De leerling moet ook de goede oplossingsmethode uitgelegd krijgen.

Volgens de ontwikkelaars van de ACT-R tutors moet je de hulpteksten kort en bondig houden, lange stukken tekst worden niet gelezen, en worden, als dat kan, zo weer weggeklikt. Daarnaast moet je ervoor zorgen dat gebruikers de hulpberichten niet gaan misbruiken. Door een hoge mate van interactie te verlangen na het maken van een fout en na het vragen van hulp, zullen leerlingen die voornamelijk hulp vragen om zelf niet te hoeven nadenken en dus eerder klaar te zijn ontmoedigd worden om de hulpfunctie te gebruiken. De kans wordt zo aanzienlijk vergroot dat de hulpfunctie alleen wordt gebruikt als dit ook daadwerkelijk nodig is.

Door de leerling zijn fout te laten inzien met behulp van kennis die hij in eerdere jaren zou moeten hebben opgedaan (zoals het tekenen van breuken in een strook in bovenstaand voorbeeld) kan de tutor ook achterhalen hoe diep de begripsfout zit. Stel de leerling zou niet eens in staat zijn $\frac{1}{3}$ deel van een strook te kleuren. In dat geval moet er eerst daarop geoefend worden. Er ontbreekt dan namelijk een belangrijk inzicht. Onderdeel van de ACT-R theorie is dat moeilijker procedures pas geleerd moeten worden als de voorafgaande procedures goed beheerst worden. De tutor kan er voor zorgen dat dit ook gebeurd, en dat ieder kind op zijn eigen niveau kan werken.

Daarnaast kan een tutor de leerling ook de formele methode aanbieden op het moment dat hij vindt dat de leerling de soort sommen begripsmatig goed beheerst. Als een leerling bijvoorbeeld heel goed twee gelijknamige breuken kan optellen met behulp van een strook, zal de tutor hem erop kunnen wijzen dat hij in feite gewoon de tellers van de breuk optelt. Als de leerling deze proceduralisatiestap zelf niet maakt, kan de utor hem hierbij misschien helpen. Blijkt de leerling hierdoor later (misschien bij het optellen van ongelijknamige breuken) in de problemen te komen, dan kan de tutor weer een stapje terug doen door te achterhalen waar de begripsfout zit.

Een belangrijke voorwaarde voor het succes van een dergelijke tutor zal erin liggen hoe goed de tutor in staat is te achterhalen welke denkfout de leerling maakt. Als het een uitgebreide uitleg geeft op het moment dat de leerling alleen maar een rekenfout maakt, zal het de tutor de leerling snel gaan vervelen. Een manier om de tutor een goed idee te geven van het denkproces van de leerling is door hem beschikking te geven over bepaalde hulpmiddelen, zoals de strook, de verhoudingstabel, een bemiddelende grootheid, en eventueel het gebruik van formele rekenmethodes. Doordat de leerling aanklikt welke oplossingsmanier hij gebruikt, zal de tutor vrij goed kunnen volgen wat hij doet.

De voordelen van een tutor zijn dat een tutor *altijd* kan indiceren of een leerling een voorbeeld nodig heeft, en hem er dan ook één geven. Ook kan een tutor op *elk* antwoord feedback geven. De tutor houdt bij of een gebruiker een

bepaalde soort som al beheerst, en zal, als dat niet het geval is, extra oefeningen kunnen geven. Hiermee zijn de problemen van de soms te beperkte hoeveelheid sommen, het gebrek aan voorbeelden en het gebrek aan feedback voor een groot deel op te lossen.

Ook kan een tutor met de gebruiker interacteren. Hierdoor wordt deze gedwongen na te denken over zijn fouten. Dit moet in een klassesituatie ook gebeuren, maar hiervoor is vaak te weinig tijd. De groepen zijn zo groot dat niet elk kind de individuele aandacht krijgt die het nodig heeft en de leraar weet misschien niet altijd goed om te gaan met de realistische manier van lesgeven.

Door de interactie met de tutor kan het model weer de plaats krijgen die het hoort te hebben: als verklarend model, en wordt de kans dat het als rekenmodel wordt gebruikt minder groot. Als de gebruiker er aan toe is, kan de tutor hem ook de formele regels leren, zodat hij de sommen sneller kan maken.

Natuurlijk moet de eerste uitleg van de leraar komen, en zal de leraar altijd nodig blijven om extra uitleg te geven en kinderen te stimuleren door te gaan met hun werk. Het werken met de tutor zou bijvoorbeeld in de plaats kunnen komen van een zelfstandig-werkenles. En zwakkere rekenaars zouden extra tijd met de tutor kunnen werken om op niveau te komen.

Al met al denk ik dat een tutor erg nuttig zou kunnen zijn in het realistisch breukenonderwijs. Wel realiseer ik mij dat een tutor zoals ik die op het oog heb niet eenvoudig te ontwikkelen zal zijn. Ik ben er echter van overtuigd dat het, met de nodige inspanning, mogelijk zal moeten zijn.

discussie

De conclusies die ik heb getrokken zijn gebaseerd op de resultaten van een lerend model. Dit model heb ik zo zorgvuldig mogelijk proberen op te zetten, waarbij ik heb geprobeerd de realiteit zo goed mogelijk te benaderen. Ik realiseer mij echter terdege dat het model zijn beperkingen heeft.

Ten eerste kon ik mijn model door het ontbreken van gedetailleerde data niet goed toetsen aan de werkelijkheid. Toch lijken de resultaten van met name de altijd-feedback versie van mijn model globaal gezien erg overeen te komen met de resultaten van de Periodieke Peiling van 1997 (zie tabel 9.1.

	PPON(per percentiel)					
	10	*25*	*50*	*75*	*90*	*model*
Aanvullen tot 1	matig	goed	goed	goed	goed	goed
Vergelijken stambreuken	matig	goed	goed	goed	goed	matig
Vergelijken niet-stambreuken met dezelfde teller en verschillende noemer	slecht	slecht	matig	goed	goed	matig
optellen gelijknamige breuken	niet getest					goed
optellen halven en kwarten *kwarten en achtsten* *halven en zesden* *derden en zesden*	slecht	matig	goed	goed	goed	matig
verschil $\frac{3}{4}$ *en* $\frac{1}{3}$ *(vergelijkbaar optellen ongelijknamig)*	slecht	slecht	slecht	matig	goed	matig

Tabel 9.1: Uitkomsten van de Periodieke Peiling van 1997 per percentielgroep en de uitkomsten voor het ACT-R model

Een percentiel 10 leerling is een zwakke leerling. 90 % van de leerlingen scoort hoger. Slechts 10 % van de leerlingen scoort hoger dan een percentiel 90 leerling. Uitgaande van het feit dat de kerndoelen van 70 - 75 % van de leerlingen haalbaar moeten zijn, zouden de percentiel 25 leerlingen en hoger op bovengenoemde punten 'goed' moeten scoren. Dit is voor de meeste onderdelen niet het geval.

Op het aanvullen van breuken tot 1 scoren zowel de leerlingen als het ACT-R model goed.

In de PPON test werd een onderscheid gemaakt tussen het vergelijken van stambreuken en niet-stambreuken. In mijn model wordt dit onderscheid niet gemaakt. Het vergelijken van stambreuken wordt in groep 6 al behandeld, en heb ik niet geïmplementeerd. Op het vergelijken van niet stambreuken scoren het ACT-R model en de leerlingen allebei matig.

Het optellen van gelijknamige breuken is niet getest in de peiling. Misschien werd dit te makkelijk geacht. Het ACT-R model scoort er in elk geval goed op. Er is verder wat het optellen van breuken alleen gekeken naar het optellen van makkelijk gelijknamig te maken breuken, zoals halven en kwarten. Deze breuken komen zoveel in andere opgaven aan de orde dat de meeste leerlingen op een gegeven moment wel uit hun hoofd weten dat $\frac{1}{2}$ gelijk is aan $\frac{2}{4}$. In mijn model was deze kennis niet aanwezig, dus kan ik het slechts vergelijken met het optellen van ongelijknamige breuken. Daarop scoren de leerlingen in de Periodieke Peiling veel beter dan het model.

Een optelsom met 'moeilijkere' ongelijknamige breuken werd niet gegeven. Wel een aftreksom. Aangezien er voor het berekenen van $\frac{3}{4} - \frac{1}{3}$ ongeveer dezelfde kennis van breuken nodig als voor het optellen van $\frac{1}{4}$ en $\frac{1}{3}$ heb ik deze aftreksom als vergelijking voor het optellen van moeilijke ongelijknamige breuken genomen. Dan blijkt dat ook de leerlingen matig scoren. Zij hebben blijkbaar, net als het model, vooral moeite met het vergelijken van breuken en het optellen van ongelijknamige breuken.

Afgaande op het feit dat mijn model met dezelfde methode les heeft gekregen als een groot deel van de leerlingen, en ongeveer dezelfde resultaten boekt, denk ik dat ik met mijn model toch een vrij goede benadering geef van de werkelijkheid.

Ik heb voor deze vergelijking de resultaten van het altijd-feedback model genomen. De resultaten van het pluspunt-feedback model waren te slecht om realistisch te zijn. Er is een aantal redenen waarom het model met dezelfde sommen en dezelfde hoeveelheid feedback slechter presteert dan kinderen in een klassesituatie.

Ten eerste zal het model slechter presteren dan kinderen in een klassesituatie, omdat in een klassesituatie altijd een leraar is. De kinderen kunnen de leraar, of elkaar, om hulp vragen als ze niet weten hoe ze een som op moeten lossen. Ook kunnen ze terug bladeren in hun boek of hun schrift als ze niet meer weten hoe ze een bepaalde som op moeten lossen. Daarbij houdt een leraar natuurlijk ook in de gaten hoe de kinderen presteren. Als hij ziet dat een kind veel fouten maakt en niet weet hoe hij een bepaalde som moet oplossen, zal de leraar waarschijnlijk ingrijpen en dit kind extra hulp en voorbeelden aanbieden.

Ook is de leerstof die het model aangeboden kreeg, niet compleet. Het be-

treft hier slechts een beperkt deel van het totale breuken-curriculum, en van dat deel nog weer slechts één leerjaar. Ik heb hierbij geprobeerd een goede inschatting te maken van wat er aan het begin van groep 7 bekend is bij de leerling en wat niet. Maar ondanks dat is de kans heel groot dat het model niet compleet is. Zo mist het de kennis van de wereld die bij realistisch breukenonderwijs zo belangrijk is. Ook zou het kunnen dat ik bepaalde voorkennis of vaardigheden die erg belangrijk zijn voor het begrijpen van breuken over het hoofd heb gezien.

Verder is er met het model geen interactie mogelijk. Hiermee wordt een belangrijk punt van realistisch rekenonderwijs in mijn model niet aangeboden. Naast het feit dat leerlingen in interactieve lessen leren begrijpen waarom een oplossingsmethode goed of fout is, is ook het gebruik van bepaalde hulpmiddelen in deze situatie veel dwingender. Het model kreeg bepaalde voorbeelden aangeboden, maar was niet verplicht ze te gebruiken. Hierdoor kon de situatie ontstaan dat het model als het de voorbeelden kreeg aangeboden toch koos voor N-distractie, en dat op het moment dat het geleerd had dat N-distractie de foute methode was, het geen andere keus meer had dan N-distractie te gebruiken omdat hij geen voorbeeld van een goede methode had gekregen en er geen hulpmiddelen meer worden aangeboden. In een interactieve les zal er veel gecontroleerd worden of kinderen meegegeven modellen gebruiken op het moment dat ze worden aangeboden.

Daarnaast heeft het model, zoals ik al eerder noemde, niet de mogelijkheid om het gebruik van concrete modellen om te zetten naar imaginaire modellen. Misschien dat een dergelijke strategie het mogelijk zou maken om toch proceduralisatie over de hulpmiddelen te krijgen.

Het lijkt het mij interessant om te kijken wat het effect van een 'concreet-naar-imaginair'-strategie in het ACT-R model zou zijn. Ook denk ik dat mijn model nog verbeterd zou kunnen worden door het toevoegen van kennis over de gelijkwaardigheid van veelvoorkomende breuken, zoals $\frac{1}{2}$ en $\frac{2}{4}$. Het zou helemaal een verbetering zijn als het model vragen kan stellen als het geen oplossingsmethode heeft, of alleen maar een oplossingsmethode waarin hij weinig vertrouwen heeft. Dit zal echter vrij moeilijk te realiseren zijn. Een vervolgonderzoek over de effecten van deze aanpssingen zou misschien nuttig kunnen zijn.

Ondanks alle zwakheden die het ACT-R model heeft, denk ik toch dat dit onderzoek nuttig is geweest. Ook in de praktijk kan interactie immers gebrekkig zijn. Bijvoorbeeld doordat de leraar niet op de juiste manier of helemaal niet met de kinderen in discussie gaat. Of doordat niet alle kinderen actief meedoen aan de interactieve lessen. Ook deze kinderen moeten de einddoelen immers halen.

Ook is mijn onderzoek misschien reden om in de klas beter op te letten op welke manier de wiskundige modellen gebruikt worden. Het is immers niet de bedoeling dat het rekenmodellen worden, maar dat het houvast bied voor de kinderen, zodat ze begrijpen wat ze doen. Deze modellen horen op een gegeven moment niet meer gebruikt te worden. Mijn onderzoek heeft laten zien dat de wiskundige modellen vrij gemakelijk toch een rekenmodel kunnen worden.

Voor het argument dat ACT-R geen manier heeft om van concrete modellen over te stappen op imaginaire modellen geldt dat het ook niet vast staat dat kinderen dit kunnen doen, en, als ze het kunnen, of ze het ook doen. Het is

aannemelijk dat met name de sterkere leerlingen eventueel tot deze overgang in staat zullen zijn, omdat je er veel dingen voor in je geheugen moet kunnen houden, en omdat een abstractiestap niet door iedereen gemaakt kan worden. Maar juist de sterkere leerlingen hebben in het algemeen gesproken geen extra hulp nodig bij het leren rekenen met breuken. Zij zouden waarschijnlijk ook als ze op de traditionele manier les hadden gekregen hebben kunnen afleiden wat de logica achter breuken is. Je zou dus ook kunnen zeggen dat mijn ACT-R model voornamelijk het gedrag van zwakke leerlingen weergeeft.

Ik hoop dat ik met mijn onderzoek een kleine bijdrage heb kunnen leveren aan de onthulling van het mysterie van het falen van realistisch breukenonderwijs. Uiteraard moet het onderzoek naar realistisch breukenonderwijs nog voortgezet worden. Ik denk dat met name een eerlijk vergelijkend onderzoek op zijn plaats is. Een onderzoek waarbij er een groep leerlingen is die realistisch breukenonderwijs geniet, zoals in het onderzoek van Streefland. Maar met daarnaast ook een groep kinderen die volgens de traditionele manier les krijgt, met dezelfde mate van begeleiding, en evenveel lesuren. Ik denk dat de uitkomst van zo'n onderzoek een beter licht kan werpen op de verschillen in prestaties en inzichten tussen beide groepen, en dus op de verschillen tussen beide methoden.

Daarnaast lijkt het mij bijzonder interessant wat het effect van een op de realistische benadering gebaseerde ACT-R tutor zou zijn. Ik denk dat het de moeite waard zou zijn een dergelijke tutor te ontwikkelen.

Ik denk dat de waarde van mijn onderzoek niet zozeer ligt in de resultaten an sich, maar meer in het feit dat er eens gekeken is naar de zwakke punten van realistisch breukenonderwijs. De meeste onderzoeken die ik heb gelezen benaderden slechts de sterke punten van deze onderwijsmethode. Ik hoop dat ik met mijn onderzoek een opening heb gecreëerd voor een voortgaande kritische beschouwing van realistisch rekenonderwijs, met als beoogd resultaat een verbetering van deze manier van lesgeven.

Bibliografie

[1] Aleven, A.W.M.M. & Koedinger, K.R. (2000). The need for tutorial dialog to support self-explanation, *Building Dialogue Systems for tutorial Applications from the 2000 AAAI Fall Symposium, 65-73, Menlo Park, CA: AAAI Press*

[2] Anderson, J. R. (1993). Rules of the Mind, New Jersey: Hillsdale

[3] Anderson, J.R. (2002). Spanning seven orders of magnitude: a challenge for cognitive modelling, Cognitive Science, 26, 85-112

[4] Anderson, J.R & Lebiere, C. (1998). The Atomic Components of Thought, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

[5] Anderson, J.R. (1987). Skill acquisition: compilations of weak-method problem solutions, Psychological Review, 94, 192-210.

[6] Anderson, J.R., Corbett, A.T., Koedinger, K.R., & Pelletier, R. (1995). Cognitive tutors, lessons learned, The Journal of the Learning Sciences, 4(2), 167-207

[7] Bokhove, J. (1996). Wat leren kinderen van breuken in de basisschool? Resultaten van de periodieke peiling van het onderwijsniveau (PPON), Willem Bartjens, 15 (4), 14-19

[8] Borg, W.R. & Gall, M.D. (1971). Educational Research: An Introduction,New York : David McKay

[9] Chi, M.T.H., de Leeuw, N. Chiu, M & Lavalancher, C (1994) Eliciting self-explanations improves understanding, Cognitive Science, 18, 439-477.

[10] Clark, D.C. & Clark S.N. (1996). Better preparation of educational leaders, Educational Researcher, 25(8), 18-20

[11] Corbett, A.T. & Anderson, J.R. (1995). Knowledge tracing: modeling the acquisition of procedural knowledge, User Modeling and User-Adapted Interaction, 4, 253-278.

[12] Dehaene, S. (1997). The Number Sense: How the Mind Creates Mathematics, London:Penguin books

[13] Elmore, R.F. (1995). Structural reform and educational practice, Educational Researcher, 25 (1), 23-26

[14] Freudenthal, H. (1971). Geometry between de devil and the deep Sea, Educational Studies in Mathematics, 3, 413-435

[15] Gravemeijer, K., Van den Heuvel-Panhuize, M., Van Donselaar, G., Ruesink, N., Streefland, L., Vermeulen, W. Te Woerd, E. & Van der Ploeg, D. (1993). Methoden in het Reken-Wiskunde Onderwijs, een Rijke Context voor Vergelijkend Onderzoek, Utrecht: CD-β Press.

[16] Gravemeijer, K.P.E. (1994). Developing Realistic Mathematics Education, Utrecht: CD-β Press.

[17] Harskamp, E.G. (1988). Rekenmethoden op de Proef Gesteld, Groningen: RION, Instituut voor onderwijsonderzoek, Rijksuniversiteit Groningen

[18] Harskamp, E.G. & Suhre, C.J.M. (1986). Vergelijking van Rekenmethoden in het Basisonderwijs. Eindrapport, Groningen: RION, Instituut voor Onderwijsonderzoek, Rijksuniversiteit Groningen.

[19] Hendriks, P., Taatgen, N, Andringa, T. (1997). Breinmakers & Breinbrekers. Inleiding Cognitiewetenschap, Amsterdam[etc.]: Addison Wesley Longman.

[20] Inspectie van het onderwijs (1997). Rekenen en wiskunde in het Primair Onderwijs: Verslag van een Evaluatie van de Kwaliteit van het Reken-Wiskundeonderwijs, Utrecht: Inspectie van het onderwijs

[21] Janssen, J. (et. al.) (1999). Balans van het Reken-Wiskundeonderwijs aan het Einde van de Basisschool 3: Uitkomsten van de Derde Peiling in 1997, Arnhem: Cito, Instituut voor Toetsontwikkeling

[22] Keijzer, R. & Buys K. (1996). Groter of kleiner. Een kijkje in een nieuwe leergang breuken, Willem Bartjens, 15 (3), 10-17

[23] Klein, A.S. (1998). Flexibilization of Mental Arithmetic Strategies on an Different Knowledge Base. The Empty Number Line in a Realistic versus Gradual Program Design, Utrecht:CD-β Press

[24] Paulos, J.A. (1988). Innumeracy: Mathematical Illiteracy and Its Consequences, New York : Hill and Wang.

[25] Renkl, A. (1998) Learning from worked-out examples: the effects of example variability and elicited self-explanations, Contemporary educational Psychology 23, 90-108/

[26] Rittle-Johnson, B. & Wagner Alibali, M (1999). conceptual and procedural knowledge of mathematics: does one lead to the other?. Journal of Educational Psychology, 91 (1), 175-189

[27] Spencer, D.A. (1996). Teachers and educational reform, Educational Researcher, 25 (9), 15-17

[28] Streefland, L (1988). Realistisch Breukenonderwijs. Onderzoek en Ontwikkeling van een Nieuwe Leergang, proefschrift.

[29] Taatgen, N. (2001). TCARCH Architecturen voor intelligentie. Deel 2: ACT-R tutorial, unpublished.

[30] Taatgen, N.A. (2002). Proceedings of the annual ACT-R conference, unpublished

[31] Taatgen, N.A. & Lee, F.J. (in press). Production composition: a simple theory of complex skill acquisition. To appear in: Human Factors

[32] Treffers, A. (1996). Didactische zeshoek van het rekenonderwijs, Willem Bartjens, 15 (3),6-9

[33] Treffers, A., Streefland L. & De Moor, E. (1994). Proeve van een Nationaal Programma voor het Reken-Wiskundeonderwijs op de Basisschool, deel 3A Breuken, Tilburg : Zwijsen.

[34] Van Beusekom, N., Beemster, J., Bergervoet, S., Roijackers, P., Rouvroye, R. (1993). Pluspunt : Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool, Handleidingen, Groep 7, blok 1 t/m 6, blok 7 t/m 12, Den Bosch : Malmberg

[35] Van Beusekom, N., Beemster, J., Bergervoet, S., Roijackers, P., Rouvroye, R. (1993). Pluspunt : Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool, Lesboek, opdrachtenboek, plusboek, werkboek, toetsboek, Groep 7, Den Bosch : Malmberg

[36] Van Beusekom, N., Beemster, J., Scholten, P. (1994). Pluspunt : Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool, Handleidingen, Groep 8, blok 1 t/m 6, blok 7 t/m 12, Den Bosch : Malmberg

[37] Van Beusekom, N., Beemster, J., Scholten, P. (1994). Pluspunt : Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool, Lesboek, opdrachtenboek, plusboek, werkboek, toetsboek, Groep 6, Den Bosch : Malmberg

[38] Van Beusekom, N., Beemster, J., Van Dingenen, A., Van der Straaten, H. (1992). Pluspunt : Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool, Handleidingen, Groep 6, blok 1 t/m 6, blok 7 t/m 12, Den Bosch : Malmberg

[39] Van Beusekom, N., Beemster, J., Van Dingenen, A., Van der Straaten, H. (1992). Pluspunt : Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool, Lesboek, opdrachtenboek, plusboek, werkboek, toetsboek, Groep 6, Den Bosch : Malmberg

[40] Van Beusekom, N., Beemster, J, Gilissen, L. J.M., Noteboom, A., Schuffelers, L, (1992). Pluspunt : Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool, Handleidingen, Groep 5, blok 1 t/m 6, blok 7 t/m 12, Den Bosch : Malmberg

[41] Van Beusekom, N., Beemster, J, Gilissen, L. J.M., Noteboom, A., Schuffelers, L, (1992). Pluspunt : Reken-Wiskundemethode voor de Basisschool, Lesboek, opdrachtenboek, plusboek, werkboek, toetsboek, Groep 5, Den Bosch : Malmberg

[42] *Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1999) Mathematics education in the netherlands: a guided tour. On-line, http://www.fi.uu.nl/en/publications.shtml*

[43] *Van Hiele, P.M. (1973). Begrip en Inzicht. Werkboek van de Wiskundedidaktiek, Purmerend:Muusses*

[44] *Verschaffel, L. & De Corte, E. (1997). Teaching realistic mathematical modeling in the elementary school: a teaching experiment with fifth graders, Journal for Research in Mathematics Education, 28(5), 577-601*

[45] *Wijnstra, J.M. & Huitema, S. (1988). Balans van het Rekenonderwijs in de Basisschool: Uitkomsten van de Eerste Rekenpeiling Medio en Einde Basisonderwijs, Arnhem, Instituut voor toetsontwikkeling.*

[46] *Wilson, B. & Cole, P.(1991). Cognitive teaching models. Educational Technology Research and Development, 39(4), 47-64*

[47] *Zulkardi (1999). How to design mathematics lessons based on the realistic approach. On-line, http://www.geocities.com/ratuilma/rme.html*