



rijksuniversiteit  
groningen

faculteit Wiskunde en  
Natuurwetenschappen

# Chip-firing en de kritieke groep op een graaf

Bacheloronderzoek Wiskunde

Augustus 2011

Student: Maaïke Hoekstra

Eerste Begeleider: Prof. Dr. J. Top

Tweede Begeleider: Prof. Dr. A.C.D. van Enter

# CHIP-FIRING EN DE KRITIEKE GROEP OP EEN GRAAF

## 1. SAMENVATTING

We kijken allereerst naar grafen in het algemeen en maken daar enkele aannames bij. Zo geven we elke vertex een waarde en definiëren we een configuratie als een vector met daarin de waardes van alle vertices in de graaf. Daarnaast definiëren we nog andere vectoren en matrices, waaronder Laplaciaanmatrix  $Q$  en incidentiematrix  $D$ . We laten zien wat chip-firing, een proces waarbij de configuratie voortdurend verandert, inhoudt. Ook kunnen we het resultaat van een reeks van chip-firing uitschrijven in een simpele vergelijking met behulp van de gedefinieerde matrices. We zien dat bij een vaste graaf elke startconfiguratie een unieke kritieke configuratie heeft. De verzameling van kritieke configuraties voor graaf  $G$  blijkt bovendien een groep te zijn. We bestuderen de groepsoperatie van deze groep en gaan uiteindelijk op zoek naar zijn eenheidselement. In de scriptie volgen we grotendeels de beschrijving uit een artikel geschreven door de heer N.L. Biggs. Enkele details zullen nader worden uitgewerkt en sommige definities proberen we iets duidelijker te omschrijven. [1]

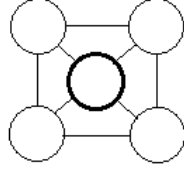
## 2. INTRODUCTIE

Het figuur wat in deze hele scriptie telkens terugkomt, is de graaf. We noteren een graaf als  $G = (V, E, i)$  waar  $V$  een verzameling vertices, punten ook wel knopen is en  $E$  een verzameling kanten (ook wel edges). De functie  $i : E \rightarrow V^{(2)}$  is een functie naar  $V^{(2)}$ : de verzameling van ongeordende paren vertices. De functie  $i$  geeft dus voor elke kant  $e$  welke vertices door deze kant verbonden worden. Kortom, een graaf bestaat uit een verzameling vertices die al dan niet onderling verbonden zijn door kanten. [2]

Voordat we verder gaan, zijn er enkele aannames op de grafen nodig. Allereerst maken we in deze scriptie alleen gebruik van eindige grafen: de verzameling  $V$  bestaat uit een eindig aantal elementen. Ten tweede nemen we aan dat twee verschillende vertices maar door één kant verbonden kunnen worden. Bovendien kan er geen kant zijn van een bepaalde vertex naar zichzelf: het bestaan van lussen is uitgesloten. We maken alleen gebruik van *verbonden* grafen: dit betekent dat je vanaf een vertex via verschillende kanten naar elke andere vertex kan komen. Tot slot wijzen we in elke graaf één vertex aan, genaamd  $q$ , die zich anders gedraagt dan de andere vertices zo zal verderop blijken.

**Voorbeeld 2.1.** *In figuur 1 zien we een graaf die voldoet aan alle gestelde aannames. Het is een eindige graaf met 8 kanten en 5 vertices waarvan de vertex  $q$  met een dikke rand aangegeven.*

Bij deze grafen definiëren we het begrip *configuratie*: een afbeelding  $s : V \rightarrow \mathbb{Z}$ . Een configuratie voegt dus aan elke vertex  $v$  een geheel getal  $s(v)$  toe en vormt zo een vector. Zo'n geheel getal noemen we de *waarde* van  $v$  in de configuratie  $s$  en deze is altijd groter of gelijk aan nul. Voor de vertex  $q$  is dit echter anders, deze heeft namelijk een waarde die kleiner of gelijk aan nul is. Zijn waarde is zo



FIGUUR 1. Een graaf G

gedefinieerd dat de totale waarde van de graaf precies nul is. Daarnaast definiëren we de *graad* van de vertex  $v$  als het aantal vertices ongelijk aan  $v$  dat door middel van een kant met  $v$  verbonden is. We noteren dit gehele getal met  $\deg(v)$ .

We zullen nu verder gebruik maken van *chips*, die als het ware vergeleken kunnen worden met zandkorrels. De waarde van  $v$  bekijken we vanaf nu als het aantal chips dat de vertex bezit. Het totaal aantal chips op een graaf is dus nul. We hebben nu alle voorwaarden op een graaf gedefinieerd om *chip-firing* te kunnen laten plaatsvinden. Dit houdt in dat zodra de waarde van de vertex  $v$  groter of gelijk is aan  $\deg(v)$ , vertex  $v$  naar elke aangrenzende vertex een chip afvuurt. De waarde van vertex  $v$  daalt dan dus met  $\deg(v)$ , terwijl de waarde van de 'buurvertices' met één toeneemt. Op die manier kan de waarde van een buurvertex uitstijgen boven zijn betreffende graad, waardoor deze zal gaan afvuren. Dit proces herhaalt zich verschillende keren, waardoor een niet lege, eindige reeks  $S$  van afvuringen ontstaat.

Bij deze reeks definiëren we een *representatievector*: een afbeelding  $x : V \rightarrow \mathbb{Z}$ . Voor elke vertex  $v$  geeft  $x(v)$  aan hoe vaak de vertex  $v$  voorkomt in de reeks  $S$ .

Door middel van de beschreven vectoren kunnen we nu precies beschrijven hoe de waarde  $s(v)$  verandert na een reeks van 'firings'  $S$ :

$$(1) \quad s'(v) = s(v) - x(v) \deg(v) + \sum_{w \neq v} x(w) \nu(v, w).$$

Deze vergelijking is een evenwicht van de afgifte en ontvangst van chips door de vertex  $v$ . Elke keer als deze vertex in de reeks voorkomt geeft hij  $\deg(v)$  chips af, vandaar de term  $x(v) \deg(v)$ . Daarnaast zal de vertex een chip ontvangen wanneer een buurvertex die afgeeft. Dit verklaart de derde term, waar  $\nu(v, w)$  het aantal kanten is waardoor  $v$  en  $w$  verbonden zijn. Vanwege één van onze aannames zal  $\nu(v, w)$  gelijk zijn aan 0 of 1. Bovendien weten we dat deze som eindig is, omdat we gebruik maken van eindige grafen.

We kunnen vergelijking 1 omschrijven naar een matrixnotatie, als we de volgende *Laplaciaan matrix*  $Q$  definiëren:

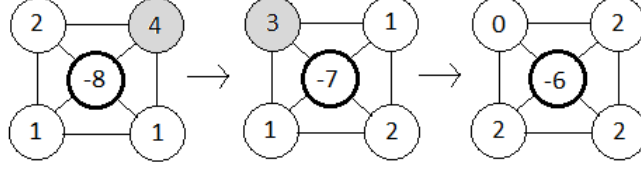
$$(Q)_{vw} = \begin{cases} -\nu(v, w), & \text{als } v \neq w; \\ \deg(v), & \text{als } v = w. \end{cases}$$

Deze matrix is vierkant en bovendien symmetrisch. De relatie tussen  $s$  en  $s'$  kunnen we nu schrijven als

$$s' = s - Qx.$$

**Voorbeeld 2.2.** We kijken nogmaals naar de graaf uit het eerste voorbeeld. Om een configuratie op te kunnen schrijven bij deze graaf is het nodig dat we een volgorde van vertices kiezen. We spreken daarom af dat de vertex linksboven de eerste is,

waarna we met de klok mee tellen tot de vijfde vertex  $q$ . Als we nu aan de graaf de startconfiguratie  $s = (2, 4, 1, 1, -8)$  toekennen, zal de volgende reeks van chip-firing optreden:



FIGUUR 2. Reeks  $S$

Hier is met een grijze kleur aangegeven welke vertex op het punt staat om chips af te vuren. Na een reeks van twee stappen is de eindconfiguratie  $s' = (0, 2, 2, 2, -6)$  bereikt. Bij deze reeks  $S$  hoort de representatievector  $x = (1, 1, 0, 0, 0)$  omdat de eerste beide vertices hier elk één keer werden afgevuurd. Volgens de definitie is  $Q$  voor deze graaf van de vorm

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Een korte berekening laat nu inderdaad zien dat  $s' = s - Qx$ .

Zoals eerder gezegd gebruiken we in deze scriptie grafen die alle de vertex  $q$  gemeen hebben. Dit is de enige vertex waarvan de waarde negatief kan zijn. De vertex  $q$  gedraagt zich daarnaast anders tijdens de chip-firing:  $q$  kan alleen in  $S$  voorkomen als op dat moment geen van de andere vertices afgevuurd kan worden. We weten nu

$$\begin{aligned} s(v) &\geq 0 \quad (v \neq q); \\ s(q) &= - \sum_{v \neq q} s(v) \leq 0. \end{aligned}$$

Als voor een configuratie  $s$  geldt

$$0 \leq s(v) < \deg(v) \quad (v \neq q)$$

dan noemen we de configuratie *stabiel*. We noemen een reeks  $S$   $q$ -*legaal* dan en slechts dan als elk optreden van een vertex  $v \neq q$  volgt na een configuratie  $t$  met  $t(v) \geq \deg(v)$  en als elk optreden van de vertex  $q$  volgt na een stabiele configuratie. Een configuratie  $r$  op een graaf  $G$  noemen we *recurrent* als er een niet-lege  $q$ -legale volgorde van vertices bestaat die  $r$  naar zichzelf terugbrengt. Als een configuratie stabiel en recurrent tegelijk is, noemen we dat een *kritieke configuratie*.

In de volgende paragrafen definiëren we voor elke graaf een matrix  $D$  en bekijken we zijn eigenschappen. Daarna zullen we de algemene theorie van de chip-firing verder onderzoeken. Een belangrijk onderdeel is het bewijzen dat de verzameling van kritieke configuraties een eindige, commutatieve groep is. Het doel is om uiteindelijk voor een aantal types van grafen het eenheidselement van deze groep te vinden.

3. EEN MATRIX  $D$  MET  $DD^t$  GELIJK AAN DE LAPLACIAAN

In deze paragraaf wordt uitgelegd hoe voor een willekeurige graaf de matrix  $D$  gedefinieerd wordt en waarom deze handig blijkt te zijn.

Zoals bekend noteren we een graaf als  $G = (V, E, i)$  waar  $i : E \rightarrow V^{(2)}$ . Hierbij kiezen we nu een *oriëntatie*. Dit wil zeggen, we wijzen bij elk tweetal vertices die door een kant  $e$  verbonden worden aan, welke van de twee we de voorkant (*head*) en welke we de staart (*tail*) noemen. Anders gezegd, we kiezen functies  $h : E \rightarrow V$  en  $t : E \rightarrow V$  zodat geldt  $i(e) = \{h(e), t(e)\}$  voor alle  $e \in E$ .

Als nu  $n = |V|$  en  $m = |E|$  dan wordt de  $n \times m$  *incidentiematrix*  $D = (d_{ve})$  als volgt gedefinieerd:

$$d_{ve} = \begin{cases} 1, & \text{als } v = h(e); \\ -1, & \text{als } v = t(e); \\ 0, & \text{als } v \notin i(e). \end{cases}$$

Het is goed op te merken dat, in tegenstelling tot de matrix  $Q$ , de incidentiematrix  $D$  niet noodzakelijk vierkant is en in weinig gevallen symmetrisch. Bovendien hangt  $D$  af van de keuze van de oriëntatie.

Laat daarnaast  $C^0(G; \mathbb{Z})$  de Abelse groep zijn bestaande uit alle afbeeldingen van  $V$  naar  $\mathbb{Z}$ . Evenzo noteren we met  $C^1(G; \mathbb{Z})$  de Abelse groep bestaande uit alle afbeeldingen van  $E$  naar  $\mathbb{Z}$ . De nulafbeelding, dat wil zeggen aan elke vertex respectievelijk elke kant de waarde nul toegekennen, is binnen beide groepen het eenheidselement. Voor  $C^0(G; \mathbb{Z})$  hebben we de basis  $\{a_v : v \in V\}$ , met  $a_v(v) = 1$  en  $a_v(w) = 0$  als  $w \neq v$ . Voor  $C^1(G; \mathbb{Z})$  is dat  $\{b_e : e \in E\}$  op dezelfde manier geconstrueerd. Ten aanzien van deze bases kunnen  $D$  en  $D^t$  als volgt geïnterpreteerd worden:

$$D : C^1(G; \mathbb{Z}) \longrightarrow C^0(G; \mathbb{Z})$$

is de lineaire afbeelding die op de basis  $\{b_e \mid e \in E\}$  gegeven wordt door

$$D(b_e) = a_{h(e)} - a_{t(e)}.$$

En

$$D : C^0(G; \mathbb{Z}) \longrightarrow C^1(G; \mathbb{Z})$$

wordt analoog gegeven door

$$D^t(a_v) = \sum_e b_e - \sum_e b_e.$$

In de tweede vergelijking wordt eerst gesommeerd over alle  $e$  waarvoor  $h(e) = v$  en de tweede sommatie gaat over alle  $e$  waarvoor  $t(e) = v$ .

**Stelling 3.1.** *Voor incidentiematrix  $D$  en Laplaciamatrix  $Q$  geldt  $Q = DD^t$  en  $\ker Q = \ker D^t$ .*

**Bewijs:**  $D^t$  is de getransponeerde van de matrix  $D$ , waarvoor geldt  $(d_{ve})^t = (d_{ev})$ . Als nu  $A = DD^t$  dan wordt  $(a_{vw})$  gevormd door het product van de  $i$ -de rij van  $D$  en de  $j$ -de kolom van  $D^t$ . Maar de  $j$ -de kolom van  $D^t$  is de  $j$ -de rij van  $D$ . Dus  $(a_{vw}) = \sum_e d_{vj} d_{wj}$ . We zullen nu twee gevallen onderscheiden: de diagonaal van  $A$  (het geval  $v = w$ ) en de elementen van  $A$  buiten de diagonaal ( $v \neq w$ ). Allereerst de diagonaal: er geldt nu  $a_{vv} = \sum_e d_{ve} d_{ve}$ , waarin men het standaardinproduct van de rij  $v$  met zichzelf herkent. Omdat  $d_{ve}$  alleen de waarden 0, 1 of -1 aan kan nemen, is  $a_{vv}$  gelijk aan het aantal keren dat er een element ongelijk aan nul in de rij  $v$  van de matrix  $D$  staat. Naar constructie van de matrix  $D$  geldt  $d_{ve} \neq 0 \Leftrightarrow v \in i(e)$ .

Op deze manier geeft  $a_{vv}$  antwoord op de vraag: Met hoeveel vertices is vertex  $v$  verbonden? Zoals eerder gedefinieerd is dit gelijk aan de graad van de vertex, dus nu  $a_{vv} = \deg(v)$ . Dus geldt nu  $Q_{vv} = \deg(v) = a_{vv}$ . Nu resteert te kijken naar het geval  $v \neq w$ . Over het product  $d_{ve}d_{we}$  kunnen we in ieder geval zeggen dat  $d_{ve} \neq d_{we}$  als beide ongelijk nul zijn. Anders zou namelijk moeten gelden dat  $v$  en  $w$  beide de kop of beide de staart van de kant  $e$  zijn, wat onmogelijk is vanwege  $v \neq w$ . Het product  $d_{ve}d_{we}$  zal nu alleen de waarden 0 en  $-1$  aan kunnen nemen. Er doet zich namelijk een 0 voor wanneer minstens één van de beide vertices  $v$  en  $w$  niet door  $e$  wordt verbonden aan een ander. Wanneer  $e$  precies de kant is die  $v$  en  $w$  met elkaar verbindt dan geldt  $d_{ve}d_{we} = -1$ . Dit wetende is het nog een kleine stap om het bewijs te voltooien. De som  $(a_{vw}) = \sum_e d_{ve}d_{we}$  blijkt nu namelijk gelijk te zijn aan het aantal kanten waardoor  $v$  en  $w$  verbonden worden, voorzien van een minteken. Dus geldt voor  $v \neq w$  dat  $(a_{vw}) = \sum_e d_{ve}d_{we} = -\nu(v, w) = Q_{vw}$ .

Hiermee is bewezen dan  $DD^t = A = Q$  voor zowel op als naast de diagonaal van de matrix  $A$ .

Het bewijs voor de gelijkheid van de kernen gaat als volgt. Stel dat  $\alpha$  een configuratie op  $V$  is en bekeken als kolomvector. Er geldt dan  $(D^t\alpha)(e) = \alpha(h(e)) - \alpha(t(e))$  voor willekeurige  $e \in E$ . Als nu  $D^t\alpha = 0$  dan geldt er  $\alpha(h(e)) = \alpha(t(e))$ : voor alle  $e$  neemt  $\alpha$  op de kop en de staart van  $e$  dezelfde waarde aan. Maar omdat we gebruik maken van *verbonden* grafen volgt dat  $\alpha$  constant is op de hele graaf. Beginnen we echter met de aanname dat  $\alpha$  constant is, dan geldt  $\alpha(h(e)) = \alpha(t(e))$  voor alle  $e$ , dus  $D^t\alpha = 0$ . Er geldt dus dat alle elementen van  $\alpha$  dezelfde waarde hebben.

**Definitie 3.2.** *Met  $u$  noteren we de configuratie op  $V$  waarvoor  $u(v) = 1$  voor elke  $v \in V$ .*

We weten dan nu dat  $\ker D^t = \{\alpha(v) \mid \alpha(v) = \lambda u(v)\}$  voor  $\lambda$  een geheel getal. Maar wat kunnen we nu zeggen over  $\ker Q$ ? Neem  $\alpha \in \ker D^t$ , dan  $D^t\alpha = 0$  en dus  $Q\alpha = DD^t\alpha = 0$ . Daarnaast, als  $Q\alpha = 0$  dan  $\alpha^t Q\alpha = \|D^t\alpha\|^2 = 0$  en dus  $D^t\alpha = 0$ . We hebben nu bewezen dat  $\ker Q = \ker D^t$ .  $\square$

#### 4. DE THEORIE VAN DE CHIP-FIRING

Bij het proces van chip-firing draait het erom dat een startconfiguratie door middel van een reeks afvuringen van vertices uiteindelijk leidt tot een kritieke configuratie. Binnen een dergelijke reeks van afvuringen zijn natuurlijk verschillende volgordes mogelijk. Het zal blijken in deze paragraaf dat wanneer de startconfiguratie gelijk gekozen wordt, alle verschillende volgordes leiden tot dezelfde kritieke configuratie. Verder zullen we de werking en eigenschappen van de chip-firing nader beschrijven door middel van lemma's en stellingen.

We spreken in het vervolg van een *nette reeks*  $S$  als de vertex  $q$  niet in  $S$  voorkomt.

**Lemma 4.1.** *Gegeven een startconfiguratie  $s$ , dan is er een bovengrens op de lengte van een nette,  $q$ -legale reeks  $S$ .*

**Bewijs:** Dit bewijs gaat vanuit het ongerijmde. Als we aannemen dat er geen bovengrens bestaat op de lengte van nette,  $q$ -legale reeksen  $S$  uitgaande van beginconfiguratie  $s$ , dan betekent dat dus dat de configuratie voortdurend instabiel blijft. Dit houdt in dat er geen chips 'verloren' mogen gaan aan  $q$ : op die manier zouden de vertices ongelijk aan  $q$  immers stabiel kunnen worden. Om dat tegen te gaan stellen we dat de vertices die rechtstreeks aan de vertex  $q$  verbonden zijn, niet kunnen afvuren in een reeks met instabiele configuraties. Voor deze vertices

$v$  geldt dus dat dat voortdurend moet gelden  $s(v) < \deg(v)$ . Omdat  $v$  niet kan voorkomen in de reeks  $S$  zal  $s(v)$  nooit afnemen. Bovendien kan  $s(v)$  alleen maar toenemen wanneer een buurvertex  $v'$ , die verder van  $q$  verwijderd is, afvuurt. Dit moet tegengegaan worden, waardoor we ook weten dat de vertices  $v'$  niet in de reeks  $S$  mogen voorkomen. Dit argument kunnen we steeds herhalen, totdat we uiteindelijk een reeks  $S$  hebben, die naar aanname geen bovengrens op de lengte heeft, maar daarnaast geen enkele vertex uit de verzameling  $V$  kan bevatten. Dit duidt op een tegenspraak: er bestaat dus wel degelijk altijd een bovengrens op de lengte van nette,  $q$ -legale reeksen  $S$ . [3, Pagina 4]  $\square$

Als we dus beginnen met een vertex  $s$  en vervolgens in een  $q$ -legale reeks alleen vertices ongelijk aan  $q$  afvuren, dan zullen we na een poosje zeker een stabiele configuratie bereiken. Ook wel: een reeks  $S$  bereikt uiteindelijk altijd een configuratie waarin geen andere vertex dan  $q$  afgevuurd kan worden.

Over de chip-firing op een verbonden graaf  $G$  kunnen we nu het volgende bewijzen:

**Lemma 4.2.** *Elke willekeurige configuratie  $s$  is door een  $q$ -legale reeks van afvuringen over te voeren in een kritieke configuratie.*

**Bewijs:** Zoals zonet beschreven, kan een stabiele configuratie bereikt worden waarbij er geen andere vertex meer afgevuurd kan worden dan  $q$ . Als we dan  $q$  afvuren en het proces voortzetten, zullen we wederom een stabiele configuratie bereiken die niet noodzakelijk gelijk is aan de vorige. Het aantal stabiele configuraties op een graaf  $G$  is bovendien eindig. Dus als we deze procedure herhalen zal er altijd minstens één configuratie vaker dan één keer voorkomen, en dit is een kritieke configuratie.  $\square$

Uiteindelijk willen we bewijzen dat er, beginnend vanuit een vaste configuratie  $s$ , maar één dergelijke kritieke configuratie is. Daartoe construeren we eerst de volgende reeks.

Neem  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{Y}$  reeksen vertices en neem  $y$  als de representatievector voor  $\mathcal{Y}$ . Stel dat  $x$  de representatievector voor de reeks  $\mathcal{X}$  is. Construeer nu  $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$  als volgt: start met  $\mathcal{X}$  en als voor vertex  $v$  geldt dat  $x(v) \leq y(v)$ , verwijder dan alle  $v$  uit  $\mathcal{X}$ . Als  $x(v) > y(v)$ , verwijder dan de eerste  $y(v)$  verschijningen van  $v$  in  $\mathcal{X}$ .

**Lemma 4.3.** *Neem  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{Y}$  nette reeksen met representatievectors  $x$  en  $y$  en  $q$ -legaal voor de configuratie  $s$ . Dan is de reeks  $\mathcal{Z} = (\mathcal{Y}, \mathcal{X}^{\mathcal{Y}})$  ook  $q$ -legaal voor  $s$ . De representatievector  $z$  voor  $\mathcal{Z}$  worden gegeven door  $z(v) = \max(x(v), y(v))$ .*

**Bewijs:** Omdat  $\mathcal{Y}$  al  $q$ -legaal voor  $s$  is, dient nog bewezen te worden dat  $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$   $q$ -legaal is voor  $s_2 = s - Qy$ .

Laat nu  $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$   $q$ -legaal zijn voor  $s_2$  tot waar men op het punt staat om vertex  $v$  voor de  $i$ -de keer in  $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$  te laten afvuren. Op dat moment is door een reeks van afvuringen de configuratie  $k^y$  ontstaan. Laat nu  $k$  de configuratie zijn die precies voor de corresponderende verschijning in  $\mathcal{X}$  bereikt is. Omdat  $v$  bijna voor de  $i$ -de keer in  $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$  voorkomt, volgt uit de constructie dat  $v$  bij het bereiken van  $k$  op het punt staat om voor de  $y(v) + i$ -de keer in  $\mathcal{X}$  afgevuurd te worden. Laat daarnaast  $x_0$  en  $x_0^y$  de representatievectors voor respectievelijk een deel van  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$ , namelijk tot het moment waarop respectievelijk  $k$  en  $k^y$  bereikt zijn. Er geldt dan:

$$k = s - Qx_0 \quad \text{en} \quad k^y = (s - Qy) - Qx_0^t = s - Qz_0$$

waar  $z_0 = y + x_0^t$ . Als we dit evalueren in  $v$  dan kunnen we met behulp van (1) schrijven

$$k(v) = s(v) - x_0(v) \deg(v) + \sum_{w \neq v} x_0(w) \nu(w, v),$$

$$k^y(v) = s(v) - z_0(v) \deg(v) + \sum_{w \neq v} z_0(w) \nu(w, v).$$

Zoals gezegd staat men op het punt om vertex  $v$  voor de  $i$ -de keer in  $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$  te laten afvuren. Dat betekent dat  $x_0^y(v) = i - 1$  en dus  $z_0(v) = y(v) + (i - 1)$ . Corresponderend wordt  $v$  in  $\mathcal{X}$  bijna voor de  $(y(v) + i)$ -de keer afgevuurd, dus  $x_0(v) = (y(v) + i) - 1$  waaruit volgt dat  $x_0(v) = z_0(v)$ .

We bekijken nu een willekeurig vertex  $w$  die voorkomt in  $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$ . Stel dat  $w$  precies  $j$  keren is afgevuurd in  $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$ , zodat  $z_0(w) = y(w) + j$ . Als nu  $j = 0$  dan geldt  $z_0(w) = y(w)$ . Bovendien volgt uit de constructie van  $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$  dat  $x_0(w) \leq y(w)$  en dus  $x_0(w) \leq z_0(w)$ . Als  $j > 0$  dan geldt  $z_0(w) = y(w) + j$  en uit de constructie volgt  $x_0(w) = y(w) + j$ , dus concluderen we dat  $x_0(w) = z_0(w)$  voor  $j > 0$ . Voor alle waarden van  $j \geq 0$  geldt dus dat  $x_0(w) \leq z_0(w)$ .

Het kan natuurlijk ook zijn dat  $w$  helemaal niet voorkomt in  $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$ . In dat geval geldt  $x_0^y(w) = 0$  en dus  $z_0(w) = y(w) \geq x(w) \geq x_0(w)$ . Hierbij wordt de eerste ongelijkheid verklaard door de constructie van  $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$  en de tweede ongelijkheid door het feit dat  $x_0(w)$  de representatievector is voor een deel van  $\mathcal{X}$ . Dus ook als  $w$  niet voorkomt in de reeks blijft gelden dat  $x_0(w) \leq z_0(w)$ .

Dit wetende bekijken we de vergelijkingen voor  $k(v)$  en  $k^y(v)$  nader. Omdat  $x_0(v) = z_0(v)$  en  $x_0(w) \leq z_0(w)$  geldt nu dat  $k^y(v) \geq k(v)$ , maar daarnaast ook  $k(v) \geq \deg(v)$  ( $\mathcal{X}$  is immers  $q$ -legaal voor het afvuren van  $v$ ). Hieruit concluderen we dat  $k^y(v) \geq \deg(v)$ :  $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$  is ook  $q$ -legaal voor  $s_2$  op het moment dat  $v$  afgevuurd zal worden.

Nu het eerste deel van het lemma is bewezen, rest nog te kijken naar de representatievector  $z$ . Als  $x(v) > y(v)$  dan weten we dat de eerste  $y(v)$  verschijningen van  $v$  in  $\mathcal{X}$  in  $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$  zullen worden verwijderd. De vertex  $v$  zal dan nog  $x(v) - y(v)$  keer voorkomen in  $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$ . Voor  $\mathcal{Z} = (\mathcal{Y}, \mathcal{X}^{\mathcal{Y}})$  geldt nu dat  $z(v) = y(v) + x^y(v) = y(v) + (x(v) - y(v)) = x(v)$ .

Als  $x(v) \leq y(v)$  dan geldt  $x^y(v) = 0$  en dus  $z(v) = y(v)$ . Nu

$$\begin{aligned} z(v) &= x(v) \text{ voor } x(v) > y(v); \\ z(v) &= y(v) \text{ voor } x(v) \leq y(v), \\ &\Rightarrow z(v) = \max(x(v), y(v)). \end{aligned}$$

**Stelling 4.4.** *Stel dat  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{Y}$  nette reeksen zijn als in Lemma 4.3. We nemen aan dat zij, beginnend bij dezelfde configuratie  $s$ , respectievelijk de configuraties  $s_1$  en  $s_2$  bereiken. Dan bestaat er een configuratie  $s_3$  welke vanaf zowel  $s_1$  als  $s_2$  bereikt kan worden door  $q$ -legale reeksen.*

**Bewijs:** Voor nette,  $q$ -legale reeksen  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{Y}$  geldt dat zij na startconfiguratie  $s$  zullen gaan naar respectievelijk  $s_1 = s - Qx$  en  $s_2 = s - Qy$ . Bij Lemma 4.3 hebben we gevonden dat  $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$   $q$ -legaal is voor deze  $s_2$  en dus zal op dezelfde manier  $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$   $q$ -legaal zijn voor  $s_1$ . De reeksen  $(\mathcal{Y}, \mathcal{X}^{\mathcal{Y}})$  en  $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}^{\mathcal{X}})$  hebben bovendien dezelfde representatievector  $z$ , waaruit volgt dat deze reeksen beide leiden tot dezelfde configuratie  $s_3$ . De  $q$ -legale reeksen die volgens de stelling zowel vanaf  $s_1$  als  $s_2$  naar  $s_3$  kunnen leiden, zijn dus respectievelijk  $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$  en  $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$ .  $\square$

**Gevolg 4.5.** *Laat  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{Y}$  zijn als in Stelling 4.4. Dan geldt*

- (1) *Als  $s_1$  stabiel is, dan leidt  $\mathcal{Z} = (\mathcal{Y}, \mathcal{X}^{\mathcal{Y}})$  ook naar  $s_1$ .*
- (2) *Als  $s_1$  en  $s_2$  beide stabiel zijn, dan geldt  $s_1 = s_2$ .*

**Bewijs**

- (1) We hebben zojuist gezien dat  $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$   $q$ -legaal is voor  $s_1 = s - Qx$ . Maar het gegeven dat  $s_1$  stabiel is, moet gelden dat er geen enkele vertex behalve  $q$



nog afgevuurd kan worden. In dat geval is  $\mathcal{Y}^{\mathcal{X}}$  leeg, wat door de constructie alleen kan optreden wanneer  $x(v) \geq y(v)$ . Dan geldt  $x^y(v) = x(v) - y(v)$  en dus voor  $\mathcal{Z} = (\mathcal{Y}, \mathcal{X}^{\mathcal{Y}})$  dan  $z(v) = y(v) + (x(v) - y(v)) = x(v)$ .  $\mathcal{Z}$  en  $\mathcal{X}$  hebben dus dezelfde representatievector en leiden dus tot dezelfde configuratie  $s_1$ .

- (2) Nu  $s_2$  ook stabiel is, kunnen we op vergelijkbare manier laten zien dat  $y(v) \geq x(v)$ . Vanwege beide ongelijkheden moet nu gelden dat  $x(v) = y(v)$ : reeksen  $\mathcal{X}$  en  $\mathcal{Y}$  hebben dezelfde representatievector. De reeksen leiden dus tot dezelfde configuratie  $s_1 = s_2$ .

**Lemma 4.6.** *Als de configuratie  $c$  recurrent is dan bestaat er een  $q$ -legale reeks  $\mathcal{U}$  voor  $c$  die representatievector  $u$  heeft, de vector met op elke plaats een 1.*

**Bewijs:** Volgens de definitie is  $c$  recurrent als er een  $q$ -legale reeks voor  $c$  bestaat die leidt naar dezelfde configuratie. Deze reeks noemen we nu  $\mathcal{R}$  en zijn representatievector  $r$  moet voldoen aan  $c - Qr = c$  en dus  $Qr = 0$ . Kennelijk is  $r$  een element van  $\ker Q$ , welke bestaat uit alle veelvouden  $\lambda u$  van de 1-vector  $u$ .

In het bewijs van Lemma 4.3 zagen we dat  $\mathcal{X}^{\mathcal{Y}}$   $q$ -legaal is voor  $s - Qy$ . Op dezelfde manier is te bewijzen dat  $\mathcal{R}^{\mathcal{U}}$   $q$ -legaal is voor  $c - Qu = c$ . De representatievector die hierbij hoort is  $(\lambda - 1)u$ . Als we dit proces herhalen, ontstaat een  $q$ -legale reeks  $\mathcal{U}$  met representatievector  $u$ .  $\square$

**Lemma 4.7.** *Stel dat  $c$  een kritieke configuratie is en dat er een  $q$ -legale reeks  $\mathcal{S}$  voor  $c$  bestaat die een kritieke configuratie  $d$  bereikt. Dan moet gelden  $d = c$ .*

**Bewijs:** De reeks  $\mathcal{S}$  voor  $c$  bereikt configuratie  $d$  dus geldt  $d = c - Qx$  voor representatievector  $x$  van  $\mathcal{S}$ . Laat  $\mathcal{U}$  nu zijn als in Lemma 4.6. De configuratie  $d$  is kritiek, dus stabiel en recurrent, dus (Gevolg 4.5) als de reeks  $\mathcal{S}$  naar  $d$  leidt, dan ook  $(\mathcal{U}, \mathcal{S}^{\mathcal{U}})$ . Als we nu  $x^u$  schrijven voor de representatievector van  $\mathcal{S}^{\mathcal{U}}$  dan geldt  $d = c - Qx = c - Qx^u$ . Het volgt dat  $x - x^u$  zich in  $\ker Q$  moet bevinden, en dus een geheel veelvoud van  $u$  moet zijn:  $x - x^u = \lambda u$  met  $\lambda$  een geheel getal. Door de manier van construeren van  $\mathcal{S}^{\mathcal{U}}$  weten we dat  $\lambda = 0$  of  $\lambda = 1$ . Als  $\lambda = 0$  dan geldt  $x = x^u$  en dat impliceert dat de reeks  $\mathcal{S}$  leeg moet zijn. Er geldt dan wel  $c = d$  maar een lege reeks is niet wat we zoeken. De juiste waarde is dus  $\lambda = 1$  en dus  $x - x^u = u$ . Samenvattend, als we  $\mathcal{S}$  door  $\mathcal{S}^{\mathcal{U}}$  vervangen betekent dat dat voor elke vertex het aantal verschijningen in  $\mathcal{S}$  met 1 verminderd wordt om het aantal verschijningen in  $\mathcal{S}^{\mathcal{U}}$  te verkrijgen. Als we dit proces voortzetten kunnen we  $\mathcal{S}$  omvormen tot de lege reeks. We hebben zojuist namelijk laten zien dat elke verschijning van een vertex met 1 verminderen wederom een  $q$ -legale reeks maakt. Omdat door dit proces de lege reeks bereikt wordt, moet dus elke vertex even vaak voorkomen in  $\mathcal{S}$ . Dit impliceert  $d = c$ .  $\square$

**Stelling 4.8.** *Laat  $s$  een configuratie zijn voor de chip-firing op een verbonden graaf  $G$ . Dan bestaat er een unieke kritieke configuratie die bereikt kan worden door een  $q$ -legale reeks van afvuringen die gestart is bij  $s$ .*

**Bewijs:** We hebben in Lemma 4.2 al gezien dat er een dergelijke kritieke configuratie bestaat, maar is deze uniek? Stel dat  $c_1$  en  $c_2$  beide kritieke configuraties zijn die voldoen aan de voorwaarden. Uit Stelling 4.4 volgt dat er een configuratie moet zijn die zowel vanaf  $c_1$  als vanaf  $c_2$  kan worden bereikt. Lemma 4.2 vertelt ons dat er een dergelijke kritieke configuratie bestaat, deze noemen we nu  $d$ . Zojuist hebben we in Lemma 4.7 gezien dat dan moet gelden  $c_1 = d$  en  $c_2 = d$ . Hieruit volgt  $c_1 = c_2$ : de kritieke configuratie die bereikt wordt door een  $q$ -legale reeks vanaf  $s$  is uniek.  $\square$

## 5. DE GROEP VAN KRITIEKE CONFIGURATIES

Het homomorfisme  $\sigma : C^0(G; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$  definiëren we als  $\sigma(f) = \sum_v f(v)$ . Over  $\sigma$  kunnen we dan het volgende bewijzen:

**Lemma 5.1.** *Het beeld van  $Q$  is een normale ondergroep van de kern van  $\sigma$ .*

**Bewijs:** Allereerst weten we dat de matrix  $D$  in elke kolom precies twee elementen (1 en -1) heeft die ongelijk aan nul zijn. Het kan immers niet zo zijn dat een bepaalde kant de kop/staart is van meerdere verschillende vertices. Om die reden geldt  $\sigma D = 0$ . Stel nu dat  $x \in \text{im } Q$ , dat betekent  $x = Qy$  voor een bepaalde  $y$ . Nu geldt  $\sigma(x) = \sigma Qy = \sigma D D^t y = \sigma D(D^t y) = 0$  dus  $x \in \ker \sigma$ . Het beeld van  $Q$  is dus een ondergroep van de kern van  $\sigma$ . Omdat elke ondergroep van een Abelse groep normaal is, is het beeld van  $Q$  een normale ondergroep.  $\square$

Vanaf nu schrijven we  $K(G)$  voor de verzameling kritieke configuraties op een graaf  $G$ . Daarnaast zal  $\gamma(s) \in K(G)$  voor elke configuratie  $s$  de unieke configuratie weergeven zoals besproken in Stelling 4.8.

**Stelling 5.2.** *Er bestaat een bijectie tussen de verzameling  $K(G)$  van kritieke configuraties op een verbonden graaf  $G$  en de Abelse groep  $\ker \sigma / \text{im } Q$ .*

**Bewijs:** Eerst moeten we kijken naar de groep  $\ker \sigma / \text{im } Q$ . Bestaat er werkelijk een configuratie die zich in de restklasse  $\bar{f} \in \ker \sigma / \text{im } Q$  bevindt? Neem een  $f \in \ker \sigma$  en laat de configuratie  $l$  als volgt gedefinieerd zijn op alle vertices ongelijk aan  $q$ :

$$l(u) = \begin{cases} \deg(u) - 1, & \text{als } f(u) \geq 0, \\ \deg(u) - 1 - f(u), & \text{als } f(u) < 0, \end{cases}$$

met daarbij  $l(q) = - \sum_{u \neq q} l(u)$ .

Lemma 4.1 vertelt ons nu dat er een bovengrens is voor de lengte van een nette,  $q$ -legale reeks  $S$  die begint met  $l$ . Er is dus een eindige reeks die  $l$  overvoert naar een stabiele configuratie  $k$  met representatievector  $x$ : er geldt  $k = l - Qx$  met  $k(u) \leq \deg(u) - 1$  voor alle  $u \in V$ . Laat nu  $z = f + l - k$  dan  $z = f + Qx$  en daarom  $\bar{z} = \bar{f}$ . Vanwege de constructie van  $l$  geldt  $f(u) + l(u) \geq \deg(u) - 1$  en dus

$$z(u) = f(u) + l(u) - k(u) \geq \deg(u) - 1 - k(u) \geq 0 \text{ voor alle vertices } u.$$

We hebben nu bewezen dat  $z$  een configuratie is en dat  $\bar{z} = \bar{f}$  dus  $z$  is een configuratie binnen de restklasse  $\bar{f} \in \ker \sigma / \text{im } Q$ .

We zullen nu laten zien dat de functie

$$h : \ker \sigma / \text{im } Q \longrightarrow K(G) : \alpha \mapsto \gamma(s)$$

goedgedefinieerd en bijectief is met gegeven  $s$  een configuratie uit de restklasse  $\alpha$ . Om te bewijzen dat deze functie goedgedefinieerd is, zullen we laten zien dat twee verschillende configuraties uit restklasse  $\alpha$  hetzelfde beeld hebben. Stel nu dat  $s_1$  en  $s_2$  configuraties zijn zodat  $\bar{s}_1 = \bar{s}_2 = \alpha$ . Dan  $s_1 - s_2 = Q\phi$  voor  $\phi \in C^0(G, \mathbb{Z})$ . We schrijven  $\phi = f_1 - f_2$  waar  $f_1(v)$  en  $f_2(v)$  beide niet negatief zijn voor alle vertices  $v$ . Laat nu  $s_0 = s_1 - Qf_1 = s_2 - Qf_2$ .

We kijken nu naar de beelden van  $s_1$  en  $s_2$  onder  $h$ . Stel dat  $\gamma(s_1) = c_1 \in K(G)$  en dat  $\mathcal{S}_1$  de reeks is die  $s_1$  naar  $c_1$  stuurt. Omdat  $c_1$  recurrent is kunnen we  $\mathcal{S}_1$  zo kiezen dat elke vertex  $v$  minimaal  $f_1(v)$  keer voorkomt. Voor de gehele representatievector van  $\mathcal{S}_1$  schrijven we  $x_{s_1}$ . We weten nu dat we  $\mathcal{S}_1^{f_1}$  kunnen construeren met representatievector  $x_{s_1} - f_1$ . Het is nu bekend dat  $\mathcal{S}_1^{f_1}$  beginnend bij  $s_0$  zal gaan naar  $c_1$ . Vanwege de identiteiten

$$s_0 = s_1 - Qf_1 \quad s_1 - Qx_{s_1} = c_1$$

geldt nu namelijk

$$s'_0 = s_0 - Q(x_{s_1} - f_1) = s_0 - Qx_{s_1} + Qf_1 = s_0 - (s_1 - c_1) + (s_1 - s_0) = c_1.$$

We concluderen  $\gamma(s_1) = c_1 = \gamma(s_0)$ . Een soortgelijke berekening voor  $\gamma(s_2)$  geeft  $\gamma(s_2) = \gamma(s_0)$  en dus  $\gamma(s_1) = \gamma(s_2)$ . De functie  $h$  blijkt goed gedefinieerd.

Om tot slot de bijectiviteit van  $h$  te bewijzen, zullen we zowel surjectiviteit als injectiviteit moeten bewijzen voor de functie  $h$ . Voor de surjectiviteit nemen we een willekeurige  $c \in K(G)$ . De configuratie  $c$  is dus recurrent en stabiel en zit in het bijzonder in de restklasse  $\bar{c}$ . Er geldt dan  $h(\bar{c}) = \gamma(c) = c$ : de functie  $h$  is surjectief. Voor de injectiviteit van  $h$  nemen we allereerst aan dat  $h(\bar{s}_1) = h(\bar{s}_2)$ . Er geldt dan  $\gamma(s_1) = \gamma(s_2) = c$  voor een kritieke configuratie  $c$  als in Stelling 4.8. Er bestaan dus representatievectoren  $x_1$  en  $x_2$  zodat  $s_1 - Qx_1 = c = s_2 - Qx_2$ . Daarom is  $s_1 - s_2 = Q(x_1 - x_2)$  en dus  $\bar{s}_1 = \bar{s}_2$ : hiermee is ook de injectiviteit bewezen.  $\square$

Als men definieert  $\bar{s}_1 + \bar{s}_2 := \overline{s_1 + s_2}$  dan geeft dit een Abelse groepsstructuur voor  $\ker \sigma / \text{im } Q$ . Vanwege de gegeven bijectie  $h$  is  $K(G)$  dan ook een Abelse groep, maar met de groepsoperatie  $\bullet$  waarvoor geldt  $h(\bar{s}_1) \bullet h(\bar{s}_2) = h(s_1 + s_2)$ . Er geldt dus  $\gamma(s_1) \bullet \gamma(s_2) = \gamma(s_1 + s_2)$  en voor kritieke configuraties  $c_1$  en  $c_2$  impliceert dat  $c_1 \bullet c_2 = \gamma(c_1 + c_2)$ .

We zullen  $K(G)$  met de groepsoperatie  $\bullet$  voortaan de *kritieke groep* op  $G$  noemen. Stelling 5.2 kan dan ook als volgt worden geformuleerd:

**Stelling 5.3.** *De afbeelding*

$$h : \ker \sigma / \text{im } Q \longrightarrow K(G)$$

*is een groepsisomorfisme.*

**Bewijs:** We weten al dat  $h$  een bijectie is. Bovendien hebben we zojuist gezien dat  $h(\bar{s}_1) + h(\bar{s}_2) = h(\bar{s}_1 + \bar{s}_2)$ .  $\square$

Waar we nu gebruik maken van de matrix  $Q$ , wordt op dit vakgebied ook vaak gebruik gemaakt van de matrix  $\Delta$ . [3] Deze is als volgt gedefinieerd voor  $v \neq q$  en  $w \neq q$ :

$$\Delta_{vw} = \begin{cases} \deg(v), & \text{als } v = w. \\ -\nu(v, w), & \text{als } v \neq w; \end{cases}$$

Dit lijkt in eerste instantie gelijk aan de definitie van  $Q$ , maar het is dus goed te beseffen dat  $v$  en  $w$  ongelijk aan  $q$  zijn. De vertex  $q$  wordt bij deze matrix dus totaal onbeschouwd gelaten. Ook komt  $q$  niet voor in de configuratievector; de som van het totaal aantal chips op een graaf is nu niet meer per se nul.

**Stelling 5.4.** *De groepen  $\mathbb{Z}^n / \Delta \mathbb{Z}^n$  en  $\ker \sigma / \text{im } Q$  zijn isomorf.*

**Bewijs:** Allereerst kunnen we elk element van  $\mathbb{Z}^n$  bekijken als een afbeelding van de verzameling van  $n$  vertices ongelijk aan  $q$  naar  $\mathbb{Z}$ . Anders gezegd, deze afbeelding voegt aan elke vertex  $v \neq q$  de waarde van de vertex toe. We weten bovendien dat

$$(2) \quad \Delta e_v = \deg(v)e_v - \sum_w e_w$$

voor  $e_v$  een standaardbasisvector van  $\mathbb{Z}^n$  en  $w$  de buurvertices ongelijk aan  $q$  van  $v$ . Wanneer we  $q$  wel meenemen in de notatie, zal de betreffende ruimte  $\mathbb{Z}^{n+1}$  worden, die opgespannen wordt door de  $e_v$ 's en  $e_q$ . We zijn dan echter alleen geïnteresseerd in de deelruimte waar het totaal aantal chips op de graaf nul is. Deze ker  $\sigma$  is een

deelruimte van  $\mathbb{Z}^{n+1}$  en heeft als basis  $\{e_v - e_q\}$ , voor de verschillende vertices  $v \neq q$ . We definiëren voor het gemak  $f_v = e_v - e_q$ . We weten nu dat

$$Qe_v = \begin{cases} \deg(v)e_v - \sum_{w \neq q} e_w, & \text{als } q \text{ geen buurvertex van } v; \\ \deg(v)e_v - \sum_{w \neq q} e_w - e_q, & \text{anders.} \end{cases}$$

Laten we eerst kijken naar het geval dat  $q$  geen buurvertex is van  $v$ . Omdat  $Qe_v$  in de ker  $\sigma$ -groep ligt, weten we dat  $Qe_v$  van de vorm  $(a, -1, -1, \dots, -1, 0, 0, \dots, 0)$  is. Op de plaats  $v$  in de vector staat namelijk de graad van  $v$  (hier  $a$ ), bij buren van  $v$  staat  $-1$  en de rest (inclusief  $q$ ) neemt de waarde  $0$  aan. We kunnen deze vector nu als volgt ontbinden:

$$\begin{aligned} (a, -1, -1, \dots, -1, 0, 0, \dots, 0) &= a(1, 0, \dots, 0, -1) + (0, -1, 0, \dots, 0, 1) + \dots + \\ &\quad (0, \dots, 0, -1, 0, \dots, 0, 1) \\ &= \deg(v)f_v - \sum_w f_w \end{aligned}$$

voor  $w$  buren van  $v$  en dus ongelijk aan  $q$ . We zien dat voor dit geval al dezelfde vorm als in de vergelijking (2) wordt aangenomen. Kijkende naar het geval waarvoor  $q$  wel een buurvertex van  $v$  is, dan verandert er niet veel in bovenstaande redentatie. We schrijven dan

$$Qe_v = (a, -1, -1, \dots, -1, 0, 0, \dots, -1)$$

maar de ontbinding blijft dezelfde vorm aannemen. Dit alles is gebaseerd op het feit dat een vector  $(a_1, a_2, \dots, a_n, a_q)$  uit de ker  $\sigma$  ten opzichte van de  $f$ -basis te schrijven is als  $a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_n f_n$ . We concluderen dat ker  $\sigma$  het opspansel is van de  $f_v$ 's voor  $v \neq q$  waar  $\mathbb{Z}^n$  het opspansel is van de  $e_v$ 's voor  $v \neq q$ . Equivalent is  $Q\mathbb{Z}^{n+1}$  het opspansel is van de  $\{\deg(v)f_v - \sum_{w \neq q} f_w \mid w \text{ buren van } v \neq q\}$  waar  $\Delta\mathbb{Z}^n$  het opspansel is van  $\{\deg(v)e_v - \sum_{w \neq q} e_w \mid w \text{ buren van } v \neq q\}$ . Beide groepen in de stelling zijn dus isomorf.  $\square$

## 6. HET EENHEIDSELEMENT VAN DE KRITIEKE GROEP

Met behulp van de lemma's en stellingen uit de vorige paragrafen gaan we nu op zoek naar het eenheidselement van de kritieke groep.

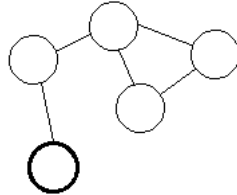
Laten we allereerst eens kijken naar het eenheidselement van de groep ker  $\sigma/\text{im } Q$ . Er bestaat immers een bijectie  $h$  tussen deze groep en de kritieke groep. Binnen ker  $\sigma/\text{im } Q$  is de groepsoperatie gedefinieerd als  $\overline{s_1} + \overline{s_2} := \overline{s_1 + s_2}$ . Dus het optellen van twee elementen gebeurt als het, op de gebruikelijke manier, optellen van twee vectoren waarbij vervolgens het beeld van  $Q$  wordt weggedeeld. In ker  $\sigma/\text{im } Q$  is dus  $\overline{0}$  het eenheidselement. Immers,  $\overline{s_1} + \overline{0} := \overline{s_1}$  voor alle  $\overline{s_1} \in \text{ker } \sigma/\text{im } Q$ .

Vanwege Stelling 5.3 is dus  $h(\overline{0})$  het eenheidselement in  $K(G)$ . We hebben al uitgelegd, hoe je bij een willekeurig element van ker  $\sigma/\text{im } Q$  het beeld onder  $h$  bepaalt. Specifiek voor het eenheidselement, levert dat het volgende algoritme:

- (1) Start met de nulconfiguratie.
- (2) Laat de vertex  $q$  zich herhaald afvuren totdat een instabiele configuratie ontstaat.
- (3) Laat chip-firing plaatsvinden tot een stabiele configuratie wordt bereikt.
- (4) Laat opnieuw  $q$  afvuren, en herhaal dit proces.
- (5) De stabiele configuratie die zich herhaalt, is het eenheidselement voor deze groep.

We zullen dit algoritme nu illustreren aan de hand van verschillende voorbeelden.

**Voorbeeld 6.1.** Allereerst een specifiek voorbeeld van een graaf  $G$  met 5 vertices en 5 kanten, zoals weergegeven in figuur 3. Hierin kiezen we de volgorde van de vertices met de klok mee, beginnend met  $q$ .



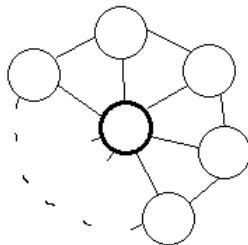
FIGUUR 3

Voor deze graaf gaan we met behulp van het algoritme het eenheidselement van  $K(G)$  zoeken:

- (1) Start met de nulconfiguratie  $(0,0,0,0,0)$ .
- (2) Als  $q$  één keer wordt afgevuurd levert dat  $(-1,1,0,0,0)$ . Nogmaals afvuren geeft de instabiele configuratie  $(-2,2,0,0,0)$ .
- (3) Nu zal de tweede vertex afgevuurd worden: de stabiele configuratie  $(-1,0,1,0,0)$  wordt bereikt.
- (4) Dit proces herhalen we, op zoek naar de stabiele configuratie die zich herhaalt. Als we  $q$  afvuren levert dat  $(-3,2,1,0,0)$ , welke na een reeks van chip-firing neerkomt op  $(-2,0,2,0,0)$ . Na een korte reeks en het afvuren van  $q$  komen we vervolgens op  $(-6,2,2,1,1)$  welke gaat naar  $(-5,1,2,1,1)$ . Wederom  $q$  afvuren en chip-firing laten plaatsvinden levert weer  $(-5,1,2,1,1)$ .
- (5) De stabiele configuratie die zich herhaalt, namelijk  $(-5,1,2,1,1)$  is het eenheidselement voor deze groep.

Als we willen controleren of dit het eenheidselement is, kan dat door de configuratie bij zichzelf op te tellen en vervolgens te kijken naar het resultaat van de reeks chip-firing. Dit moet namelijk weer gelijk zijn aan het eenheidselement. In dit geval klopt dat ook: de configuratie  $(-10,2,4,2,2)$  gaat na een reeks van chip-firing terug naar  $(-5,1,2,1,1)$ .

**Voorbeeld 6.2.** We zullen nu kijken naar een klasse van voorbeelden, namelijk de zogenaamde wielen. Dit zijn grafen met  $n$  vertices in een ring die alle verbonden zijn met de vertex  $q$  in het centrum. Een voorbeeld hiervan is te zien in figuur 4. Hierin kiezen we de volgorde van de vertices met de klok mee, te beginnen met de bovenste vertex en afsluitend met  $q$ .



FIGUUR 4

Ook voor deze klasse van grafen kunnen we het algoritme volgen:

- (1) Start met de nulconfiguratie  $(0,0,0,\dots,0)$ .
- (2) Als  $q$  één keer wordt afgevuurd levert dat  $(1,1,\dots,1,-n)$ . Nog tweemaal afvuren geeft de instabiele configuratie  $(3,3,\dots,-3n)$ .
- (3) Nu laten we chipfiring plaatsvinden, waarvoor we de gewone volgorde van vertices aanhouden. De configuratie  $(3,3,\dots,-3n)$  wordt zo  $(0,4,3,\dots,3,4,-3n+1)$  door het afvuren van de eerste vertex. Deze configuratie bereikt vervolgens  $(1,1,4,3,\dots,3,4,-3n+2)$ , daarna  $(1,2,1,4,3,\dots,3,4,-3n+3)$  en  $(1,2,2,1,4,3,\dots,3,4,-3n+4)$ . We zien op deze manier de rij drieën steeds korter worden, hoewel er een rij tweeën ontstaat. Dit proces zet zich voort totdat de stabiele configuratie  $(2,2,\dots,2,-2n)$  bereikt wordt.
- (4) Dit proces wordt herhaald, en we laten  $q$  dus nogmaals afvuren. Dit levert  $(3,3,\dots,-3n)$ , die op zijn beurt door chip-firing de stabiele configuratie  $(2,2,\dots,2,-2n)$  zal bereiken, zoals we al zagen.
- (5) Deze stabiele configuratie die zich herhaalt, namelijk  $(2,2,\dots,2,-2n)$  is het eenheidselement voor deze groep.

Analoog aan het argument in Voorbeeld 4.3 en de Appendix in [3] kan bewezen worden:

$$K(G) \cong \mathbb{Z}/u_n\mathbb{Z},$$

waarbij  $u_1 = 3$  en  $u_2 = 8$  en  $u_n = 3u_{n-1} - u_{n-2}$ . Dus

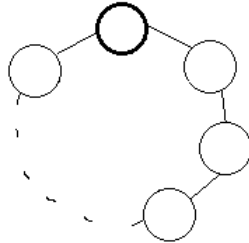
$u_1$	3
$u_2$	8
$u_4$	55
$u_6$	377
$u_8$	2584
$\vdots$	

en

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right\}.$$

Dit laat zien dat, naarmate de graaf groter wordt, het aantal elementen in de groep  $K(G)$  erg snel toeneemt.

**Voorbeeld 6.3.** We zullen nu kijken naar een verzameling grafen waarbij de vertex  $q$  zich niet in het centrum bevindt, maar in de ring van de overige vertices. In figuur 5 is te zien hoe deze grafen er uit zien.



FIGUUR 5

We kiezen wederom de volgorde van de vertices met de klok mee, afsluitend met  $q$ . Het totaal aantal vertices van de graaf nemen we gelijk aan  $n$ . De verzameling bestaat nu uit twee deelverzamelingen: de grafen waarvoor  $n$  even is, ofwel  $n$  oneven is. Dit onderscheid is belangrijk omdat van de beide deelverzamelingen het eenheidselement van de recurrente groep niet gelijk is.

Allereerst kijken we naar grafen waarvoor  $n$  oneven is:  $n = 2m + 1$  met  $m$  geheel en positief. Een voorbeeld hiervan is de ring van 3 vertices. Als we hierop het algoritme toepassen, resulteert dat in:

- (1) Start met de nulconfiguratie  $(0,0,0)$ .
- (2) Als  $q$  één keer wordt afgevuurd levert dat  $(1,1,-2)$ . Nogmaals afvuren geeft de instabiele configuratie  $(2,2,-4)$ .
- (3) Nu laten we chipfiring plaatsvinden, waarvoor we de gewone volgorde van vertices aanhouden. De configuratie  $(2,2,-4)$  wordt zo  $(0,3,-3)$  door het afvuren van de eerste vertex. Deze configuratie bereikt vervolgens  $(1,1,-2)$ . We zien hier dus al heel snel dat er zich een stabiel configuratie herhaalt.
- (4) Deze herhalende stabiele configuratie, namelijk  $(1,1,-2)$ , is het eenheidselement voor de recurrente groep van deze graaf met drie vertices.

We stellen nu dat het eenheidselement voor  $n$  oneven gelijk is aan  $(1,1,\dots,-n+1)$ . Om dit te bewijzen laten we eerst zien dat dit element inderdaad in de recurrente groep zit, en vervolgens dat het inderdaad het eenheidselement is. Een configuratie noemen we recurrent als er een  $q$ -legale reeks van afvuringen bestaat die de configuratie naar zichzelf terugbrengt. Als we hier beginnen met  $(1,1,\dots,-n+1)$  en  $q$  laten afvuren dan ontstaat de configuratie  $(2,1,\dots,1,2,-n+3)$ . Door de eerste en de  $(n-1)$ -de vertex af te vuren verandert dit in  $(0,2,1,\dots,1,2,0,-n+1)$ , welke  $(1,0,2,1,\dots,1,2,0,1,-n+1)$  wordt door de tweede en  $(n-2)$ -de vertex af te vuren. Door telkens op deze manier paarsgewijs af te vuren zal op een gegeven moment  $(1,\dots,1,0,2,2,0,1,\dots,1,-n+1)$  zich voordoen. Door afvuringen verandert deze in  $(1,\dots,1,-n+1)$ ; de betreffende configuratie is dus recurrent.

Maar is dit element werkelijk het eenheidselement? Om dit te bewijzen kunnen we gebruik maken van het algoritme, maar dat blijkt nog erg lastig in dit geval. Een tweede methode is om te laten zien dat dit element in het beeld van  $Q$  ligt. Maar omdat de groepen  $\mathbb{Z}^n/\Delta\mathbb{Z}^n$  en  $\ker\sigma/\text{im}Q$  isomorf zijn volgens Stelling 5.4, mogen we voor het gemak in plaats van  $Q$  ook gebruik maken van  $\Delta$ . We stellen daarom de volgende vergelijking op:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ x_m \\ \vdots \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dit geeft ons de vergelijkingen

$$\begin{aligned} x_2 &= 2x_1 - 1 \\ x_3 &= -x_1 + 2x_2 - 1 \\ &= 3x_1 - 3 \\ x_4 &= -x_2 + 2x_3 - 1 \\ &= 4x_1 - 6 \\ x_5 &= -x_3 + 2x_4 - 1 \\ &= 5x_1 - 10 \\ x_6 &= -x_4 + 2x_5 - 1 \\ &= 6x_1 - 15 \end{aligned}$$

Met behulp van inductie kunnen we nu bewijzen dat voor  $k \leq m$  er geldt  $x_k = kx_1 - \frac{1}{2}k(k-1)$ . Immers,  $x_k = -x_{k-2} + 2x_{k-1} - 1 = -(k-2)x_1 + \frac{1}{2}(k-2)(k-3) + 2(k-1)x_1 - (k-1)(k-2) - 1 = kx_1 - \frac{1}{2}k(k-1)$ . Voor  $k = m$  geldt  $-x_{m-1} + x_m = 1$  en dus  $-(m-1)x_1 + \frac{1}{2}(m-1)(m-2) + mx_1 - \frac{1}{2}m(m-1) = 1$ . Dit levert  $x_1 - m + 1 = 1$  en dus moet gelden  $x_1 = m$ . We zien nu dat  $x_1$  tot en met  $x_m$  gehele getallen zijn omdat  $m$  een geheel, positief getal is. De 1-configuratie ligt dus inderdaad in het beeld van  $Q$ . Voor  $n$  oneven is de 1-configuratie dus het eenheidselement van de kritieke groep bij deze soort grafen.

Een soortgelijk bewijs toont aan dat voor even  $n$  de configuratie  $(1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1, -n+2)$  het eenheidselement is. De vergelijking is dan wel net iets anders: zowel de oplossingsvector als de 1-vector hebben een 0 als middelste element. Om dit aannemelijk te maken voeren we het algoritme uit met een graaf waarvoor  $n = 4$ :

- (1) Start met de nulconfiguratie  $(0, 0, 0, 0)$ .
- (2) Als  $q$  één keer wordt afgevuurd levert dat  $(1, 0, 1, -2)$ . Door nog een keer af te vuren bereiken we  $(2, 0, 2, -4)$ .
- (3) Deze configuratie is instabiel en door de derde vertex dan af te vuren krijgen we  $(2, 1, 0, -3)$ . Als vervolgens de eerste en tweede vertex afvuren komen we bij  $(1, 0, 1, -2)$ .
- (4) Opnieuw afvuren van  $q$  is niet nodig.
- (5) De stabiele configuratie die zich herhaalt, namelijk  $(1, 0, 1, -2)$  is het eenheidselement voor deze groep.

## 7. CONCLUSIES

In deze scriptie zien we hoe voor simpele eindige grafen met één aangewezen vertex  $q$ , de groep  $K(G)$  van kritieke configuraties wordt gedefinieerd (zie Stelling 5.2 en haar bewijs). Dit doen we in overeenstemming met het artikel [1] van de heer N.L. Biggs uit 1999.

Vervolgens vinden we het eenheidselement in de groep van kritieke configuraties voor twee soorten grafen. Allereerst zien we dat voor de 'wielen' de configuratie  $(2, 2, \dots, 2, -2n)$  het eenheidselement is voor alle positieve, gehele  $n$ . Voor 'ringen' is er verschil tussen de gevallen even en oneven  $n$ . Voor oneven  $n$  is het eenheidselement namelijk  $(1, 1, \dots, -n+1)$  en voor even  $n$  is dat  $(1, \dots, 1, 0, 1, \dots, 1, -n+2)$ .



## REFERENTIES

- [1] N.L. Biggs, *Chip-Firing and the Critical Group of a Graph*, Journal of Algebraic Combinatorics 9 (1999), 25-45.
- [2] Reinhard Diestel, *Graph Theory*, 3rd edition, 2005.
- [3] Nynke Niezink, *Abelian Sandpiles*, Bachelor thesis in Mathematics, University of Groningen, August 2008.